ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2013
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 12 Μαρτίου.

(**1**) (1 μονάδα) Δείξτε ότι τα σημεία ασυνέχειας μίας αύξουσας συνάρτησης $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (και κατά συνέπεια μίας συνάρτησης κατανομής) είναι το πολύ αριθμήσιμα.

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $p_i \in (0,1)$ με $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, και $r_1, r_2, \ldots$ μία αρίθμηση των ρητών στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i\, \delta_{r_i}$. Αν F είναι η συνάρτηση κατανομής του $\mathbb{P}$, δείξτε ότι:

(**i**) Η F είναι γνησίως αύξουσα.

(**ii**) Η F είναι ασυνεχής στους ρητούς και συνεχής στους άρρητους.

(**3**) (1 μονάδα) Έστω $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ συνάρτηση κατανομής. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x))\, dx = a$.

(**4**) (1 μονάδα) Δείξτε ότι κάθε μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mathbb{P} = p\,\mathbb{P}_1 + (1-p)\mathbb{P}_2$$

όπου $\mathbb{P}_1$ συνεχές μέτρο πιθανότητας, $\mathbb{P}_2$ διακριτό μέτρο πιθανότητας, και $p \in [0,1]$.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω $\mathbb{P}$ μέτρο πιθανότητας στον χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \subset A$ συμπαγές ώστε $\mathbb{P}(A \setminus B) \leq \varepsilon$.

(**6**) (1 μονάδα) Έστω $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ δύο μέτρα πιθανότητας στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ με $P_1(A) \leq 1/2$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $1/2$ με $1/3$;

(**7**) (2 μονάδες) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_i)$, $i \in \mathbb{N}$, χώροι πιθανότητας, και $\mathbb{P} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_i$ το μέτρο γινόμενο στον χώρο $(\mathbb{R}^{\infty}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}))$. Έστω $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $B = \prod_{i=1}^{\infty} B_i$.

(**i**) Δείξτε ότι $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$.

(**ii**) Δείξτε ότι $\mathbb{P}(B) > 0$ αν και μόνο αν $\mathbb{P}_i(B_i) > 0$ για $i = 1, 2, \ldots$ και $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}_i(B_i)) < \infty$. Πότε έχουμε $\mathbb{P}(B) = 1$;