ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-Άνοιξη 2015-Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 4 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (i) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος με πεπερασμένο μέτρο και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $\int |f \cdot g| \, d\mu < \infty$ για κάθε $g \in L^2(\mu)$ τότε $f \in L^2(\mu)$.

(ii) Έστω Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $C[0,1]$ με $Y \neq C[0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει προσημασμένο μέτρο *Borel* μ στο $[0,1]$, με $0 < |\mu|([0,1]) < \infty$, τέτοιο ώστε $\int f \, d\mu = 0$ για κάθε $f \in Y$.

(**2**) Έστω H χώρος *Hilbert* και $x_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι $x_n \to^w x$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \langle a, x_n \rangle = \langle a, x \rangle$ για κάθε $a \in H$.

(ii) Δείξτε ότι $x_n \to^{\|\cdot\|} x$ αν και μόνο αν $x_n \to^w x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$.

(iii) Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - e_n\|^2 < \infty$ όπου (e_n) ορθοκανονική ακολουθία δείξτε ότι $x_n \to^w 0$.

(**3**) Έστω H χώρος *Hilbert*, (e_n) ορθοκανονική ακολουθία, και $(a_n) \in \ell_\infty$. Ορίζουμε τον τελεστή $T : H \to H$ με τύπο

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n \rangle \, e_{n+1}, \quad x \in H.$$

(i) Δείξτε ότι ο τελεστής είναι καλά ορισμένος (δηλαδή ότι η σειρά συγκλίνει).

(ii) Δείξτε ότι ο τελεστής είναι συμπαγής αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(**4**) Έστω $x_n = (\xi_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι $x_n \to^{w^*} 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\ell_1} < \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \xi_{nk} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.
(*Υπόδειξη*: $x_n \to^{w^*} 0$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \xi_{nk} = 0$ για κάθε $(a_k) \in c_0$.)

(ii) Δείξτε ότι $e_n \to^{w^*} 0$ όμως $e_n \not\to^w 0$.

(**5**) Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος. Με $\mathcal{M}(K)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο των προσημασμένων μέτρων *Borel* στο K με $|\mu|(K) < \infty$.

(i) Δείξτε ότι $ex(B_{\mathcal{M}(K)}) = \{\delta_x, x \in K\}$, όπου δ_x το μέτρο *Dirac*. (*Υπόδειξη για* $\subset$: Αν $\mu(A) = a \in (0,1)$ τότε $\mu = a\mu_A + (1-a)\mu_{K\setminus A}$, όπου $\mu_B(E) = \frac{\mu(B\cap E)}{\mu(B)}$ για $B = A$, $K \setminus A$.)

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(K)$ υπάρχει δίκτυο $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, όπου $\mu_\lambda \in \mathcal{M}(K)$ μέτρα με φορέα πεπερασμένο σύνολο, ώστε $\mu_\lambda \to^{w^*} \mu$.
