ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 13 Απριλίου.

(**1**) (1 μονάδα) Έστω ότι οι ακολουθίες (ξ_n) και (ξ'_n) έχουν την ίδια από κοινού κατανομή. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια (δείξτε όμως ότι το άθροισμα δεν είναι υποχρεωτικά το ίδιο σχεδόν βέβαια).

(**2**) (1 μονάδα) Έστω (ξ_n) ασυσχέτιστες τ.μ. και b_n ακολουθία ώστε

$$\frac{b_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_n^2}} \to \infty.$$

Εαν $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, δείξτε ότι

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{b_n} \to^P 0.$$

(**3**) (2 μονάδες) Έστω (ξ_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία τ.μ. ώστε για κάθε επιλογή προσήμων $\pm$ (υπεραριθμήσιμες επιλογές) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \pm\xi_n$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια.

(**i**) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$ σχεδόν βέβαια.

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $c < 2$ μπορεί να έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^c = \infty$ σχεδόν βέβαια.

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τ.μ. με $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1/2$. Δείξτε ότι σχεδόν βέβαια το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της ακολουθίας

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{2n \log\log n}}$$

είναι το σύνολο $[-1, 1]$.

(**5**) (2 μονάδες) (**i**) Έστω $p_n > 0$. Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(p_1 + \cdots + p_n)^2} < \infty$.

(**ii**) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τ.μ. με $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p_n > 0$ και $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - p_n$. Εαν $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, δείξτε ότι σχεδόν βέβαια έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = 1.$$

(**6**) (2 μονάδες) Έστω $a \in (0, 1)$ και $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τ.μ. με $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = n^{-a}$ και $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - n^{-a}$. Ορίζουμε τα τυχαία σύνολα $S_a(\omega) = \{n \in \mathbb{N} \colon \xi_n(\omega) = 1\}$.

(**i**) Δείξτε ότι υπάρχει $C_a > 0$ ώστε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|S_a(\omega) \cap [1, N]|}{N^{1-a}} = C_a$$

σχεδόν βέβαια.

(**ii**) Δείξτε ότι εαν $a > 2/3$, τότε σχεδόν βέβαια το σύνολο $S_a(\omega)$ περιέχει πεπερασμένες αριθμητικές προόδους μήκους 3.
