ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Διάρκεια: 4 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες.

(i) Δείξτε ότι υπάρχουν $k_n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $m(|f_n|/k_n > 1/n) \leq 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχουν $k_n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $f_n/k_n \to 0$ σχεδόν παντού.

(**2**) (3 Μονάδες) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} m(|f_n| \geq \varepsilon) = 0$.

(i) Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ σχεδόν παντού;

(ii) Δείξτε ότι υπάρχουν $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}$ συγκλίνει σχεδόν παντού.

(iii) Εάν επιπλέον $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) < +\infty$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = 0$.

(**3**) (1.5 Μονάδες) Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ σύνολα με θετικό εξωτερικό μέτρο. Δείξτε ότι το σύνολο $A \times B$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν τα A, B είναι μετρήσιμα. Σε αυτή την περίπτωση, δείξτε ότι $m_{\mathbb{R}^2}(A \times B) = m_{\mathbb{R}}(A) \cdot m_{\mathbb{R}}(B)$.

(**4**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f \in C(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα και $K \in L^1(\mathbb{R})$ με $K \geq 0$ και $\|K\|_1 = 1$. Για $\varepsilon > 0$ θέτουμε $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} K(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|f - f * K_\varepsilon\|_\infty = 0$.

(**5**) (1.5 Μονάδες) Έστω μ, ν (θετικά) πεπερασμένα μέτρα σε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι $\mu \ll \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε εαν $A \in \mathcal{A}$ και $\nu(A) \leq \delta$ τότε $\mu(A) \leq \varepsilon$.

(**6**) (2.5 Μονάδες) (i) Εάν $E, E' \subset [0,1]$ μετρήσιμα τέτοια ώστε $m(E \cap [0,x]) = m(E' \cap [0,x])$ για κάθε $x \in [0,1]$, δείξτε ότι $m(E \triangle E') = 0$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχουν $E, E' \subset [0,1]$ τέτοια ώστε $m^*(E \cap [0,x]) = m^*(E' \cap [0,x])$ για κάθε $x \in [0,1]$, όμως $m^*(E \triangle E') > 0$.
