Πραγματική Ανάλυση

Πρόοδος 2022
Διάρκεια 2 ώρες.
Καλή επιτυχία!

(**1**) (2.5 μονάδες) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ και $r > 0$. Ορίζουμε $rE = \{rx \colon x \in E\}$.

(i) Δείξτε ότι $m_*(rE) = rm_*(E)$.

(ii) Εάν το E είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι και το rE είναι μετρήσιμο.

(**2**) (3 μονάδες) (i) Δείξτε ότι υπάρχει **κλειστό** υποσύνολο των άρρητων στο $[0, 1]$ το οποίο έχει μέτρο $1/2$.

(ii) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει **κλειστό** υποσύνολο των άρρητων στο $[0, 1]$ με μέτρο 1.

(iii) Εξετάστε αν υπάρχει σύνολο F_σ το οποίο είναι υποσύνολο των άρρητων στο $[0, 1]$ και έχει μέτρο 1. (Ένα σύνολο είναι F_σ εάν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών.)

(**3**) (3 μονάδες) (i) Έστω $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ το σύνολο $\{f > r\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει **μη** μετρήσιμη συνάρτηση $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{f = a\}$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(iii) Έστω $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ μία οποιαδήποτε αρίθμηση των ρητών. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x + r_n) = 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**4**) (3 μονάδες) (i) Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο O του $[0, 1]$ το οποίο περιέχει τους ρητούς στο $[0, 1]$ και έχει μέτρο γνήσια μικρότερο του 1.

(ii) Εάν O όπως στο (i), δείξτε ότι η συνάρτηση $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \mathbf{1}_O(x)$, $x \in [0, 1]$, **δεν** είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(iii) Δείξτε ότι εαν f όπως στο (ii), τότε **δεν** υπάρχει *Riemann* ολοκληρώσιμη $g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.
