ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Παράδοση: Παρασκευή 7 Δεκεμβρίου (κάθε μέρα καθυστέρησης -10%).
Παραδώστε τις ασκήσεις 2, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 10 αλλιώς την 9.

(**1**) Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty)$, και $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ με $\|K\|_{L^1} = 1$. Για $\varepsilon > 0$ θέτουμε $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} K(x/\varepsilon)$. Δείξτε ότι $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f * K_\varepsilon\|_{L^p} = 0$. Δείξτε επίσης ότι δεν ισχύει το ίδιο για $p = +\infty$.

(**2**) (**i**) Εαν $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ θέτουμε $(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι η $f * g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(**ii**) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $e \in L^1(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε $f * e = f$ σχεδόν παντού για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(**3**) Εάν X είναι μη κενό σύνολο, όριζουμε την συνολοσυνάρτηση $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ με τύπο $\mu(E) = |E|$ όπου $|E|$ είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου E. Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο, και ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο αν και μόνο αν το σύνολο X είναι αριθμήσιμο.

(**4**) Έστω m_* το εξωτερικό μέτρο *Lebesgue* στον $\mathbb{R}^d$ και E *Lebesgue* μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}^d$ (όχι υποχρεωτικά μετρήσιμο) έχουμε

$$m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c).$$

(Κατά συνέπεια, κάθε *Lebesgue* μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι m_*-μετρήσιμο κατά *Καραθεοδωρή*. Επίσης και το αντίστροφο είναι σωστό, δες άσκηση 3 στο φυλλάδιο 2.)

(**5**) Έστω $\mathcal{A}_0$ άλγεβρα υποσυνόλων του χώρου X. Έστω μ μέτρο στην $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ το οποίο είναι σ-πεπερασμένο στην $\mathcal{A}_0$. Δείξτε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < +\infty$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $R \in \mathcal{A}_0$ ώστε $\mu(E \triangle R) \leq \varepsilon$.

(**6**) Έστω $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα κυλινδρικά σύνολα, και $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ το μέτρο *Bernoulli* που ορίσαμε στο μάθημα. Έστω επίσης $T\colon X \to X$ μετασχηματισμός με τύπο $T\big((x(n))_{n\in\mathbb{Z}}\big) = (x(n+1))_{n\in\mathbb{Z}}$.

(**i**) Δείξτε ότι εάν $A \in \mathcal{A}$ τότε $TA \in \mathcal{A}$ και $\mu(TA) = \mu(A)$.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι το ζητούμενο ισχύει όταν το A είναι κυλινδρικό σύνολο.

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^n B) = \mu(A) \cdot \mu(B) \qquad (T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T).$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι το ζητούμενο ισχύει όταν τα A, B είναι κυλινδρικά σύνολα.

(**7**) Έστω $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ ένα μέτρο όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι η σ-άλγεβρα των *Borel* υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι υπάρχει διακριτό μέτρο μ_1 (δηλαδή $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$ για κάποια $x_n \in \mathbb{R}^d$, $a_n \in \mathbb{R}_+$) και συνεχές μέτρο μ_2 (δηλαδή $\mu_2(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$) έτσι ώστε $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

(**8**) Έστω $\mu\colon \mathcal{B}([0,1)) \to [0,1]$ ένα μέτρο όπου $\mathcal{B}([0,1))$ είναι η σ-άλγεβρα των *Borel* υποσυνόλων του $[0,1)$. Ορίζουμε $\hat{\mu}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}\, d\mu(t)$.[1]

(**i**) Εάν $x \in [0,1)$ δείξτε ότι

$$\mu(\{x\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n x} \hat{\mu}(n).$$

(**ii**) Δείξτε ότι το μέτρο μ είναι συνεχές (δηλαδή $\mu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in [0,1)$) αν και μόνο αν

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |\hat{\mu}(n)|^2 = 0.$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $|\hat{\mu}(n)|^2 = \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\pi i n (t-s)}\, d\mu(t)\, d\mu(s)$.

(**9**) Εάν $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ ορίζουμε $\bar{d}(\Lambda) = \limsup_{N\to\infty} |\Lambda \cap [1,N]|/N$. Δείξτε ότι υπάρχει χώρος με μέτρο $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, αντιστρέψιμος μετασχηματισμός $T\colon X \to X$ που διατηρεί το μ (δηλαδή $\mu(TA) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$), και $A \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $\mu(A) = \bar{d}(\Lambda)$ και

$$\bar{d}\big(\Lambda \cap (\Lambda + n_1) \cap \cdots \cap (\Lambda + n_\ell)\big) \geq \mu(A \cap T^{n_1} A \cap \cdots \cap T^{n_\ell} A)$$

για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$, και $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη: Υποθέστε πρώτα ότι όλα τα $\limsup$ που σας εμφανίζονται είναι κανονικά όρια. Πάρτε $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $A = \{x \in X\colon x(0) = 1\}$, T όπως στην άσκηση (6), ορίστε το μέτρο μ κατάλληλα στα κυλινδρικά σύνολα, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα επέκτασης του *Καραθεοδωρή-Kolmogorov* για να επεκτείνετε το μ στην σ-άλγεβρα που παράγεται από τα κυλινδρικά σύνολα. Σε αυτήν την περίπτωση η ζητούμενη ανισότητα είναι ισότητα.

(**10**) Έστω $f\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ μετρήσιμη.

(**i**) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cdot f(x,z)\, dx\, dy\, dz \geq \Big(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy \Big)^2.$$

(**ii**)$^\spadesuit$ Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cdot f(x,w) \cdot f(z,y)\, dx\, dy\, dz\, dw \geq \Big(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy \Big)^3.$$

---

[1] Αυτό ισούται με $\int_0^1 \cos(2\pi n t)\, d\mu(t) - i \int_0^1 \sin(2\pi n t)\, d\mu(t)$, αλλά δεν θα σας χρειαστεί αυτή η ισότητα.