

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ II

Τελικό Διαγώνισμα-Σεπτέμβριος 2014-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) (2 Μονάδες) Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

(i) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = X^2$.

(ii) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}(X^2)$.

(2) (2.5 Μονάδες) Έστω X, Y τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \cdot \mathbf{1}_{0 \leq y < x \leq 1}.$$

(i) Υπολογίστε τις ποσότητες $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(XY)$. Είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες;

(ii) Υπολογίστε την δεσμευμένη πυκνότητα $f_{Y|X}(y|x)$ και την δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

(3) (2.5 Μονάδες) Έστω X τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t < 1.$$

(i) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}(X^{2014})$.

(ii) Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με ροπογεννήτρια όπως πριν. Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}((X + Y)^{2014})$.

(4) (2.5 Μονάδες) Έστω X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή κατανομή $U(0, 1)$. Θέτουμε

$$Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

(i) Βρείτε την συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y_n .

(ii) Δείξτε ότι $Y_n \xrightarrow{x.p.} 1$ και $Z_n \xrightarrow{x.p.} \frac{1}{2}$.

(5) (2 Μονάδες) Σωματίδιο κινείται σε ευθεία ως εξής: κάθε δευτερόλεπτο κινείται μία μονάδα δεξιά με πιθανότητα 0.45, μία μονάδα αριστερά με πιθανότητα 0.45, και παραμένει ακίνητο με πιθανότητα 0.1. Υποθέτουμε ότι η κάθε επιλογή (δεξιά, αριστερά, ή ακίνητο), είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες. Έστω $P_{m,n}$ η πιθανότητα μετά από n δευτερόλεπτα το σωματίδιο να έχει απομακρυνθεί το πολύ m μονάδες από το σημείο εκκίνησης.

(i) Για $m \in \mathbb{N}$ και μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα $P_{m,n}$.

(Η απάντησή σας πρέπει να είναι μία συνάρτηση των m, n .)

(ii) Για $m \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m,n}$.

(Η απάντησή σας πρέπει να είναι συγκεκριμένος αριθμός).
