

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 21 Μαΐου.

(1) (1.5 μονάδες) Έστω F_n, F συναρτήσεις κατανομής με F συνεχή και $F_n \rightarrow F$ κατά σημείο. Δείξτε ότι $F_n \rightarrow F$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

(2) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_n \rightarrow^d \xi$ και $\eta_n \rightarrow^d \eta$.

(i) Εάν η η είναι σταθερή, δείξτε ότι $\xi_n + \eta_n \rightarrow^d \xi + c$.

(ii) Δείξτε ότι μπορεί να έχουμε $\xi_n + \eta_n \not\rightarrow^d \xi + \eta$.

(ii) Εάν οι ξ_n, η_n είναι ανεξάρτητες, και οι ξ, η είναι ανεξάρτητες, δείξτε ότι $\xi_n + \eta_n \rightarrow^d \xi + \eta$.

(3) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ξ, η ώστε $\xi - \eta \sim U[-1, 1]$.

(4) (1.5 μονάδες) Έστω ξ, ξ', ξ'' ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi^2 = 1$ και ξ', ξ'' ανεξάρτητες. Εάν $\xi \sim (\xi' + \xi'')/\sqrt{2}$ δείξτε ότι $\xi \sim N(0, 1)$.

(5) (1.5 μονάδες) Έστω ξ, η ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\xi + \eta \sim \xi$. Δείξτε ότι $\eta = 0$.

(6) (1.5 μονάδες) Έστω ξ_1, ξ_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi_i = 0$ και $\mathbb{E}\xi_i^2 \in (0, \infty)$. Δείξτε ότι

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{(\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{1/2}} \rightarrow^d N(0, 1).$$

(7) (1.5 μονάδες) Έστω ξ_1, ξ_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi_i = 0$ και $\mathbb{E}\xi_i^2 = 1$. Έστω d_1, d_2, \dots μη αρνητικοί αριθμοί ώστε $\max_{1 \leq i \leq n} d_i / (\sum_{i=1}^n d_i^2)^{1/2} \rightarrow 0$. Δείξτε ότι

$$\frac{\sum_{i=1}^n d_i \xi_i}{(\sum_{i=1}^n d_i^2)^{1/2}} \rightarrow^d N(0, 1).$$

$N(0, 1)$ είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

$U[-1, 1]$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 1]$.

Εάν οι ξ, η έχουν την ίδια κατανομή γράφουμε $\xi \sim \eta$.