

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό Εξάμηνο 2011

Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) (i) Δώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου υποσύνολου του \mathbb{R} και εξηγήστε πότε ένα υποσύνολο του \mathbb{R} είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείξτε ότι εάν A είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο των πραγματικών τότε υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E τέτοιο ώστε $A \subset E$ και $m(E) = m^*(A)$.

(2) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν

(i) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ το σύνολο $\{x: f(x) > r\}$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m(\{x: f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon$.

(3) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε την συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_{-\infty}^x f$.

(i) Δείξτε ότι η F είναι συνεχής.

(ii) Είναι σε όλες τις περιπτώσεις η F παντού παραγωγίσιμη; Παραγωγίσιμη σχεδόν παντού;

(4) (i) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) με $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού και $\int_0^1 f_n \rightarrow +\infty$.

(ii) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \sin(\frac{x}{n})}{x} dx$$

(5) (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) e^{-nx^2} dx = 0.$$

(ii) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x) < \infty$$

σχεδόν παντού. (Χρησιμοποιήστε, χωρίς απόδειξη, ότι $\int f(ax) dx = a^{-1} \int f(x) dx$.)