Εισαγωγή στην Εργοδική Θεωρία

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2024

---

(1) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, $(Y, \mathcal{D}, \nu, S)$ δυναμικά συστήματα. Στο χώρο πιθανότητας $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{D}, \mu \times \nu)$ ορίζουμε το μετασχηματιμό γινόμενο $T \times S \colon X \times Y \to X \times Y$ με τύπο

$$(T \times S)(x, y) = (Tx, Sy), \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Δείξτε ότι η τετράδα $(X \times Y, \mathcal{B} \times \mathcal{D}, \mu \times \nu, T \times S)$ είναι επίσης δυναμικό σύστημα.

---

(2) **(i)** Για ποια $\alpha > 0$ ο $T \colon [0,1) \to [0,1)$ με τύπο $Tx = \{\alpha x\}$ διατηρεί το μέτρο $m_{[0,1)}$;

(ii) Για ποια $\alpha > 0$ ο $T \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τύπο $Tx = \alpha\{x\} \pmod 1$ διατηρεί το μέτρο $m_{\mathbb{T}}$;

(iii) Βρείτε το μοναδικό *Borel* μέτρο στο $[0,1)$ το οποίο διατηρεί ο $T \colon [0,1) \to [0,1)$ με τύπο $Tx = x/2$.

---

(3) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ χώρος πιθανότητας όπου $d\mu = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}\, dx$, δηλαδή, $\int f\, d\mu = \frac{1}{\pi}\int \frac{f(x)}{x^2+1}\, dx$ για κάθε $f \in L^1(m_{\mathbb{R}})$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $Tx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ για $x \neq 0$ διατηρεί το μέτρο μ.

---

(4) Δεδομένου $\alpha \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $T \colon \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ με τύπο

$$T(x, y, z) = (x + \alpha, y + x, z + y) \pmod 1,$$

είναι *Borel*-μετρήσιμος και διατηρεί το $m_{\mathbb{T}^3}$, και υπολογίστε το $T^n(x, y, z)$ για $n \in \mathbb{N}$.

---

(5) Δεδομένου $\alpha \in \mathbb{R}$, βρείτε συνεχή μετασχηματισμό $T \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ που ικανοποιεί

$$T^n(0,0) = (n\alpha, n^2\alpha) \pmod 1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επίσης, δεδομένων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, βρείτε συνεχή μετασχηματισμό $T \colon \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ που ικανοποιεί

$$T^n(0,0,0,0) = (n\alpha, n^2\alpha, n\beta, n^2\beta) \pmod 1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

---

(6) **(i)** Έστω $T \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τύπο $Tx = x + \alpha \pmod 1$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ και I, J ξένα κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1)$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \colon T^{-n}I \cap J = \emptyset\}$ είναι άπειρο.

(ii) Έστω $T \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τύπο $Tx = 2x \pmod 1$ και I, J μη τετριμμένα υποδιαστήματα του $[0,1)$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \colon T^{-n}I \cap J = \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο.
