ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2022
Παράδοση: Τετάρτη 13 Απριλίου.

(**1**) (*i*) Έστω X γραμμικός χώρος ο οποίος είναι πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι $\|x_n\|_2 \to 0$ εάν $\|x_n\|_1 \to 0$. Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(*ii*) Δείξτε ότι κάθε πλήρης νόρμα στον $B(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ φραγμένη}\}$ για την οποία σύγκλιση στο 0 συνεπάγεται κατά σημείο σύγκλιση στο 0, είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

(**2**) Έστω $T : C[0,1] \to C[0,1]$ (με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$) γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε εάν $f_n \in C[0,1]$ και $\|f_n\|_\infty \to 0$ τότε $(Tf_n)(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ (προσοχή δεν υποθέτουμε ότι $\|Tf_n\|_\infty \to 0$). Να δειχθεί ότι ο τελεστής T είναι φραγμένος.

(**3**) Έστω Y κλειστός υπόχωρος του $L^1[0,2]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1[0,1]$ υπάρχει $g \in Y$ τέτοια ώστε $g|_{[0,1]} = f$. Δείξτε ότι υπάρχει $C > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε $f \in L^1[0,1]$ υπάρχει $g \in Y$ ώστε $g|_{[0,1]} = f$ και $\|g\|_{L^1[0,2]} \leq C\,\|f\|_{L^1[0,1]}$.

(**4**) Αποδείξτε ότι υπάρχει ή δείξτε ότι δεν υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί όλα τα παρακάτω

(*i*) $F(1) = 1$,

(*ii*) $F((x_{n+k})) = F((x_n))$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $(x_n) \in \ell^\infty$,

(*iii*) $F((x_n y_n)) = F((x_n))\,F((y_n))$ για κάθε $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$.

(**5**) Έστω X χώρος με *Banach*, Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, $F \in Y^*$, και $\widetilde{F} : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές ώστε $\widetilde{F}|_Y = F$.

(*i*) Αν ο Y έχει πεπερασμένη συνδιάσταση[1] δείξτε ότι $\widetilde{F} \in X^*$.

(*ii*) Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (*i*) δεν ισχύει αν ο Y έχει άπειρη συνδιάσταση.

(**6**) Έστω X χώρος με νόρμα, (x_n) ακολουθία στοιχείων του X, και (λ_n) ακολουθία πραγματικών. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(*i*) Υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ και για κάθε ακολουθία πραγματικών (a_n) έχουμε

$$\Big|\sum_{n\in A} a_n \lambda_n\Big| \leq C \,\Big\|\sum_{n\in A} a_n x_n\Big\|$$

(*ii*) Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_n) = \lambda_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

---

[1] Δηλαδή υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $span\{Y, x_1, \ldots, x_k\} = X$.