ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2021
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τρίτη 11 Μαΐου.

(**1**) (1.5 μονάδες) Έστω F_n, F συναρτήσεις κατανομής με F συνεχή και $F_n \to F$ κατά σημείο. Δείξτε ότι $F_n \to F$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

(**2**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_n \to^d \xi$ και $\eta_n \to^d \eta$.

(**i**) Εάν η η είναι σταθερή, δείξτε ότι $\xi_n + \eta_n \to^d \xi + c$.

(**ii**) Δείξτε ότι μπορεί να έχουμε $\xi_n + \eta_n \not\to^d \xi + \eta$.

(**iii**) Εάν οι ξ_n, η_n είναι ανεξάρτητες, και οι ξ, η είναι ανεξάρτητες, δείξτε ότι $\xi_n + \eta_n \to^d \xi + \eta$.

(**3**) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ξ, η ώστε $\xi - \eta \sim U[-1, 1]$.

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω ξ, ξ', ξ'' ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi^2 = 1$ και ξ', ξ'' ανεξάρτητες. Εάν $\xi \sim (\xi' + \xi'')/\sqrt{2}$ δείξτε ότι $\xi \sim N(0, 1)$.

(**5**) (1.5 μονάδες) Έστω ξ, η ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\xi + \eta \sim \xi$. Δείξτε ότι $\eta = 0$. Εαν αφαιρέσουμε την υπόθεση ανεξαρτησίας ισχύει το ζητούμενο;

(**6**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi_i = 0$ και $\mathbb{E}\xi_i^2 \in (0, \infty)$. Δείξτε ότι

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{(\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{1/2}} \to^d N(0, 1).$$

(**7**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}\xi_i = 0$ και $\mathbb{E}\xi_i^2 = 1$. Έστω $d_1, d_2, \ldots$ μη αρνητικοί αριθμοί ώστε $\max_{1 \le i \le n} d_i / (\sum_{i=1}^n d_i^2)^{1/2} \to 0$. Δείξτε ότι

$$\frac{\sum_{i=1}^n d_i \xi_i}{(\sum_{i=1}^n d_i^2)^{1/2}} \to^d N(0, 1).$$

$N(0, 1)$ είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

$U[-1, 1]$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 1]$.

Υποθέτουμε ότι όλες οι τυχαίες μεταβλητές σε αυτό το φυλλάδιο είναι ολοκληρώσιμες.

Εάν οι ξ, η έχουν την ίδια κατανομή γράφουμε $\xi \sim \eta$.