ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2022
Παράδοση: Τετάρτη 23 Φεβρουαρίου.

(**1**) Θεωρούμε την μετρική $d(x,y) = |x-y|$ στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$.

(*i*) Είναι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{Q}, d)$ πλήρης; Είναι το $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ συμπαγές υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, d)$;

(*ii*) Έστω (B_n) (μη κενές) κλειστές μπάλες στον $(\mathbb{Q}, d)$ με $B_{n+1} \subset B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$;

(**2**) Έστω μετρική d σε γραμμικό χώρο X. Δείξτε ότι η d επάγεται από κάποια νόρμα στον X (δηλαδή υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον X ώστε $d(x,y) = \|x-y\|$ για κάθε $x, y \in X$) αν και μόνο αν

(*i*) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, και

(*ii*) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

(**3**) Έστω $x = (x_n)$ ακολουθία μιγαδικών και $p, r \in \mathbb{R}$ με $1 \leq r < s \leq \infty$.

(*i*) Δείξτε ότι $\|x\|_s \leq \|x\|_r$.

(*Υπόδειξη.* Ανάγετε στην περίπτωση $r = 1$ και δείξτε ότι $|x|^s + |y|^s \leq (|x| + |y|)^s$.)

(*ii*) Δείξτε ότι ο ℓ_r είναι *γνήσιο* υποσύνολο του ℓ_s.

(**4**) (*i*) Δείξτε ότι ο c_0 είναι *γνήσιο* υπερσύνολο του $\bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p$.

(*ii*) Έστω $x \in \ell_p$ για κάποιο $p \in [1, \infty)$. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

(**5**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος μέτρου και $r, s \in \mathbb{R}$ με $1 \leq r \leq s \leq \infty$.

(*i*) Δείξτε ότι $L_r(\mu) \cap L_\infty(\mu) \subset L_s(\mu)$.

(*ii*) Δείξτε ότι αν $\mu(X) < \infty$, τότε $L_s(\mu) \subset L_r(\mu)$.

(**6**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \colon X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη.

(*i*) Αν $\mu(X) < \infty$, δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mu)} = \|f\|_{L_\infty(\mu)}$ (μπορεί $= +\infty$).

(*ii*) Αν $f \in L_r(\mu) \cap L_\infty(\mu)$ για κάποιο $r \geq 1$, δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\mu)} = \|f\|_{L_\infty(\mu)}$.
