ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7 (21/12/10)

Να μου επιστρέψετε μέχρι την Παρασκευή 14 Ιανουαρίου τις παρακάτω ασκήσεις.

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για το δεύτερο μέρος της 5 και για την 11.

(**1**) Έστω $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ μέτρο *Borel*. Να δειχθεί ότι υπάρχει *Borel* σύνολο A τέτοιο ώστε $\mu(E) \geq m_{\mathbb{R}}(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset A$ και $\mu(E) \leq m_{\mathbb{R}}(E)$ για κάθε *Borel* $E \subset \mathbb{R}\backslash A$.

(**2**) Έστω $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των *Lebesgue* μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $\mu, \nu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ δύο σ-πεπερασμένα μέτρα με $\mu \ll m_{\mathbb{R}}$, $\nu \ll m_{\mathbb{R}}$. Εάν $\mu(I) = \nu(I)$ για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, δείξτε $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

(**3**) Έστω $f\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ η συνάρτηση που ορίσαμε στην Άσκηση 9 του Φυλλαδίου 4, $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των *Lebesgue* μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, και $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ το μέτρο με τύπο

$$\mu(E) = \int_E f^2 \, dx.$$

Να δειχθεί ότι (*i*) το μ είναι σ-πεπερασμένο, (*ii*) $\mu \ll m_{[0,1]}$, όμως (*iii*) $\mu(I) = +\infty$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0,1]$.

(**4**) Έστω μ, ν μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(A) + \nu(A^c) \leq \varepsilon.$$

Να δειχθεί ότι $\mu \perp \nu$.

(**5**) (**i**) Έστω $I = [0,1] \times [0,1]$. Κατασκευάστε μέτρα $\mu_t\colon \mathcal{B}(I) \to [0,+\infty]$, τέτοια ώστε για κάθε $t \in [0,1]$ το μ_t είναι συνεχές (δηλαδή $\mu_t(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in I$), $\mu_t(I) = 1$, $\mu_t \perp m_I$, και επιπλέον $\mu_t \perp \mu_s$ για κάθε $t, s \in [0,1]$ με $t \neq s$.

(**ii**)$^\spadesuit$ Κατασκευάστε συνεχές μέτρο $\mu\colon \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$, τέτοιο ώστε $\mu([0,1]) = 1$ και $\mu \perp m_{[0,1]}$.

(**6**) Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Να δειχθεί ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ τέτοιο ώστε $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$.

(**7**) Έστω $\phi\colon [a,b] \to [c,d]$ επί, συνεχής, και τέτοια ώστε $m_{\mathbb{R}}(\phi(Z)) = 0$ εάν $m_{\mathbb{R}}(Z) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική, *Borel* μετρήσιμη συνάρτηση $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^1([c,d])$ *Borel* μετρήσιμη, έχουμε $(f \circ \phi) \cdot w \in L^1([a,b])$ και

$$\int_c^d f(y)\ dy = \int_a^b (f \circ \phi)(x) \cdot w(x)\ dx.$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι για το μέτρο ν με τύπο $\nu(E) = m_{\mathbb{R}}(\phi^{-1}(E))$ ισχύει $m_{\mathbb{R}} \ll \nu$.

(**8**) Έστω μ μέτρο Borel στο $[0,1]$ με $\mu([0,1]) = 1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο άρρητο α έχουμε $\int_0^1 f(x+\alpha)\ d\mu = \int_0^1 f(x)\ d\mu$ για κάθε συνεχή $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+1) = f(x)$. Δείξτε ότι το μέτρο μ ταυτίζεται με τον περιορισμό του μέτρου *Lebesgue* στο $[0,1]$.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\int_0^1 e^{2\pi ikx} d\mu = \int_0^1 e^{2\pi ikx} dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και χρησιμοποιήστε ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $C([0,1])$.

(**9**) (**i**) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος με μέτρο πιθανότητας και $T\colon X \to X$ μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο μ. Δείξτε ότι ο T είναι εργοδικός αν και μόνο αν για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

(**ii**) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός που ορίσαμε στην Άσκηση 7 του Φυλλαδίου 6 είναι εργοδικός.

(**10**) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, $(X, \mathcal{A}, \nu, T)$, δύο εργοδικά συστήματα (μόνο τα μέτρα διαφέρουν). Εάν $\mu(X) = \nu(X) = 1$ και $\mu \neq \nu$, δείξτε ότι $\mu \perp \nu$.
Υπόδειξη: Κάντε χρήση της μοναδικότητας της διάσπασης *Radon-Nikodym*.

(**11**)$^\spadesuit$ Για $x, y \in [0,1]$ ορίζουμε την πράξη $x \dotplus y = \{x+y\}$, όπου $\{x\}$ συμβολίζει το κλασματικό μέρος του αριθμού x. Εάν $A \subset [0,1]$ είναι μετρήσιμο και ικανοποιεί $A \dotplus \alpha = A$ για κάποιον άρρητο α, δείξτε ότι το A έχει *Lebesgue* μέτρο 0 ή 1.