Πραγματική Ανάλυση

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια 2.5 ώρες.

---

(1) (2 μονάδες) (i) Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n (1-\cos x)^2 \, dx.$$

(ii) Εαν $E \subset [0,1]$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι υπάρχει $c \in [0,1]$ ώστε

$$m(E \cap [0,c]) = m(E \cap [c,1]).$$

---

(2) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη.

(i) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{|f|\geq n} |f| = 0$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε εαν $E \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο και $m(E) \leq \delta$, τότε $\int_E |f| \leq \varepsilon$. (Υποθέστε πρώτα ότι η f είναι φραγμένη.)

---

(3) (2.5 μονάδες) (i) Εαν $E \subset \mathbb{R}$ και $c > 0$, δείξτε ότι $m^*(cE) = cm^*(E)$.

(ii) Εαν $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ είναι μετρήσιμη και $c > 0$, δείξτε ότι $\int f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int f(x)\,dx$.

(iii) Εαν $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη, υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} n^{2023} \int f(n^{2024}x)\,dx$.

---

(4) (2 μονάδες) Έστω $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2^n x)}{n}$, $x \in [0,2\pi]$, $N \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι για $N > M$ ισχύει $\int_0^{2\pi} |\sum_{n=M+1}^{N} \frac{\cos(2^n x)}{n}|^2\,dx \leq 2\pi \sum_{n=M+1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $f \in L^2([0,2\pi])$ ώστε $S_N \to f$ στον $L^2([0,2\pi])$ και υποακολουθία (N_k) ώστε $S_{N_k}(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $[0,2\pi]$.

---

(5) (3 μονάδες) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E) = 0$ και $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία ανοιχτών συνόλων τέτοια ώστε $E \subset O_n$ και $m(O_n) \leq \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{O_n}(x).$$

(i) Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη.

(ii) Ορίζουμε την $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Δείξτε ότι

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n \cap (-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Δείξτε ότι η F **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο E.
