Πραγματική Ανάλυση

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2021
Διάρκεια 2.5 ώρες.

(**1**) (2.5 μονάδες) Έστω $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = g$ σχεδόν παντού.

Στα παρακάτω ερωτήματα απαντήστε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη αιτιολόγηση.

(i) Εάν οι f, g είναι συνεχείς, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(ii) Εάν η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη, τότε και η g είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

(iii) Εάν η f είναι μετρήσιμη, τότε και η g είναι μετρήσιμη.

(**2**) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι υπάρχει **μη** μετρήσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f^2 είναι μετρήσιμη.

(ii) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει **μη** μετρήσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε η f^2 είναι μετρήσιμη.

(**3**) (2.5 μονάδες) (i)Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m(E) > 0$ και $m(E \cap (a,b)) \leq \frac{1}{2}(b-a)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $m(E) > 0$ και $m(E \cap (a,b)) < (b-a)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(**4**) (2.5 μονάδες) (i) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx.$$

(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (2^n x)^2}\, dx.$$

(**5**) (1.5 μονάδες) Έστω $E \subset [0,1]$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε

$$\int_E x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Δείξτε ότι $m(E) = 0$.
