

Στοχαστικές Ανελιξίες

Πρόοδος, Απρίλιος 2018

Διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.

Παρακαλώ παραδώστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το διακριτό σύνολο D και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = (p(x, y))_{x, y \in D}$. Υποθέτουμε ότι όλες οι δεσμευμένες πιθανότητες παρακάτω ορίζονται. Δείξτε ότι:

(i) $\mathbb{P}(X_{n+2} = y | X_n = x) = \sum_{z \in D} p(x, z) p(z, y)$ για κάθε $x, y \in D$.

(ii) $\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_0 = x) \geq \mathbb{P}(X_n = z | X_0 = x) \cdot \mathbb{P}(X_m = y | X_0 = z)$ για κάθε $x, y, z \in D$ και $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) Εάν η κατάσταση x είναι επαναληπτική και η κατάσταση y παροδική, τότε $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(2) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $D = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i) Εάν $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$, υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4)$.

(ii) Ποιές είναι οι κλάσεις επικοινωνίας; Ποιές είναι ανοιχτές/κλειστές, επαναληπτικές/παροδικές;

(iii) Υπολογίστε τα $\mathbb{P}(X_n = 3)$ για άπειρα $n \in \mathbb{N} | X_0 = 4$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$.

(3) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα τίμιο νόμισμα ώστε να έρθει ΚΚ.

(4) Παίζουμε ένα τυχερό παιχνίδι όπου σε κάθε γύρο κερδίζουμε 1€ με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και χάνουμε 1€ με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Ξεκινάμε με 100€ και σταματάμε είτε αν χάσουμε όλα τα χρήματά μας είτε αν τα διπλασιάσουμε. Υπολογίστε την πιθανότητα να βγούμε κερδισμένοι.

Στοχαστικές Ανελιξίες

Πρόοδος, Απρίλιος 2018

Διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.
Παρακαλώ παραδώστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το διακριτό σύνολο D και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = (p(x, y))_{x, y \in D}$. Υποθέτουμε ότι όλες οι δεσμευμένες πιθανότητες πρακτάτω ορίζονται. Δείξτε ότι:

(i) $\mathbb{P}(X_{n+2} = y | X_n = x) = \sum_{z \in D} p(x, z) p(z, y)$ για κάθε $x, y \in D$.

(ii) $\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_0 = x) \geq \mathbb{P}(X_n = z | X_0 = x) \cdot \mathbb{P}(X_m = y | X_0 = z)$ για κάθε $x, y, z \in D$ και $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) Εάν η κατάσταση x είναι επαναληπτική και η κατάσταση y παροδική, τότε $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(2) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $D = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(i) Εάν $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$, υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4)$.

(ii) Ποιές είναι οι κλάσεις επικοινωνίας; Ποιές είναι ανοιχτές/κλειστές, επαναληπτικές/παροδικές;

(iii) Υπολογίστε τα $\mathbb{P}(X_n = 4$ για άπειρα $n \in \mathbb{N} | X_0 = 3)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 2)$.

(3) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα τίμιο νόμισμα ώστε να έρθει ΓΚ (με αυτή τη σειρά).

(4) Παίζουμε ένα τυχερό παιχνίδι όπου σε κάθε γύρο κερδίζουμε 1€ με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και χάνουμε 1€ με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Ξεκινάμε με 100€ και σταματάμε είτε αν χάσουμε όλα τα χρήματά μας είτε αν τα διπλασιάσουμε. Υπολογίστε την πιθανότητα να βγούμε κερδισμένοι.
