Πραγματική Ανάλυση

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια 2.5 ώρες.

(**1**) (2 μονάδες) Στα παρακάτω ερωτήματα απαντήστε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη αιτιολόγηση.

(i) Για κάθε $E \subset [0,1]$ ισχύει ότι $m^*([0,1] \setminus E) = 1 - m^*(E)$.

(ii) Εάν $E \subset [0,1]$ και $m^*(E) = 1$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

(iii) Εάν $E \subset [0,1]$ και $m^*([0,1] \setminus E) = 0$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

(**2**) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι υπάρχει **ανοιχτό** υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο περιέχει τους ρητούς και έχει μέτρο μικρότερο του 1.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει **κλειστό** υποσύνολο των άρρητων το οποίο έχει μέτρο 2021.

(**3**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ μετρήσιμη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Είναι η g παντού συνεχής; Παραγωγίσιμη; Σχεδόν παντού παραγωγίσιμη;

(ii) Εάν $m(E) = 0$, δείξτε ότι $m(g(E)) = 0$.

(**4**) (2 μονάδες) (i) Έστω ότι $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n^2}^{n^2} f(x)\,e^{-\frac{x^2}{n}}\,dx.$$

(ii) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $m(E) < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_E(nx)}{n} < +\infty$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**5**) (3 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int f(t)\,\sin(xt)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη, συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(iii) Εάν η $tf(t)$ είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και υπολογίστε την παράγωγό της.
