

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Σεπτέμβριος 2015

Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!!

-
- (1) Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη επεξήγηση.
- (i) Εάν $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο, τότε υπάρχει ανοιχτό O ώστε $E \subset O$ και $m(O \setminus E) = 0$.
- (ii) Εάν A είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbb{R} , τότε υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E τέτοιο ώστε $A \subset E$ και $m(E) = m^*(A)$.
- (iii) Εάν A είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbb{R} , τότε υπάρχει ακολουθία μετρήσιμων συνόλων (E_n) τέτοια ώστε $A \subset E_n$ και $m^*(E_n \setminus A) \leq 1/n$.

-
- (2) (i) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) = 0$. Δείξτε ότι το συμπλήρωμα του E είναι πυκνό στο \mathbb{R} .
- (ii) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $f = g$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

-
- (3) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε την συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_{-\infty}^x f$.

- (i) Δείξτε ότι η F είναι συνεχής.
- (ii) Είναι σε όλες τις περιπτώσεις η F παντού παραγωγίσιμη; Παραγωγίσιμη σχεδόν παντού;

-
- (4) (i) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2 + 1}$$

είναι ολοκληρώσιμη.

- (ii) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{|\sin\left(\frac{x}{n}\right)|}{x^2 + 1} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{n|\sin\left(\frac{x}{n}\right)|}{x^2 + 1} dx.$$

-
- (5) (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θετική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax) dx = a^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

- (ii) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θετική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x) < \infty$$

σχεδόν παντού.
