

## ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Μεταπτυχιακό)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2021

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας πριν την Τετάρτη 26 Μαΐου.

(1) (1.5 μονάδες) Έστω  $\xi, \eta$  δύο  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{E}\xi^2, \mathbb{E}\eta^2 < \infty$  και  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$   $\sigma$ -άλγεβρα. Δείξτε ότι  $\mathbb{E}(\xi\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})) \geq (\mathbb{E}\xi)^2$  και  $\mathbb{E}(\xi\mathbb{E}(\eta|\mathcal{A})) = \mathbb{E}(\eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}))$ .

(2) (1.5 μονάδα) Έστω  $\xi$  μία  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$   $\sigma$ -άλγεβρες. Εάν η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την  $\xi$  και την  $\mathcal{A}_2$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{A}_1$ , δείξτε ότι  $\mathbb{E}(\xi|\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_2)$ .

(3) (1.5 μονάδα) Έστω  $\xi_1, \dots, \xi_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$  και  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Δείξτε ότι  $\mathbb{E}(\xi_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$ .

(4) (1.5 μονάδες) Έστω  $\xi_1, \xi_2, \dots$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 2) = 1/2$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , και

$$X_n = \xi_1 \cdots \xi_n.$$

Είναι γνωστό ότι η ακολουθία  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι *martingale*. Δείξτε ότι δεν υπάρχει τυχαία μεταβλητή  $\xi$  ώστε  $X_n = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_n)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

(5) (1.5 μονάδες) Έστω  $\xi_1, \xi_2, \dots$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$  για  $n \in \mathbb{N}$ . Υποθέτουμε ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdots b_n < \infty$  όπου  $b_n = \mathbb{E}\xi_n^2$ . Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_1 \cdots \xi_n$$

συγκλίνει σχεδόν βέβαια.

(6) (2.5 μονάδες) Έστω  $\xi_1, \xi_2, \dots$  μη αρνητικές, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με  $\mathbb{E}(\xi_n) = 1$  για  $n \in \mathbb{N}$ . Θέτουμε  $X_n = \prod_{i=1}^n \xi_i$ .

(i) Έστω ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - b_n) = \infty$  όπου  $b_n = \mathbb{E}(\xi_n^{1/2})$ . Δείξτε ότι  $X_n \rightarrow 0$  σχεδόν βέβαια.

(ii) Έστω  $\mathbb{P}(\xi_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = \mathbb{P}(\xi_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2}$ . Δείξτε ότι  $X_n \rightarrow 0$  σχεδόν βέβαια.