ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2010
Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη επεξήγηση.

(i) Κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ μπορεί να γραφεί ως ένωση κάποιου *Borel* συνόλου και κάποιου συνόλου μέτρου 0.

(ii) Εάν $E \subset [0,1]$ και $m_*(E) = 1$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

(iii) Εάν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τότε υπάρχει $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f = g$ σχεδόν παντού.

(iv) Εάν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και $f = g$ σχεδόν παντού.

(2) Έστω $E \subset (0,2)$ μετρήσιμο με $m(E) = 1$. Να δειχθεί ότι

(i) Υπάρχει συμπαγές K με $K \subset E$ και $m(K) = 0.99$.

(ii) Υπάρχει ανοιχτό O με $E \subset O \subset (0,2)$ και $m(O) = 1.01$.

(3) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τοπικά *Lipschitz*, δηλαδή είναι *Lipschitz* σε κάθε φραγμένο διάστημα.

(i) Δείξτε ότι η f στέλνει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0.

(ii) Δείξτε ότι η f στέλνει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

(iii) Στέλνει κάθε συνεχής $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα;

(4) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

(i) Για κάθε $c > 0$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} m(\{x\colon |f(x)| \geq c, |x| > n\}) = 0$.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\lim_{|x|\to\infty, x\in F_\varepsilon} f(x) = 0$.

(5) **(i)** Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+1}$$

είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{|\sin\left(\frac{x}{n}\right)|}{x^2+1}\,dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{n|\sin\left(\frac{x}{n}\right)|}{x^2+1}\,dx.$$

(6) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $0 < m(E) < +\infty$. Δείξτε ότι:

(i) $\lim_{t\to 0} m(E \cap (E+t)) = m(E)$.

(ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το E περιέχει αριθμητικές προόδους μήκους k, δηλαδή, υπάρχουν $x, t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$x,\ x+t,\ x+2t, \dots,\ x+(k-1)t \in E.$$