ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2022
Παράδοση: Τρίτη 1 Νοεμβρίου (κάθε μέρα καθυστέρησης -10%).
Παραδώστε τις ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 2 αλλιώς την 1.

(**1**) Είναι γνωστό (θεώρημα *Dirichlet*) ότι για κάθε άρρητο x υπάρχουν άπειροι ρητοί p/q (p, q είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε $|x - p/q| \leq 1/q^2$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί p/q (p, q είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε $|x-p/q| \leq 1/(q^2(\log q)^2)$.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της Ασκησης 6 (ii) από το Φυλλάδιο 1.

(**2**)$^{\spadesuit}$ (**i**) Δείξτε ότι το ανοιχτό μοναδιαίο τετράγωνο δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων.

(**ii**) Δείξτε ότι κάθε παραλληλόγραμμο μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων και ενός συνόλου μέτρου 0.

(**3**) Έστω $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στροφή.

(**i**) Χρησιμοποιήστε το δεύτερο μέρος της προηγούμενης άσκησης για να δείξετε ότι $m(I) = m(R(I))$ για κάθε παραλληλόγραμμο I.

(**ii**) Συμπεράνετε ότι $m(E) = m(R(E))$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}^2$.

(**4**) Έαν V είναι το σύνολο $Vitali$, δείξτε ότι $m_*([0,1] \setminus V) = 1$. Συμπεράνετε ότι εάν $E_1 = V$ και $E_2 = [0,1] \setminus V$, τότε $m_*(E_1 \cup E_2) < m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

(**5**) (**i**) Έαν $E_1, E_2, \ldots$ είναι υποσύνολα του $[0,1]$ τέτοια ώστε $E_n \subset E_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m_*(E_n)$.

(**ii**) Κατασκευάστε (μη μετρήσιμα) υποσύνολα $E_1, E_2, \ldots$ του $[0,1]$ τέτοια ώστε $E_{n+1} \subset E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $m_*(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} m_*(E_n)$.

(**6**) Κατασκευάστε διαμέριση $E_1, E_2, \ldots$ του $[0,1]$ και $s_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k + s_k)$.

(**7**) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $f^{-1}((-\infty, r))$ είναι μετρήσιμο για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι μετρήσιμη;

(**ii**) Έστω $f_t\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, συνεχείς συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση $\sup_{t\in[0,1]} f_t$ πάντα συνεχής; Μετρήσιμη;

(**iii**) Έστω $f_t\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση $\sup_{t\in[0,1]} f_t$ πάντα μετρήσιμη;

---

(8) **(i)** Έστω $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \text{ υπάρχει ή είναι } \ \pm\infty\}$$

είναι μετρήσιμο.

(ii) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}\colon f'(x) \ \text{ υπάρχει ή είναι } \ \pm\infty\}$$

είναι μετρήσιμο και η συνάρτηση $f'\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.

---

(9) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε κάθε συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ που ταυτίζετε με την f σχεδόν παντού είναι παντού ασυνεχής.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της Ασκησης 9 από το Φυλλάδιο 2.

---

(10) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι γνωστό ότι έαν η f είναι συνεχής τότε είναι γραμμική. Στόχος αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το ίδιο με την ποιό ασθενή υπόθεση ότι η f είναι μετρήσιμη.

(i) Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0, τότε η f είναι συνεχής στο 0, και συνεπώς γραμμική.

(ii) Δείξτε ότι έαν η f είναι μετρήσιμη τότε είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0 (Κάντε χρήση της Ασκησης 6 (*ii*) από το Φυλλάδιο 2.). Συμπεράνετε ότι η f είναι γραμμική.