ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΠΑΡΙ ΠΑΜΦΙΛΟΥ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ
ΠΑΝ. ΚΡΗΤΗΣ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ
Εκδόσεις Τροχαλία
Γριβαίων 5 (Πάροδος Σκουφά 64)
10 680 Αθήνα Τηλ. 36 46 426

Στην Αννα

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Οιον μεν τινα τουτον εχεις επιμαστον αλητην,
σιτου και οινου κεχρημενον, ουδε τι εργων
εμπαιον ουδε βιης, αλλ αυτως αχθος αρουρης.
Οδυσσεια Υ 377

Οι σημειωσεις αυτες χρησιμοποιηθηκαν αρκετες φορες στο μαθημα "εισαγωγη στην γεωμετρια" που διδαξα στο πανεπιστημιο Κρητης. Αν και ειναι πολυ συντομες και απαιτουν αρκετη δουλεια απο τον αναγνωστη, ελπιζω να βοηθησουν σε καποιο προσανατολισμο των ενδιαφερομενων. Η ελληνικη βιβλιογραφια ειναι, δυστυχως, πολυ περιορισμενη.

Ξεκινω με μια ανασκοπηση των αξιωματων της Ευκλειδειας γεωμετριας και των "Στοιχειων" του Ευκλειδη. Στοχος μου ειναι να εξετασω τις μη-Ευκλειδειες γεωμετριες με τα μεσα της Ευκλειδειας. Τουτο ειναι δυνατον διοτι για καθε μια τετοια γεωμετρια μπορουν να ορισθουν "μοντελα" τα οποια ικανοποιουν τα αξιωματα της αντιστοιχης γεωμετριας. Τα μοντελα ειναι ειτε υποσυνολα του Ευκλειδειου χωρου ειτε πιο αφηρημενα συνολα (προβολικο επιπεδο) που σχετιζονται μ αυτον.

Αντι της χρησης συγκεκριμενου μοντελου θα μπορουσε κανεις να κανει αξιωματικη αναπτυξη της αντιστοιχης γεωμετριας. Και οι δυο μεθοδοι παρουσιαζουν προτερηματα και μειονεκτηματα. Η αξιωματικη (ή συνθετικη) μεθοδος δινει βαθεια αισθηση της επαγωγικης δομης και των ιδιαιτερων χαρακτηριστικων της αντιστοιχης γεωμετριας, ειναι ομως χρονοβορα. Αντιθετα, η χρηση μοντελου τονιζει καποια κοινα στοιχεια μεταξυ των διαφορων γεωμετριων και επιτρεπει γρηγορη προσβαση σε ουσιαστικα αποτελεσματα. Η τελευταια μεθοδος, εκτος του οτι ειναι πιο κοντα στον συγχρονο τροπο της ερευνας, παρουσιαζει ιδιαιτερο ενδιαφερον για την δικη μας παραδοση: Προσφερεται για ωραιοτατες εφαρμογες ειδικων κεφαλαιων της Ευκλειδειας γεωμετριας.

Σε πολλα σημεια του χειρογραφου ειχα καταγραψει παραθεματα αρχαιων και νεωτερων δασκαλων απο παραλληλα διαβασματα μου. Αποφασισα να τα διατηρησω και δω. Αποτελουν κι αυτα ενα ειδος Σχηματων (Σχημα: αντιθετο του Ασχημου) μιας ανωτερης γεωμετριας που επεκτεινει και ωμορφαινει την Ευκλειδεια.

Ηρακλειο, Αυγουστος 1989

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

αυη ψυχη σοφωτατη και αριστη
Ηρακλειτος 88.

1. ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Διαφορες ιδιοσυγκρασιες, διαφορες αντιδρασεις, ισως, αλλα κατα βαθος δυο τρεις μανιες, που βαζουν σε κινηση ολοκληρο το λογικο τους συστημα. Αν κατορθωσης να επισημανεις τις μανιες (και δεν ειναι δυσκολο) μπορεις να πεις απο τα πριν τι θα σκεπτονται σ ολη τους τη ζωη.

Γ. Σεφερη Μερες Β, 9.7.1932

Μεσα στο πλεγμα των προτασεων της Ευκλειδειας γεωμετριας υπαρχουν ορισμενες απλες, των οποιων η αληθεια μας φαινεται τοσο προφανης που την δεχομαστε αναποδεικτα. Τετοιες προτασεις λεγονται **αξιωματα**. Στηριζομενοι σ ενα επαρκη αριθμο αξιωματων, μπορουμε ν αποδειξουμε ολες τις αλλες προτασεις. Μ αυτη την μεθοδο ανεπτυξε ο Ευκλειδης το υλικο που ειχε συγκεντρωσει στην εποχη του.

Σαν αξιωματα, ο Ευκλειδης, παιρνει ορισμενες προτασεις που υπαγορευονται απο την φυσικη εμπειρια. Χωρις να χρονοτριβηση στην θεμελιωση, προχωρα γρηγορα στην αναπτυξη του υλικου του. Η νεωτερη ερευνα βρηκε τα κενα και συμπληρωσε τα αξιωματα του σε ενα πληρες συστημα. Η αυστηρη θεμελιωση της γεωμετριας χρειαζεται την θεωρια συνολων και την εννοια του οριου, πραγματα που ξεκαθαριστηκαν 2.200 χρονια μετα τον Ευκλειδη. Τα κενα λοιπον, που αφησε ο Ευκλειδης, ειναι φυσιολογικα και δεν μπορουν να θιξουν την ωμορφια του σωματος των "Στοιχειων" του.

Ας δουμε τα αξιωματα του.

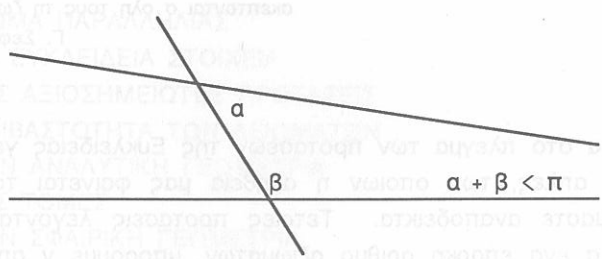
α) Ηιτησθω απο παντος σημειου επι παν σημειον ευθειαν γραμμην αγαγειν.
(Απαιτησε, απο καθε σημειο και προς καθε αλλο σημειο, να αγεται ευθυγραμμο τμημα)

β) Και πεπερασμενην ευθειαν κατα το συνεχες επ ευθειας εκβαλειν.
(και πεπερασμενο ευθυγραμμο τμημα να προεκτεινεται επ απειρον)

γ) Και παντι κεντρω και διαστηματι κυκλον γραφεσθαι.
(και με τυχον κεντρο και τυχουσα ακτινα, να γραφεται κυκλος)

δ) Και πασας τας ορθας γωνιας ισας αλληλαις ειναι.
(και ολες οι ορθες γωνιες να ειναι ισες μεταξυ τους)

ε) Και εαν εις δυο ευθειας ευθεια εμπιπτουσα τας εντος και επι τα αυτα μερη γωνιας δυο ορθων ελασσονας ποιη εκβαλλομενας τας δυο ευθειας επ απειρον συμπιπτειν, εφ α μερη εισιν αι των δυο ορθων ελασσονες. (και εαν ευθεία, τεμνουσα δυο αλλες ευθειες, σχηματιζει εντος και επι τα αυτα μερη γωνιες με αθροισμα μικροτερο των δυο ορθων, τοτε οι δυο ευθειες τεμνονται, προς την μερια, προς την οποια το αθροισμα ειναι μικροτερο των δυο ορθων)



Αναμεσα στα διαφορα συστηματα αξιωματων που προταθηκαν στα τελη του προηγουμενου αιωνα, ιδιαιτερη θεση εχει αυτο του D.Hilbert, που ανεπτυξε στο βιβλιο του (*):

1.1 Για δυο οποιαδηποτε σημεια Α,Β υπαρχει μια ευθεια α που τα περιεχει.

1.2 Για δυο οποιαδηποτε σημεια Α,Β δεν υπαρχει παραπανω απο μια ευθεια, που τα περιεχει.

1.3 Καθε ευθεια περιεχει τουλαχιστον δυο σημεια. Υπαρχουν τουλαχιστον τρια σημεια μη κειμενα επ ευθειας.

1.4 Για καθε τριαδα, μη επ ευθειας κειμενων σημειων, υπαρχει παντοτε επιπεδο που τα περιεχει. Καθε επιπεδο περιεχει τουλαχιστον ενα σημειο.

1.5 Για καθε τριαδα μη επ ευθειας κειμενων σημειων υπαρχει το πολυ ενα επιπεδο που τα περιεχει.

1.6 Αν δυο σημεια Α,Β ευθειας ανηκουν σε επιπεδο α, τοτε και ολη η ευθεια που οριζουν τα Α,Β περιεχεται στο επιπεδο α.

1.7 Δυο επιπεδα α,β, που εχουν κοινο σημειο Α, εχουν ενα τουλαχιστον επι-

(*) D.Hilbert Grundlagen der Geometrie, B.G. Teubner 1977 πλεον κοινο σημειο Β.

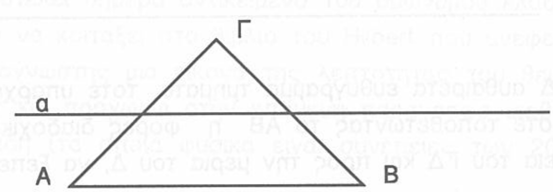
1.8 Υπαρχουν τεσσερα σημεια τουλαχιστον μη κειμενα στο αυτο επιπεδο.

2.1 Αν σημειο Β κειται μεταξυ των σημειων Α,Γ, τοτε τα Α,Β,Γ ειναι σημεια της αυτης ευθειας και το Β κειται επισης μεταξυ των Γ,Α.

2.2 Για καθε ζευγος σημειων Α,Β υπαρχει ενα τουλαχιστον σημειο Γ της ευθειας ΑΒ, ετσι ωστε το Β να κειται μεταξυ των Α,Γ.

2.3 Απο τρια σημεια ευθειας, το πολυ ενα, περιεχεται μεταξυ των δυο αλλων.

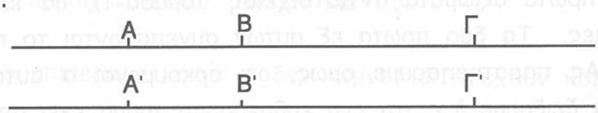
2.4 Αν ευθεια α διερχεται απο σημειο της πλευρας ΑΓ, τριγωνου ΑΒΓ, τοτε θα διερχεται και απο σημειο της ΑΒ ή της ΒΓ.



3.1 Αν Α,Β ειναι σημεια της ευθειας α και Α' σημειο της ευθειας α', τοτε υπαρχει σε καθε (απο το Α') ημιευθεια της α' σημειο Β' ετσι ωστε ΑΒ=Α'Β'.

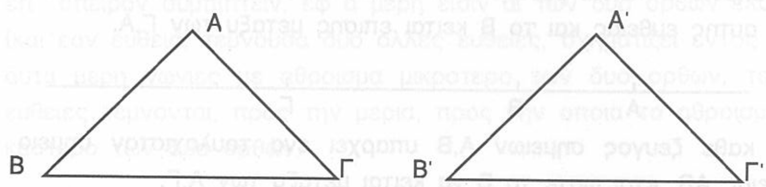
3.2 Δυο ευθυγραμμα τμηματα ισα προς τριτο, ειναι και μεταξυ τους ισα.

3.3 Εστω οτι τα ευθυγραμμα τμηματα ΑΒ,ΒΓ της ευθειας α εχουν κοινο μονον το Β. Εστω επισης οτι τα τμηματα Α'Β',Β'Γ' της ιδιας ή μιας αλλης ευθειας α' εχουν κοινο μονον το σημειο Β'. Αν ΑΒ=Α'Β' και ΒΓ=Β'Γ', τοτε και ΑΓ=Α'Γ'.

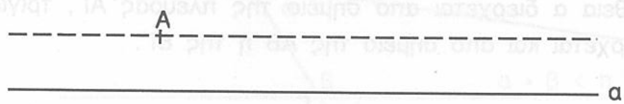


3.4 Εστω γωνια (η,θ) του επιπεδου ε και μια ημιευθεια η' απο το σημειο Ο του ιδιου ή διαφορετικου επιπεδου. Υπαρχει τοτε μια και μονον ημιευθεια θ' σε καθε ημιεπιπεδο εκατερωθεν της η', ετσι ωστε $\angle(\eta,\theta)=\angle(\eta',\theta')$. Καθε γωνια ειναι ιση με τον εαυτο της.

Αν για δυο τριγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ίσχυουν ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ', <ΒΑΓ=<Β'Α'Γ' τοτε ισχυει και η <ΑΒΓ=<Α'Β'Γ'.



4.1 Απο σημειο Α εκτος ευθειας α, αγεται μια το πολυ παραλληλος προς αυτην.



5.1 Αν ΑΒ, ΓΔ αυθαιρετα ευθυγραμμα τμηματα, τοτε υπαρχει φυσικος αριθμος η, ετσι ωστε τοποθετωντας το ΑΒ η φορες διαδοχικα απο το Α, πανω στην ευθεια του ΓΔ και προς την μερια του Δ, να ξεπερασουμε το Δ.

5.2 Το συνολο των σημειων ευθειας δεν επιδεχεται επεκταση με επι πλεον σημεια, ετσι ωστε να εξακολουθουν να ισχυουν τα προηγουμενα αξιωματα.

Τα 8 πρωτα αξιωματα **αντιστοιχειας** (ομαδα-1), θα ελεγε κανεις, ειναι προφανολογιες. Τα δυο πρωτα εξ αυτων συνεπαγονται το πρωτο αξιωμα του Ευκλειδη. Ας παρατηρησουμε ομως, οτι αρκουμενοι σ αυτα και μονον, δεν μπορουμε να δειξουμε λ.χ. οτι ενα ευθυγραμμο τμημα εχει απειρα σημεια ή οτι ενα επιπεδο εχει απειρα σημεια. Τουτο εξασφαλιζεται σε συνδυασμο με τα 4 επομενα αξιωματα **διαταξης** (ομαδα-2). Τα επομενα 5 αξιωματα **ισοτητας** (ομαδα-3) εξασφαλιζουν συνθηκες ισοτητας ευθυγραμμων τμηματων, γωνιων και τριγωνων. Επισης εξασφαλιζουν, μεταξυ αλλων, και την υπαρξη του μεσου ενος ευθυγραμμου τμηματος.

Το αξιωμα **παραλληλιας** 4.1 ειναι ισοδυναμο με το ε' αξιωμα του Ευκλειδη και θα του αφιερωσουμε μια ολοκληρη παραγραφο. Τελος, τα δυο τελευταια αξιωματα **συνεχειας** εκφραζουν, στην ουσια, οτι τα σημεια μιας ευθειας ευρισκονται σε αμφιμονοσημαντο αντιστοιχεια με τους πραγματικους αριθμους.

Με τα αξιωματα που παρεθεσα εδω, χρειαζεται αρκετη δουλεια για ν αποδειχθουν απλα πραγματα, που ο Ευκλειδης προσπερνα στην αναπτυξη του, θεωρωντας τα αυτονοητα. Υιοθετωντας αυτες τις 20 απλες προτασεις σαν αξιωματα πρεπει κατοπιν να αποδειξουμε ενα πληθος συνεπειων τους, οπως οτι μια ευθεια εχει απειρα σημεια, οτι υπαρχουν ορθες γωνιες, οτι ενας κυκλος εχει απειρα σημεια κ.τ.λ. Παρα το αυτονοητο των απλων τουτων προτασεων η αυστηρη αποδειξη τους, με την βοηθεια των αξιωματων δεν ειναι καθολου απλη. Δεν θα σταθω σε μια λεπτομερη αναλυση των **θεμελιων** της Γεωμετριας. Τουτο αποτελει σημερα αντικειμενο του ομωνυμου κλαδου και ο ενδιαφερομενος μπορει να κοιταξει στο βιβλιο του Hilbert που ανεφερα. Για να παρει ωστοσο ο αναγνωστης μια εικονα της λεπτοτητας του θεματος παραθετω μερικες προτασεις και προχωρω στην επομενη παραγραφο υιοθετωντας τα αξιωματα του Ευκλειδη (τα οποια φυσικα ειναι συνεπειες των 20 προηγουμενων αξιωματων).

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Καθε ζευγος σημειων οριζει μια ακριβως ευθεια που τα περιεχει.

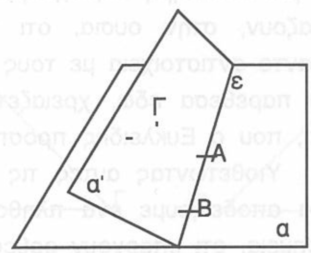
Τουτο ειναι αμεση συνεπεια των αξιωματων 1.1, 1.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Καθε τριαδα σημειων οριζει ενα ακριβως επιπεδο που τα περιεχει.

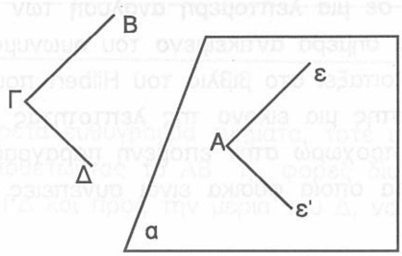
Κι αυτο ειναι αμεση συνεπεια των 1.4 και 1.5.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Δυο επιπεδα α και α' ή δεν τεμνονται ή εχουν κοινη μια ολοκληρη ευθεια.

Πραγματι, αν τα α,α' εχουν κοινο καποιο σημειο Α, τοτε, κατα το 1.7 θα εχουν κοινο και καποιο αλλο σημειο Β. Η ευθεια ε που οριζουν τα Α,Β θα ανηκει, κατα το 1.6, και στα δυο επιπεδα. Τελος, αν τα επιπεδα α,α' ειχαν και αλλο σημειο Γ κοινο, εκτος της ε, τοτε κατα το 1.5 θα ταυτιζονταν.



ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Καθε επιπεδο περιεχει 2 τουλαχιστον ευθειες.



Πραγματι, το επιπεδο α, κατα το 1.4, θα περιεχει ενα σημειο Α και κατα το 1.8 θα υπαρχουν τρια ακομη σημεια Β,Γ,Δ που δεν περιεχονται ολα σ ενα επιπεδο, αρα δεν περιεχονται ολα στο α. Το επιπεδο β που οριζουν τα Α,Β,Γ και το επιπεδο δ που οριζουν τα Α,Δ,Γ, τεμνουν το α κατα τις ευθειες ε και ε' (ΠΡ-3). Τουτες δεν μπορουν να συμπιπτουν. Πραγματι, αν συνεπιπταν, τοτε τα επιπεδα β και δ θα ειχαν τρια, μη επ ευθειας κειμενα, σημεια κοινα, αρα θα συνεπιπταν κι αυτα. Τοτε ομως τα σημεια Α,Β,Γ,Δ θα ηταν στο ιδιο επιπεδο, αντιθετα με την υποθεση.

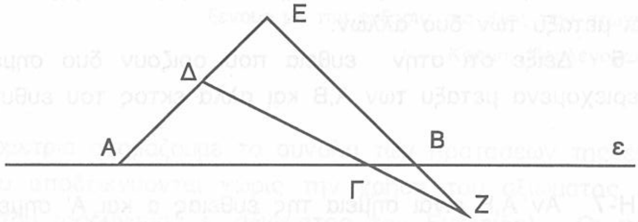
ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι δυο ευθειες ενος επιπεδου εχουν ενα ακριβως ή κανενα κοινο σημειο.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι ενα επιπεδο α και μια ευθεια ε, που δεν περιεχεται στο α εχουν το πολυ ενα κοινο σημειο.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι απο ευθεια και σημειο εκτος αυτης καθως και απο δυο τεμνομενες ευθειες περνα ενα ακριβως επιπεδο.

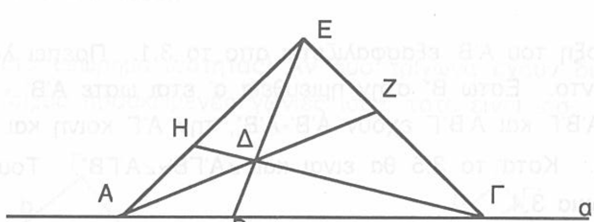
Τα αξιωματα μας επιτρεπουν να ορισουμε το ευθυγραμμο τμημα ΑΒ σαν το συνολο των σημειων που περιεχονται μεταξυ του Α και του Β. Μ αυτο το νοημα πρεπει να ερμηνευσουμε το αξιωμα 2.4. Τριγωνο ΑΒΓ σημαινει το συνολο των σημειων που περιεχονται στα τρια ευθυγραμμα τμηματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ. Με το αξιωμα αυτο μπορουμε να δειξουμε την υπαρξη σημειων στο ΑΒ:

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Καθε ευθυγραμμο τμημα ΑΒ περιεχει ενα τουλαχιστον επι πλεον σημειο Γ.



Πραγματι, εκτος της ευθειας ε, που περιεχει τα Α,Β, θα υπαρχει κατα το 1.3, σημειο Δ. Κατα το 2.1 θα υπαρχει σημειο Ε, ετσι ωστε το Δ να περιεχεται στο ΑΕ. Κατα το 2.1 παλι, θα υπαρχει σημειο Ζ , ετσι ωστε το Β να περιεχεται στο ΕΖ. Κατα το 2.4, η ΔΖ ως τεμνουσα του τριγωνου ΑΕΒ και μη συμπιπτουσα με την ευθεια των Ε,Β, θα τεμνει το ΑΒ σ ενα σημειο Γ.

ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Μεταξυ τριων σημειων Α,Β,Γ, ευθειας α, υπαρχει παντοτε ενα που ευρισκεται μεταξυ των δυο αλλων.

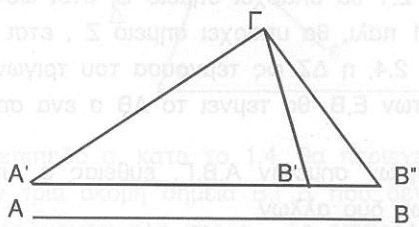


Πραγματι, εστω οτι το Α δεν ειναι μεταξυ των Β,Γ και το Γ δεν ειναι μεταξυ των Α,Β. Εστω Δ σημειο εκτος της ευθειας α των Α,Β,Γ. Κατα το 2.1 υπαρχει σημειο Ε, ετσι ωστε το Δ να περιεχεται στο ΒΕ. Κατα το 2.4, η ευθεια των Α,Δ, διερχομενη απο το σημειο Δ της πλευρας ΕΒ του τριγωνου ΕΒΓ θα διερχεται και απο σημειο Ζ της ΕΓ.Ομοιως εξασφαλιζουμε το Η επι της ευθειας των Δ,Γ και περιεχομενο στο ΑΕ. Η ΑΖ διερχεται απο το σημειο Ζ της ΕΓ, αρα το Δ ειναι μεταξυ των Γ,Η. Στο τριγωνο ΓΗΑ η ΕΔ διερχεται απο το Δ, μεταξυ των Η,Γ, αρα θα τεμνη την αλλη πλευρα του τριγωνου στο σημειο Β, που κατα το 2.4 θα περιεχεται στο ΑΓ.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι εκ τριων σημειων Α,Β,Γ υπαρχει ενα ακριβως που περιεχεται μεταξυ των δυο αλλων.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι στην ευθεια που οριζουν δυο σημεια Α,Β υπαρχουν σημεια περιεχομενα μεταξυ των Α,Β και αλλα εκτος του ευθυγραμμου τμηματος ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΗ-7 Αν Α,Β ειναι σημεια της ευθειας α και Α' σημειο της ευθειας α', τοτε υπαρχει σε καθε (απο το Α') ημιευθεια της α' ενα ακριβως σημειο Β' ετσι ωστε ΑΒ=Α'Β'.



Η υπαρξη του Α'Β' εξασφαλιζεται απο το 3.1. Πρεπει λοιπον να δειξουμε το μονοσημαντο. Εστω Β" στην ημιευθεια α' ετσι ωστε Α'Β' = Α'Β" = ΑΒ. Τοτε τα τριγωνα Α'Β'Γ και Α'Β"Γ εχουν Α'Β'=Α'Β", την Α'Γ κοινη και την γωνια στο Α' επισης κοινη. Κατα το 3.5 θα ειναι και ∠Α'ΓΒ'=∠Α'ΓΒ". Τουτο ομως αντιφασκει στο αξιωμα 3.4.

Ουτω δη πας επιστημων την υπερβολην μεν και την ελλειψιν φευγει, το δε μεσον ζητει και τουθ αιρειται, μεσον δε ου το του πραγματος αλλα το προς ημας. Αριστοτελους, Ηθικα Νικομαχεια ΙΙ, vi

2. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

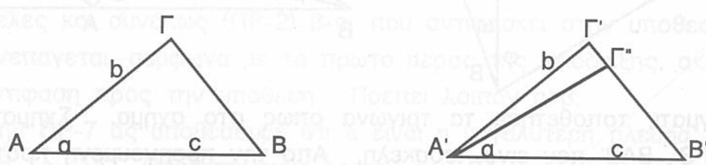
Των πολλων της βαρβαρωσεως των εθνων δυστυχιων ειναι και το, οχι μονον να μην αισθανωνται λυπην δι οσα εχασαν, αλλα μηδ εκεινων πλεον την αξιαν να γνωριζουν, εαν εμειναν ακομη εις αυτα μικρα λειψανα καλων, και να ταφινωσι καθημεραν απο τας χειρας των, δια να πλουτιζωσι τους ξενους με την αυξησιν της ιδιας των πτωχειας.

Κοραη, Προλεγομενα σ. 249

Απολυτο γεωμετρια ονομαζουμε το συνολο των προτασεων της ευκλειδειας γεωμετριας που αποδεικνυονται χωρις την χρηση του αξιωματος της παραλληλιας 4.1 (ή του ισοδυναμου ε' αξιωματος του Ευκλειδη). Οι προτασεις αυτες εχουν ιδιαιτερο ενδιαφερον διοτι ισχυουν τοσο στην Ευκλειδεια οσο και στην **υπερβολικη γεωμετρια**. Η γεωμετρια αυτη εχει τα ιδια ακριβως αξιωματα με την Ευκλειδεια πλην εκεινου της παραλληλιας. Οσα λοιπον θεωρηματα αποδεικνυονται με την βοηθεια των υπολοιπων αξιωματων, ισχυουν και στις δυο γεωμετριες.

Σ αυτη την παραγραφο θα εξετασουμε προτασεις της απολυτης γεωμετριας που αναφερονται στον Ευκλειδη και αλλες που οφειλονται στον γαλλο μαθηματικο Legendre (1752-1833).

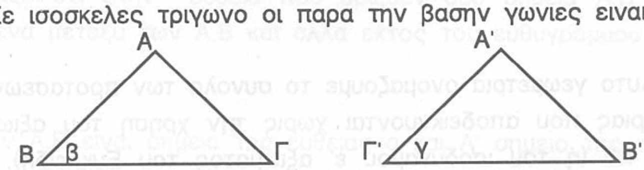
ΠΡΟΤΑΣΗ-1 (Πρωτο θεωρημα ισοτητας) Αν δυο τριγωνα εχουν δυο πλευρες ισες και τις αντιστοιχες προσκειμενες γωνιες ισες, τοτε ειναι ισα.



Πραγματι, ας υποθεσουμε οτι τα τριγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εχουν τις πλευρες ΑΓ=Α'Γ', ΑΒ=Α'Β' και τις γωνιες ∠ΓΑΒ=∠Γ'Α'Β'. Απο το αξιωμα 3.5 γνωριζουμε οτι και οι αλλες γωνιες θα ειναι αντιστοιχα ισες. Θα δειξουμε οτι και η τριτη πλευρα ΒΓ=Β'Γ' (δυο τριγωνα ειναι ισα οταν ολες οι πλευρες τους και ολες οι γωνιες τους ειναι αντιστοιχα ισες). Αν ηταν ΒΓ<Β'Γ', τοτε θα υπηρχε Γ'' επι της Γ'Β' ετσι ωστε Γ"Β'=ΓΒ. Τοτε τα τριγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ" πληρουν τις υποθεσεις της ΠΡ-1 για τις γωνιες ∠Β και ∠Β'. Συνεπως ειναι ισα. Τοτε ∠Α=∠Α'=∠Γ"Α'Β', που αντιφασκει στο αξιωμα 3.4. Αναλογα δεν μπορει Β'Γ'<ΒΓ. Αρα πρεπει ΒΓ=Β'Γ'. Με το ιδιο σχημα αποδεικνυεται και η επομενη προταση:

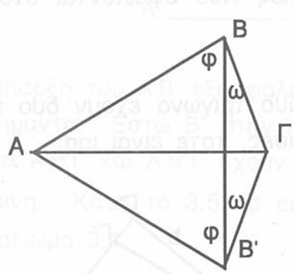
ΑΣΚΗΣΗ-1 (Δευτερο θεωρημα ισοτητας) Δυο τριγωνα που εχουν μια πλευρα και τις προσκειμενες σ αυτην γωνιες αντιστοιχα ισες ειναι ισα (τουτο σημαινει οτι αν τα τριγωνα ΑΒΓ,Α'Β'Γ' εχουν λ.χ. ∠Α=∠Α', ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ',ειναι ισα).

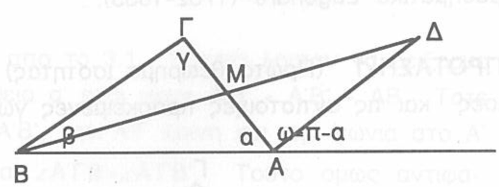
ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Σε ισοσκελες τριγωνο οι παρα την βασην γωνιες ειναι ισες.



Πραγματι, θεωρησε δυο αντιτυπα του ιδιου τριγωνου ΑΒΓ, Α'Β'Γ'. Για τα δυο τριγωνα θα εχουμε ∠Α=∠Α', ΑΒ=Α'Γ', ΑΓ=Α'Β' (σαν ισα ισοσκελη τριγωνα). Κατα την ΠΡ-1 λοιπον θα ειναι και οι αλλες γωνιες ∠Γ=∠Β' και ∠Β=∠Γ'.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 (Τριτο θεωρημα ισοτητας) Εαν τα τριγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εχουν τις πλευρες τους μια προς μια ισες, τοτε ειναι ισα.





Πραγματι, τοποθετησε τα τριγωνα οπως στο σχημα. Σχηματιζονται τα τριγωνα ΒΓΒ', ΒΑΒ' που ειναι ισοσκελη. Απο την προηγουμενη προταση συναγεται οτι ∠Β=∠Β'. Εφαρμοζοντας τωρα την ΠΡ-1 εχουμε το ζητουμενο.

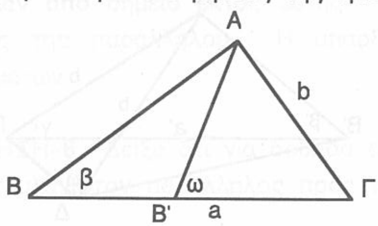
ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Σε καθε τριγωνο η εξωτερικη γωνια π-α ειναι μεγαλυτερα καθε μιας απο τις δυο εσωτερικες και απεναντι (ω>β και ω>γ στο δευτερο σχημα). Πραγματι, εστω Μ το μεσον της ΓΑ και Δ στην προεκταση του ΒΜ ετσι ωστε ΒΜ=ΜΔ. Η υπαρξη του μεσου και το οτι το Δ ειναι απο την ιδια μερια της ευθειας ΑΒ αποδεικνυεται απο τα αξιωματα και τα θεωρουμε δεδομενα. Τα τριγωνα ΒΜΓ και ΜΑΔ ειναι ισα, ως εχοντα δυο πλευρες ισες (ΜΓ=ΜΑ και ΒΜ=ΜΔ εκ κατασκευης) και τις περιεχομενες γωνιες ισες (∠ΓΜΒ=∠ΑΜΔ κατα κορυφην). Συνεπως θα ισχυει και γ=∠ΓΑΔ που περιεχεται μεσα στην ω, αρα ειναι μικροτερη.

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Σε καθε τριγωνο το αθροισμα δυο εσωτερικων γωνιων του ειναι μικροτερο του π (δυο ορθων).

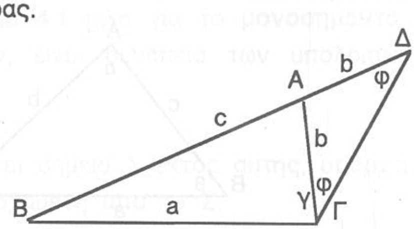
Πραγματι, συμφωνα με την προηγουμενη προταση γ<π-α, αρα γ+α<π.

ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Αν a,b,c συμβολιζουν τα μηκη των πλευρων τριγωνου και α,β,γ συμβολιζουν τις απεναντι γωνιες, τοτε a>b συνεπαγεται α>β και αντιστροφως.

ΠΡΟΤΑΣΗ-7 Σε καθε τριγωνο το αθροισμα των μηκων δυο πλευρων του ειναι μεγαλυτερο του μηκους της τριτης πλευρας.



σχ. 1



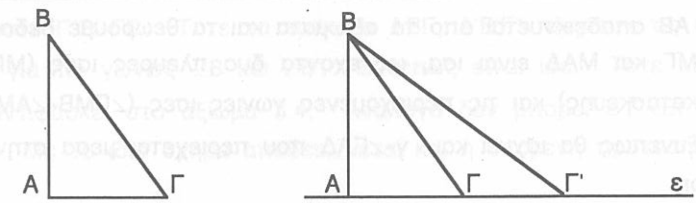
σχ. 2

Για την ΠΡ-6 ας παρουμε σημειο Β' στην ΒΓ, ετσι ωστε Β'Γ=ΑΓ=b (σχ.1). Κατα την ΠΡ-4 ω>β, ομως στο ισοσκελες ΑΓΒ', ω=∠Β'ΑΓ<α, αρα α>ω>β. Για το αντιστροφο, ας υποθεσουμε οτι α>β και a=b ή a<b. Αν a=b τοτε το ΑΒΓ ειναι ισοσκελες και συνεπως (ΠΡ-2) β=α, που αντιφασκει στην υποθεση. Ομοιως a<b συνεπαγεται, συμφωνα με το πρωτο μερος της αποδειξης, α<β, που ειναι παλι αντιφαση προς την υποθεση. Πρεπει λοιπον a>b.

Για την ΠΡ-7 ας υποθεσουμε οτι a ειναι η μεγαλυτερη πλευρα. Αρκει να δειξουμε οτι c+b>a. Προεκτεινουμε λοιπον την ΒΑ κατα τμημα ΑΔ=ΑΓ (σχ.2). Στο τριγωνο ΒΓΔ η ∠Γ=γ+φ>φ=∠Δ, αρα, κατα την ΠΡ-6, c+b>a.

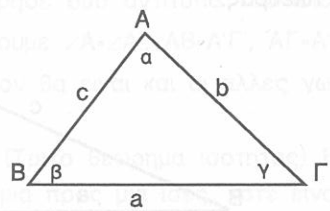
ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ η υποτεινουσα ΒΓ ειναι μεγαλυτερη καθε μιας εκ των δυο καθετων.

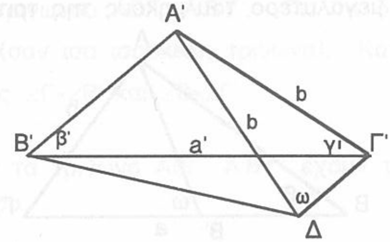
ΑΣΚΗΣΗ-3 Εστω ευθεια ε και ΑΒ καθετος στην ε στο σημειο της Α. Δειξε οτι για τα σημεια Γ,Γ' της ε με ΑΓ<ΑΓ' ισχυει ΒΓ<ΒΓ' και αντιστροφως.



ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι το ευθυγραμμο τμημα μεταξυ δυο σημειων Α,Β του επιπεδου εχει μικροτερο μηκος απο καθε αλλη τεθλασμενη μεταξυ των δυο σημειων.

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 Αν σε δυο τριγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' με πλευρες a,b,c και a',b',c' αντιστοιχως και γωνιες α,β,γ και α',β',γ' αντιστοιχως, ισχυουν b=b', c=c' και α<α' τοτε ισχυει a<a'.





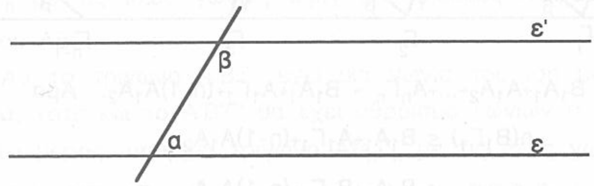
Υποθεσε οτι b≥c και τοποθετησε το ΑΒΓ επι του Α'Β'Γ' ετσι ωστε να συμπεσουν οι κορυφες Α,Α' και Β,Β'. Η ΑΓ παιρνει τη θεση Α'Δ και το Δ ευρισκεται απο την αλλη μερια της Β'Γ' απ οτι η Α' (γιατι;). Απο το ισοσκελες τριγωνο Α'ΔΓ' εχουμε $\angle$Β'Γ'Δ < ω < $\angle$Β'ΔΓ'. Κατα την ΠΡ-6 λοιπον, εφαρμοζομενη στο τριγωνο Β'ΔΓ', θα εχουμε a=Β'Δ<Β'Γ'=a'.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι η διαμεσος που ενωνει την κορυφη με την βαση ενος ισοσκελους τριγωνου ειναι ταυτοχρονα μεσοκαθετος και υψος του τριγωνου.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι αν δυο γωνιες τριγωνου ειναι ισες, τοτε το τριγωνο ειναι ισοσκελες.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε το αντιστροφο της ΠΡ-8. Δηλαδη, με τις υποθεσεις εκεινης της προτασης και την a<a', επεται για τις αντιστοιχες γωνιες α<α'.

ΠΡΟΤΑΣΗ-9 Αν δυο ευθειες ε,ε' τεμνονται απο τριτη ευθεια η, ετσι ωστε δυο (εντος και επι τα αυτα μερη) γωνιες α,β να ειναι παραπληρωματικες (α+β=π) τοτε οι ε,ε' ειναι παραλληλες (δηλαδη δεν τεμνονται).



Πραγματι, αν οι ε,ε' τεμνοντουσαν σε σημειο Γ, θα σχηματιζοταν ενα τριγωνο του οποιου οι δυο απο τις γωνιες του θα συνεπιπταν με τις α,β. Τουτο ομως ειναι ατοπο διοτι α+β=π αντιφασκει στην ΠΡ-5.

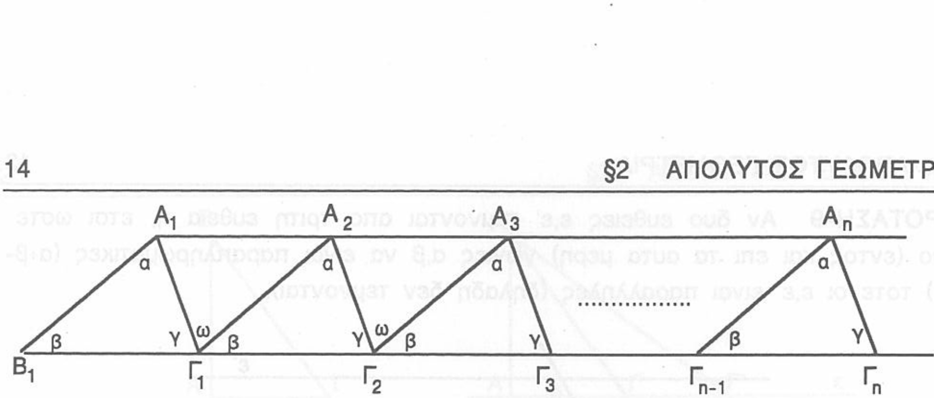
Με την βοηθεια της τελευταιας προτασης αποδεικνυεται η επομενη ασκηση η οποια εξασφαλιζει την **υπαρξη** μιας παραλληλου προς δοθησαν ευθειαν απο σημειο εκτος αυτης. Το αξιωμα 4.1 μιλα για το **μονοσημαντο** αυτης της παραλληλου. Η υπαρξη λοιπον, ειναι συνεπεια των υπολοιπων αξιωματων.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι για δοθησα ευθεια ε και σημειο Σ εκτος αυτης, υπαρχει μια τουλαχιστον παραλληλος προς την ε διερχομενη απο το Σ.

Ερχομαι τωρα στις ωραιες προτασεις του Legendre ο οποιος ευτυχισε να ολοκληρωσει δωδεκα εκδοσεις των στοιχειων του Ευκλειδη (1η το 1794 , 12η το 1823).

ΠΡΟΤΑΣΗ-10 Σε καθε τριγωνο το αθροισμα των τριων γωνιων του ειναι μικροτερο ή ισο απο δυο ορθες.

Πραγματι, ας παρουμε ενα τυχον τριγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ και ας υποθεσουμε οτι $A_1\Gamma_1 \le B_1\Gamma_1$. Προεκτεινουμε την ευθεια $B_1\Gamma_1$ και κατασκευαζουμε διαδοχικα ισα τριγωνα με το $A_1B_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_1\Gamma_2 = A_3\Gamma_2\Gamma_3 = \dots = A_n\Gamma_{n-1}\Gamma_n$.
Τοτε και τα επομενα τριγωνα θα ειναι ισα μεταξυ τους: $A_1\Gamma_1A_2 = A_2\Gamma_2A_3 = \dots$.
Επισης, το ευθυγραμμο τμημα $B_1\Gamma_n = nB_1\Gamma_1$ θα ειναι μικροτερο απο την πολυ-



γωνικη γραμμη $B_1A_1+A_1A_2+...+A_n\Gamma_n = B_1A_1+A_1\Gamma_1+(n-1)A_1A_2$. Αρα

$$n(B_1\Gamma_1) \leq B_1A_1+A_1\Gamma_1+(n-1)A_1A_2$$

$$\leq B_1A_1+B_1\Gamma_1+(n-1)A_1A_2 \quad \Rightarrow$$

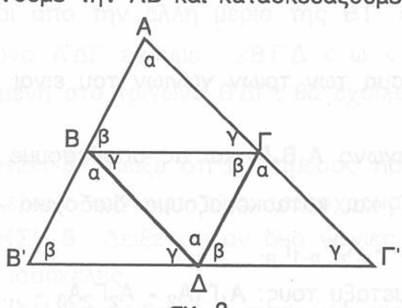
$$(n-1)(B_1\Gamma_1 - A_1A_2) \leq B_1A_1 . \quad (*)$$

Αν υποθεσουμε τωρα οτι $\alpha+\beta+\gamma>\pi$, τοτε επειδη $\beta+\gamma+\omega=\pi$, επεται $\alpha>\omega$, αρα κατα την ΠΡ-8, $B_1\Gamma_1>A_1A_2$ και επομενως $(B_1\Gamma_1 - A_1A_2)>0$. Τουτο ομως οδηγει σε ατοπο, διοτι τοτε η αριστερη πλευρα της (*) μπορει να γινει οσο μεγαλη θελουμε αρκει να παρουμε μεγαλο n. Στην (*) ομως, η B_1A_1 παραμενει σταθερα και ανεξαρτητη του n. Στο ατοπο καταληξαμε υποθετοντας $\alpha+\beta+\gamma>\pi$. Θα πρεπει λοιπον να ισχυει $\alpha+\beta+\gamma \leq \pi$.

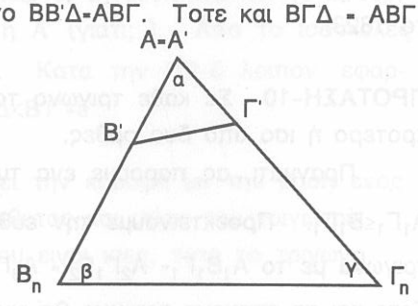
ΠΡΟΤΑΣΗ-11 Αν σ ενα συγκεκριμενο τριγωνο του επιπεδου το αθροισμα των γωνιων του ειναι π (δυο ορθες), τοτε το ιδιο θα συμβαινει και με καθε αλλο τριγωνο του επιπεδου.

Την αποδειξη αυτης της προτασης χωριζουμε σε 4 μερη:

1ο μερος: Εστω οτι το τριγωνο ΑΒΓ εχει αθροισμα γωνιων $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Προεκτεινουμε την ΑΒ και κατασκευαζουμε τριγωνο ΒΒ'Δ=ΑΒΓ. Τοτε και ΒΓΔ = ΑΒΓ



σχ. 3



σχ. 4

διοτι τα δυο τριγωνα εχουν την ΒΓ κοινη, ΒΔ=ΑΓ και την περιεχομενη γωνια ιση με γ (σχ. 3). Προεκτεινουμε κατοπιν την ΑΓ και κατασκευαζουμε το ΓΔΓ' =

= ΑΒΓ. Επειδη α+β+γ=π, τα Β',Δ,Γ' ειναι επ ευθειας. Αρα πετυχαμε να κατασκευασουμε τριγωνο ΑΒ'Γ' με τις ιδιες γωνιες α,β,γ και μηκη πλευρων διπλασια. Επαναλαμβανοντας την διαδικασια αρκετες φορες κατασκευαζουμε αναλογα τριγωνο $ΑΒ_nΓ_n$ με τις ιδιες γωνιες α,β,γ και πλευρες n φορες μεγαλυτερες απο εκεινες του ΑΒΓ.

2ο μερος: Αν το τριγωνο Α'Β'Γ' εχει μια γωνια του ιση με μια γωνια του ΑΒΓ λ.χ. την α, τοτε και το Α'Β'Γ' θα εχει αθροισμα γωνιων π. Πραγματι, συμφωνα με το 1ο μερος, υπαρχει τριγωνο $ΑΒ_nΓ_n$ με τις ιδιες γωνιες με το ΑΒΓ και $ΑΒ_n>ΑΒ'$, $ΑΓ_n>ΑΓ'$. Προκυπτει το τετραπλευρο $Β'Γ'Β_nΓ_n$ (σχ. 4). Χωριζοντας τουτο το τετραπλευρο, με μια διαγωνιο, σε δυο τριγωνα, και χρησιμοποιωντας την ΠΡ-10, εχουμε

$$\beta+\gamma+(\pi-\beta')+(\pi-\gamma') \le 2\pi \quad \Rightarrow$$

$$\beta+\gamma \le \beta'+\gamma' \quad \Rightarrow$$

$$\pi = \alpha+\beta+\gamma \le \alpha+\beta'+\gamma' \le \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta'+\gamma'=\pi.$$

3ο μερος: Αν το τριγωνο Α'Β'Γ' εχει μια γωνια του μικροτερη απο μια γωνια του ΑΒΓ, τοτε και το Α'Β'Γ' εχει αθροισμα γωνιων π.

Προεκτεινε την Β'Γ' και παρε επ αυτης σημειο Δ, ετσι ωστε ∠Β'Α'Δ=α. Κατα το 2ο μερος, το τριγωνο Β'Α'Δ θα εχει αθροισμα γωνιων π. Αν $Σ_1$, $Σ_2$ ειναι τα αθροισματα γωνιων των δυο τριγωνων $τ_1$ και $τ_2$, τοτε θα ισχυει

$$Σ_1 + Σ_2 = 2\pi.$$

Κατα την ΠΡ-10 ομως, πρεπει $Σ_1 \le \pi$, $Σ_2 \le \pi$, αρα η προηγουμενη ισοτητα δεν μπορει να ισχυει, παρα μονον αν $Σ_1 = Σ_2 = \pi$.

4ο μερος: Το τυχον τριγωνο Α'Β'Γ' εχει μια τουλαχιστον γωνια του μικροτερη απο καποια γωνια του ΑΒΓ, αρα κατα το 3ο μερος και το Α'Β'Γ' θα εχει αθροισμα γωνιων π. Πραγματι, αν α',β',γ' οι γωνιες του Α'Β'Γ', οι ανισοτητες

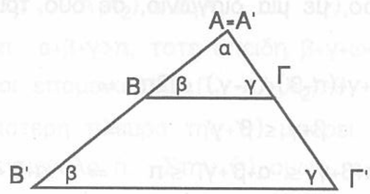
$$\alpha<\alpha',\ \beta<\beta',\ \gamma<\gamma'$$

δεν μπορουν να ισχυουν ταυτοχρονως. Τουτο διοτι τοτε θα ειχαμε την

$\pi=\alpha+\beta+\gamma<\alpha'+\beta'+\gamma'\leq\pi$, που ειναι παραλογη. Αρα για καποια απ αυτες λ.χ. την πρωτη θα εχουμε $\alpha'\leq\alpha$.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι αν σ ενα τριγωνο το αθροισμα των γωνιων του ειναι μικροτερο των δυο ορθων, το ιδιο συμβαινει και με καθε αλλο τριγωνο.

ΠΡΟΤΑΣΗ-12 Εαν σ ενα τριγωνο (και επομενως σ ολα) το αθροισμα των γωνιων του ειναι μικροτερο του π, τοτε δυο τριγωνα με ισες γωνιες ειναι ισα. (Με αλλα λογια σ αυτη την περιπτωση δεν υπαρχουν **ομοια** τριγωνα).



Πραγματι, αν δυο τριγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εχουν ισες γωνιες, τοτε τοποθετουνται οπως στο σχημα. Σχηματιζεται το τετραπλευρο ΒΓΓ'Β' που εχει αθροισμα γωνιων $\beta+(\pi-\beta)+\gamma+(\pi-\gamma)=2\pi$. Τουτο αντιφασκει ομως στο οτι το αθροισμα των γωνιων τριγωνου ειναι μικροτερο του π (π.χ. διαιρωντας το τετραπευρο με μια διαγωνιο σε δυο τριγωνα, καθ ενα απο τα οποια εχει αθροισμα γωνιων μικροτερο του π).

ΑΣΚΗΣΗ-10 Δειξε οτι μια γεωμετρια τις οποιας ολες οι ευθειες τεμνονται, ανα δυο, πρεπει κατ αναγκη να διαφερει απο την Ευκλειδεια και σε αλλα αξιωματα εκτος αυτου της παραλληλιας.

οθεν ηρχισα να ερευνω το επαγγελμα μου, αναλυων και κατακερματιζων εις ολα του τα μερη, και η ερευνα μ εκανε να φριξω, βλεπων οτι και το μικροτατον αυτου μερος ητον ανωτερον της γνωσεως και της δυναμεως μου. Ηυξησεν επειτα την φρικην μου και η αναγνωσις των Ελληνικων συγγραφεων, απ αυτους μανθανων την διαγωγην πολλων αρχαιων ενδοξων ανδρων, και παραβαλλων αυτην με των πλειοτερων ημων την σημερινην ζωην, ανεκαλυψα την αληθινην αιτιαν της παρουσης δυστυχιας του Ελληνικου γενους.

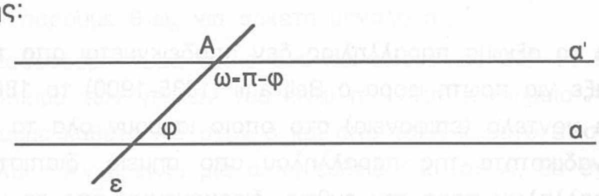
Κοραη, Παπατρεχας σ. 107

3. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Βοες και ιπποι και ορνιθες ετοιμα τικτουσιν επι τας χρειας, ανθρωπου δ η μεν εκτροφη πολυπονος η δ αυξησις βραδεια, της δ αρετης μακραν ουσης προαποθνήσκουσιν οι πλειστοι πατερες.

Πλουταρχου, Ηθικα 496 ε

Οπως ειδαμε στα προηγουμενα, τα υπολοιπα αξιωματα εκτος εκεινου της παραλληλιας, συνεπαγονται την **υπαρξη** παραλληλου προς ευθειαν α απο σημειο Α εκτος αυτης:

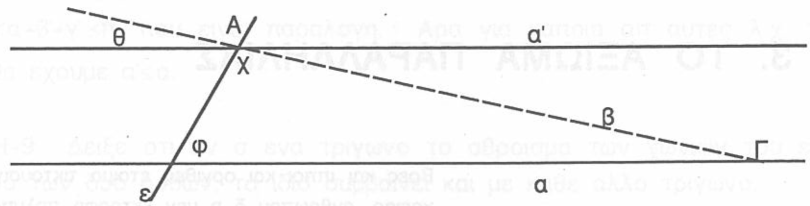


Απο το σημειο Α φερουμε τυχουσα τεμνουσα ε της α που σχηματιζει γωνια φ μ αυτην και απο το Α φερνουμε τεμνουσα α' της ε υπο γωνιαν ω-π-φ μ αυτην. Κατα την ΠΡ-9 οι α και α' ειναι παραλληλοι. Το αξιωμα 4.1(§2) εξασφαλιζει το **μονοσημαντο** αυτης της παραλληλου.

Απο την εποχη του Ευκλειδη και για 2200 χρονια γνωστοι μαθηματικοι οπως οι Πτολεμαιος (περι το 150 μ.Χ.), Προκλος (410-485), J. Wallis (1616-1703), G. Saccheri (1667-1733), J. Lambert (1728-1777), Legendre, επεχειρησαν να δειξουν οτι το αξιωμα παραλληλιας ειναι συνεπεια των υπολοιπων αξιωματων. Ολες οι προσπαθειες απεβησαν ματαιες. Στις "αποδειξεις" παρεισεφρεαν ιδιοτητες που ησαν ισοδυναμες, λογικα, με το αποδεικτεο. Ετσι λ.χ. ο Πτολεμαιος στην "αποδειξη" του, οτι το ε' αξιωμα του Ευκλειδη ειναι συνεπεια των υπολοιπων, χρησιμοποιει καπου το 4.1 που ειναι ισοδυναμο μ αυτο:

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Το ε' αξιωμα του Ευκλειδη (§1) και το αξιωμα 4.1 (§2) ειναι ισοδυναμα.

Πραγματι, υποθετοντας το ε' αξιωμα, ας φερουμε παραλληλο προς την α οπως στο προηγουμενο σχημα. Καθε αλλη ευθεια δια του Α θα σχηματιζει με την α' μια γωνια θ και συμφωνα με το ε' αξιωμα θα τεμνει την α. Αρα υπαρχει

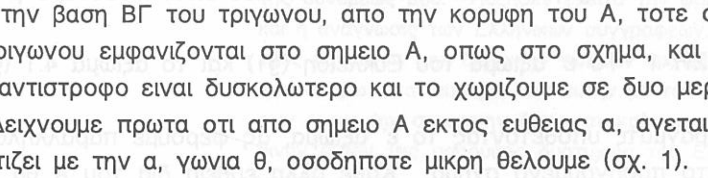


μια και μονον παραλληλος α' της α, διερχομενη δια του Α. Αντιστροφα, αν υποθεσουμε το 4.1, δηλαδη την υπαρξη μιας και μονον παραλληλου α' απο το α, τοτε καθε αλλη ευθεια β, δια του Α, θα σχηματιζει με την ε, απο καποια πλευρα της, γωνιες $\varphi+\chi<\pi$. Λογω της μοναδικοτητας της παραλληλου α', η β θα τεμνει την α προς την μερια των φ,χ (διαφορετικα θα υπηρχε τριγωνο με αθροισμα γωνιων > π).

Το οτι το αξιωμα παραλληλιας δεν αποδεικνυεται απο τα υπολοιπα αξιωματα, απεδειξε για πρωτη φορα ο Beltrami (1835-1900) το 1868. Τουτος κατασκευασε ενα μοντελο (επιφανεια) στο οποιο ισχυουν ολα τα αξιωματα και αντι για την μοναδικοτητα της παραλληλου απο σημειο, διαπιστωνεται η υπαρξη απειρων παραλληλων προς την ευθεια, διερχομενων απο το ιδιο σημειο Α.

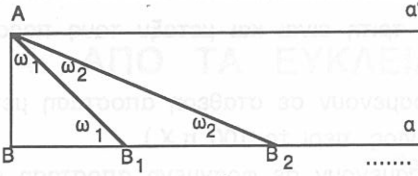
Οι προτασεις του Legendre, που μελετησαμε στην §2, οφειλουν κι αυτες την υπαρξη τους στην προσπαθεια του, ν αποδειξη το αξιωμα παραλληλιας απο τα υπολοιπα αξιωματα. Αντι αυτου ομως, κατεληξε στην:

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Το αξιωμα παραλληλιας ειναι ισοδυναμο με το οτι το αθροισμα των γωνιων ενος συγκεκριμενου τριγωνου ΑΒΓ ειναι δυο ορθες.

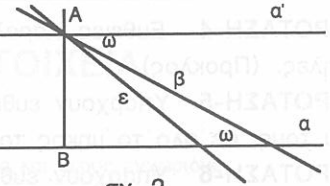


Πραγματι, αν υποθεσουμε το αξιωμα παραλληλιας 4.1 και φερουμε παραλληλο ε προς την βαση ΒΓ του τριγωνου, απο την κορυφη του Α, τοτε οι τρεις γωνιες του τριγωνου εμφανιζονται στο σημειο Α, οπως στο σχημα, και εχουμε $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Το αντιστροφο ειναι δυσκολωτερο και το χωριζουμε σε δυο μερη:

1ο μερος: Δειχνουμε πρωτα οτι απο σημειο Α εκτος ευθειας α, αγεται ευθεια β, που σχηματιζει με την α, γωνια θ, οσοδηποτε μικρη θελουμε (σχ. 1).



σχ. 1



σχ. 2

Πραγματι, ξεκιναμε με ενα σημειο B της α και παιρνουμε B_1 ετσι ωστε να ισχυει $BB_1=AB$. Κατοπιν B_2 στην α, με $B_1B_2=B_1A$, κατοπιν B_3 με $B_3B_2=B_2A$ κ.ο.κ. Δημιουργουνται ισοσκελη τριγωνα ABB_1, B_2B_1A, κ.τ.λ. Κατα την ΠΡ-10 (§2) οι γωνιες ω_1 ,ω_2, ... θα ειναι καθε μια μικροτερη απο το μισο της προηγουμενης της π.χ. $\pi-\omega_1+2\omega_2\leq\pi$, κ.ο.κ. Επαγωγικα λοιπον, θα εχουμε $\omega_n\leq(1/2)^n\omega_1$ και επομενως αρκει να παρουμε $\theta=\omega_n$ για αρκετα μεγαλο n.

2ο μερος: Ας υποθεσουμε τωρα οτι σ ενα και επομενως (ΠΡ-11 (§2)) σε καθε τριγωνο το αθροισμα των γωνιων του ειναι π. Απο το σημειο A εκτος της ευθειας A, ας φερουμε καθετο AB στην α και απο το A καθετο α' στην AB. Οι α,α' ειναι παραλληλοι. Αν β ειναι μια αλλη ευθεια δια του A, θα σχηματιζει με την α' μια γωνια στο A. Κατασκευαζουμε, συμφωνα με το πρωτο μερος, μια αλλη τεμνουσα ε της α δια του A που σχηματιζει γωνια $\omega<\angle(\beta,\alpha')$ με την α. Κατα την υποθεση, $\omega=\angle(\varepsilon,\alpha')$. Επομενως αφου η ε τεμνει την α, το ιδιο θα κανει και η β. Η α' λοιπον ειναι μοναδικη παραλληλος.

Τελικα ολες αυτες οι αποπειρες για αποδειξη του ε' αξιωματος, που απετελεσαν στην ουσια την γεωμετρικη ερευνα, για δεκαδες αιωνων, απεδωσαν δυο καρπους. Πρωτον, ξεκινωντας απο διαφορες προτασεις ισοδυναμες προς το αξιωμα αυτο, οδηγησαν στην μελετη της αξιωματικης μεθοδου, τη θεωρια συνολων και την λογικη. Δευτερον, οδηγησαν στην ανακαλυψη της μη ευκλειδειας γεωμετριας κι απο κει, μεσω του Riemann (1826-1866), στην απειρια των ομωνυμων γεωμετρικων χωρων, που συμπεριλαμβανουν την Ευκλειδεια και την μη Ευκλειδεια (ή Υπερβολικη) γεωμετρια, σαν ειδικες περιπτωσεις.

Στην συνεχεια αναφερω μερικες προτασεις που αποδεικνυονται ισοδυναμες με το αξιωμα παραλληλιας. Στην αποδειξη μερικων απ αυτες θα γυρισουμε μετα την αναπτυξη της μη ευκλειδειας γεωμετριας.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Εαν ευθεια τεμνει μια απο δυο παραλληλους, θα τεμνει και την αλλη. (Προκλος)

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Ευθειες παραλληλες προς τριτη ειναι και μεταξυ τους παραλληλες. (Προκλος)

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Υπαρχουν ευθειες που παραμενουν σε σταθερη αποσταση μεταξυ τους, σε ολο το μηκος τους. (Ποσειδωνιος, περι το 100 π.Χ.)

ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Υπαρχουν ευθειες που παραμενουν σε φραγμενη αποσταση μεταξυ τους, σε ολο το μηκος τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ-7 Υπαρχουν ομοια τριγωνα (τριγωνα που εχουν ισες γωνιες αντιστοιχως) οποιουδηποτε μεγεθους θελουμε. (Wallis, Carnot (1753-1823), Laplace (1749-1827)).

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 Υπαρχουν δυο ομοια και μη ισα τριγωνα. (Saccheri)

ΠΡΟΤΑΣΗ-9 Για καθε γωνια μικροτερη απο 2/3 ορθης και καθε εσωτερικο σημειο αυτης, υπαρχει ευθεια διερχομενη δια του σημειου και τεμνουσα και τις δυο πλευρες της γωνιας. (Legendre)

ΠΡΟΤΑΣΗ-10 Καθε ευθεια διερχομενη απο εσωτερικο σημειο τυχουσης γωνιας, συναντα μια τουλαχιστον των πλευρων της γωνιας.

ΠΡΟΤΑΣΗ-11 Δοθεντων τριων σημειων, μη επ ευθειας κειμενων, υπαρχει κυκλος διερχομενος απ αυτα. (Legendre, W. Bolyai (1775-1856))

ΠΡΟΤΑΣΗ-12 Υπαρχει ορθογωνιο τριγωνο με οσοδηποτε μεγαλο εμβαδον θελουμε. (Gauss (1777-1855))

ΠΡΟΤΑΣΗ-13 Δεν υπαρχει τριγωνο του οποιου καθε γωνια να ειναι οσο μικρη θελουμε.

ΠΡΟΤΑΣΗ-14 Αν σ ενα τετραπλευρο τρεις γωνιες του ειναι ορθες, τοτε και η τεταρτη ειναι ορθη. (Clairaut (1713 - 1765))

ΑΣΚΗΣΗ-1 Υποθετωντας το αξιωμα παραλληλιας, δειξε την αληθεια των προηγουμενων προτασεων (δυσκολωτερο ειναι το αντιστροφο: να δειξουμε οτι υποθετωντας την αληθεια τους, επεται το αξιωμα παραλληλιας).

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι οι ΠΡ-3, ΠΡ-4 ειναι ισοδυναμες με το αξιωμα παραλληλιας. Δειξε το ιδιο και για την ΠΡ-14 (χρησιμοποιησε την ΠΡ-2).

> Ερχομαστε απ την Αραπια, την Αιγυπτο την Παλαιστινη τη Συρια,
> το κρατιδιο της Κομμαγηνης που σβησε σαν το μικρο λυχναρι
> πολλες φορες γυριζει στο μυαλο μας,
> και πολιτειες μεγαλες που εζησαν χιλιαδες χρονια
> κι επειτα απομειναν τοπος βοσκης για τις γκαμουζες
> χωραφια για ζαχαροκαλαμα και καλαμποκια. ...
>
> Γ. Σεφερη, Τελευταιος σταθμος

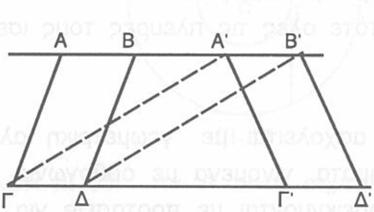
4. ΑΠΟ ΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Πρωτον μεν Αργος και θεους εγχωριους
δικην προσειπειν, τους εμοι μεταιτιους
νοστου δικαιων θ ων επραξαμην πολιν Πριαμου.
Αισχυλου, Αγαμεμνων 810

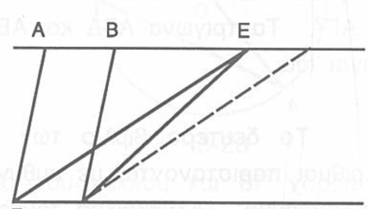
Στην παραγραφο αυτη επιχειρω (μαλλον διακινδυνευω) μια συντομη ανασκοπηση του υλικου των 13 βιβλιων των "στοιχειων" του Ευκλειδη. Το πρωτο βιβλιο περιλαμβανει 23 ορισμους και 48 προτασεις. Απ αυτες, οι πρωτες 28 ειναι απο την απολυτη γεωμετρια και την ουσια τους αναλυσαμε στην §2. Οι υπολοιπες προτασεις ασχολουνται με το εμβαδον και προετοιμαζουν την αποδειξη των προτασεων 47 και 48, που δεν ειναι αλλες απο το Πυθαγορειο θεωρημα και το αντιστροφο του. Αναφερω ενδεικτικα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-Ι-36 Παραλληλογραμμα εχοντα ισες βασεις και περιεχομενα μεταξυ των αυτων παραλληλων, εχουν ισα εμβαδα.

ΠΡΟΤΑΣΗ-Ι-41 Παραλληλογραμμο που εχει την ιδια βαση με τριγωνο και περιεχεται μεταξυ των αυτων παραλληλων, εχει διπλασιο εμβαδον απ το τριγωνο.



Ι-36

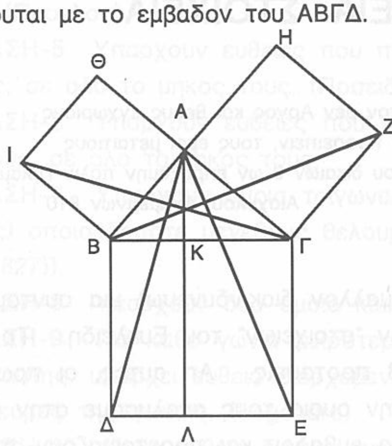


Ι-41

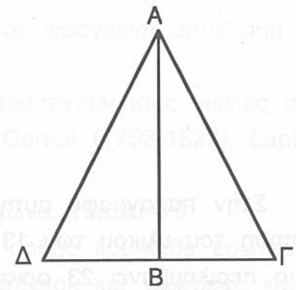
ΠΡΟΤΑΣΗ-Ι-47 Σε ορθογωνιο τριγωνο, το τετραγωνο της υποτεινουσης ισουται με το αθροισμα των τετραγωνων των δυο καθετων πλευρων.

ΠΡΟΤΑΣΗ-Ι-48 Εαν σε τριγωνο, το τετραγωνο μιας πλευρας του ισουται με το αθροισμα των τετραγωνων των δυο αλλων πλευρων του, τοτε το τριγωνο ειναι ορθογωνιο.

Η αποδειξη των δυο πρωτων προτασεων διαβαζεται στο αντιστοιχο σχημα. Στην Ι-36: ΓΔ=Γ'Δ' συνεπαγεται την ισοτητα των τριγωνων ΓΓ'Α' και ΔΔ'Β'. Παρατηρωντας το κοινο εμβαδον των ισων αυτων τριγωνων, εχουμε αμεσως οτι το εμβαδον του Γ'Δ'Α'Β ισουται με αυτο του ΓΔΑ'Β' και τουτο με τη σειρα του ισουται με το εμβαδον του ΑΒΓΔ. Αναλογη ειναι η αποδειξη της Ι-41.



Ι-47



Ι-48

Για την Ι-47 φερνουμε την ΑΚ καθετο στην υποτεινουσα ΒΓ του ορθογωνου τριγωνου ΑΒΓ. Δειχνουμε κατοπιν οτι τα δυο ορθογωνια παραλληλογραμμα ΒΚΛΔ και ΚΓΕΛ εχουν το ιδιο εμβαδον με τα τετραγωνα ΙΘΑΒ και ΑΓΖΗ αντιστοιχως. Το τελευταιο ειναι συνεπεια της ισοτητας των τριγωνων ΙΒΓ με το ΑΒΔ και ΒΖΓ με το ΑΓΕ.

Για την Ι-48 υποθεσε οτι $ΑΓ^2=ΒΓ^2+ΒΑ^2$. Παρε ΔΒ=ΒΓ και ΔΒ καθετο στην ΑΒ. Το ΑΔΒ ειναι, εκ κατασκευης, ορθογωνιο, αρα $ΑΔ^2=ΔΒ^2+ΑΒ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2=ΑΓ^2$. Τα τριγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ εχουν τοτε ολες τις πλευρες τους ισες, αρα ειναι ισα.

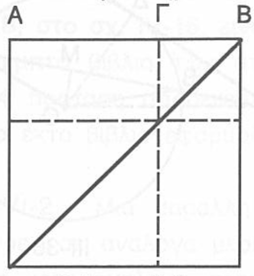
Το δευτερο βιβλιο των στοιχειων ασχολειται με "γεωμετρικη αλγεβρα". Αριθμοι παριστανονται με ευθυγραμμα τμηματα, γινομενα με ορθογωνια παραλληλογραμμα. Αλγεβρικες ταυτοτητες αποδεικνυονται με προτασεις για εμβαδα παραλληλογραμμων. Αναφερω ενδεικτικα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙ-4 Εστω τυχον ευθυγραμμο τμημα ΑΒ, Γ τυχον σημειον αυτου. Το τετραγωνο πλευρας ΑΒ εχει εμβαδον ισο με το αθροισμα των τετραγωνων με πλευρες ΑΓ και ΓΒ, συν το διπλασιο εμβαδον του ορθογωνιου, με πλευρες ΑΓ και ΒΓ. (Γεωμετρικη αποδειξη της ταυτοτητας $(α+β)^2=α^2+β^2+2αβ$).

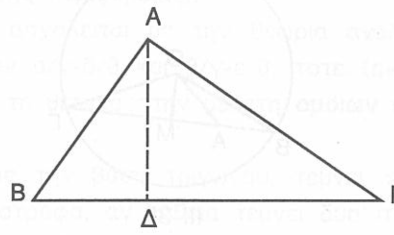
ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙ-7 Αναλογη γεωμετρικη αποδειξη της ταυτοτητας

$$(α-β)^2=α^2+β^2-2αβ.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙ-13 Γεωμετρικη αποδειξη του γνωστου τυπου για οξυγωνιο τριγωνο (στο Β: Τυπος συνημιτονου). $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2(ΒΓ)(ΒΔ)$.



ΙΙ-4 και ΙΙ-7



ΙΙ-13

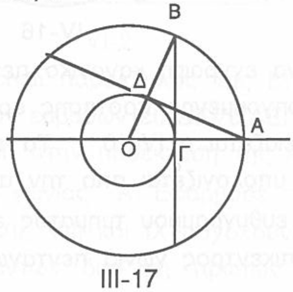
Το τριτο και τεταρτο βιβλιο ασχολουνται με τον κυκλο και την εγγραφη και περιγραφη πολυγωνων σ αυτον. Αναφερω ενδεικτικα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙΙ-1 Να βρεθη το κεντρο δοθεντος κυκλου.

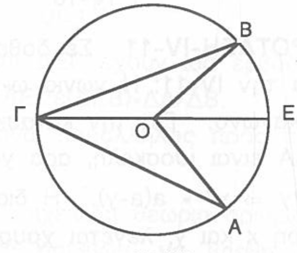
ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙΙ-10 Δυο κυκλοι τεμνονται, το πολυ, σε δυο σημεια.

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙΙ-17 Να κατασκευασθη απο δοθεν σημειο, εφαπτομενη δοθεντος κυκλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙΙ-20 Η επικεντρος γωνια ειναι διπλασια της περιφερειακης που βαινει στο αυτο τοξο.



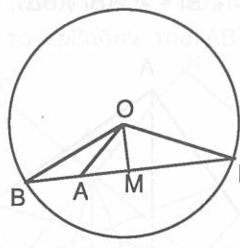
ΙΙΙ-17



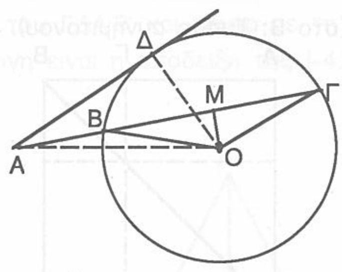
ΙΙΙ-20

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙΙ-35 Αν Α ειναι σημειο εσωτερικο του κυκλου και ΒΓ χορδη διερχομενη δια του Α, τοτε το γινομενο των τμηματων (ΑΒ)(ΑΓ) ειναι ανεξαρτητο της χορδης (ειναι για ολες τις χορδες ο ιδιος αριθμος, που λεγεται **δυναμις** του Α ως προς τον κυκλο).

ΠΡΟΤΑΣΗ-ΙΙΙ-36 Αν Α ειναι σημειο εξωτερικο του κυκλου και ΑΒΓ τυχουσα τεμνουσα του κυκλου δια του Α (στα σημεια Β,Γ), τοτε το γινομενο (ΑΒ)(ΑΓ) ειναι ανεξαρτητο της τεμνουσας (λεγεται κι αυτο **δυναμις** του Α, ως προς τον κυκλο) και ισουται με το τετραγωνο της εφαπτομενης του κυκλου, απο το σημειο Α. Για την ΙΙΙ-35: $(ΑΒ)(ΑΓ)=((ΑΒ+ΑΓ)/2)^2 - ((ΑΓ-ΑΒ)/2)^2 = ΒΜ^2 - ΑΜ^2 = ΟΒ^2 - ΟΑ^2$ που ειναι ανεξαρτητο της χορδης δια του Α. Τα ιδια ισχυουν και για το ΙΙΙ-36.

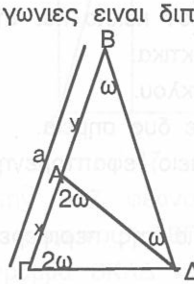


III-35

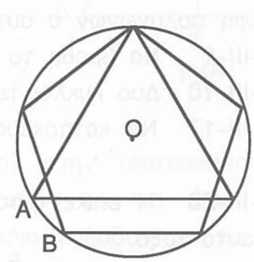


III-36

ΠΡΟΤΑΣΗ-IV-10 Να κατασκευασθη ισοσκελες τριγωνο του οποιου οι παρα την βασην γωνιες ειναι διπλασιες της γωνιας της κορυφης.



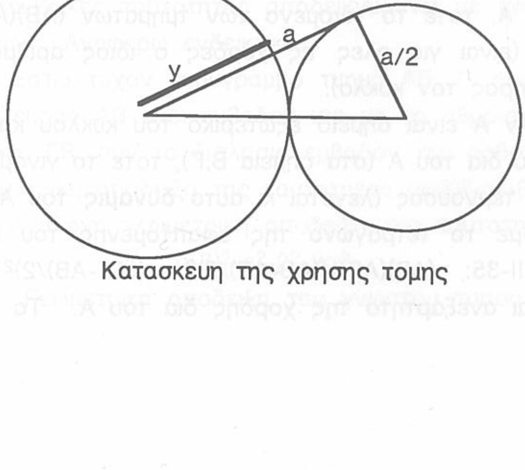
IV-10



IV-16

ΠΡΟΤΑΣΗ-IV-11 Σε δοθεντα κυκλο να εγγραφη κανονικο πενταγωνο.

Για την IV-11: Η γωνια $\omega=\pi/5$ της προηγουμενης προτασης οριζει το κανονικο δεκαγωνο. Για την κατασκευη της χρειαζεται η IV-10. Τα τριγωνα ΑΔΓ και ΒΔΑ ειναι ισοσκελη, αρα $y=$ΑΔ. Το y υπολογιζεται απο την αναλογια $y/(a-y)=a/y \Rightarrow y^2=a(a-y)$. Η διαιρεση ενος ευθυγραμμου τμηματος a σε δυο τετοια μερη x και y, λεγεται **χρυση τομη**. Επικεντρος γωνια πενταγωνου = 2ω.



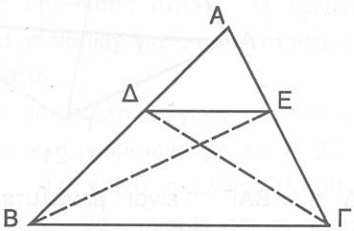
Κατασκευη της χρησης τομης

ΠΡΟΤΑΣΗ-IV-16 Σε δοθεντα κυκλο να εγγραφη κανονικο δεκαπενταγωνο. (Το τοξο ΑΒ, στο σχ. IV-16, ειναι 1/15 της περιφερειας).

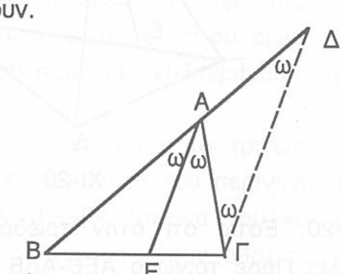
Το πεμπτο βιβλιο των στοιχειων ασχολειται με την θεωρια αναλογιων. π.χ. η **V-24** προταση αποδεικνυει οτι αν α/γ=δ/θ και β/γ=ε/θ, τοτε (α+β)/γ = (δ+ε)/θ. Το εκτο βιβλιο εφαρμοζει αυτη τη θεωρια στην μελετη **ομοιων** σχηματων:

ΠΡΟΤΑΣΗ-VI-2 Μια παραλληλος προς την βαση τριγωνου, τεμνει τις δυο αλλες πλευρες σε αναλογα μερη. Αντιστροφα, αν ευθεια τεμνει δυο πλευρες τριγωνου σε μερη αναλογα, τοτε ειναι παραλληλος προς την βαση.

ΠΡΟΤΑΣΗ-VI-3 Η διχοτομος γωνιας τριγωνου τεμνει την απεναντι πλευρα σε μερη αναλογα των πλευρων που την περιεχουν.



VI-2



VI-3

VI-2: Αν η ΔΕ ειναι παραλληλος της ΒΓ, τα ΔΕΒ και ΔΕΓ εχουν ισα εμβαδα. Τοτε ο λογος των εμβαδων ε(ΑΔΕ)/ε(ΔΕΓ)=ΑΕ/ΕΓ=ε(ΔΑΕ)/ε(ΔΕΒ)=ΔΑ/ΔΒ.

VI-3: Παρε ΔΑ=ΑΓ στην προεκταση της ΑΒ. Η ΔΓ ειναι παραλληλος προς την διχοτομο ΑΕ της γωνιας ∠Α. Εφαρμοσε την VI-2.

Τα βιβλια VII, VIII και IX ασχολουνται με την στοιχειωδη θεωρια αριθμων π.χ. **VII-2**: Δοθεντων δυο μη πρωτων μεταξυ τους αριθμων, να βρεθη ο μεγιστος κοινος διαιρετης τους. (Ευρεση με τον γνωστο "Ευκλειδειο αλγοριθμο" των διαδοχικων διαιρεσεων).

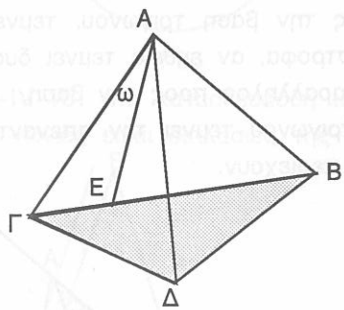
IX-20: Υπαρχουν απειροι πρωτοι αριθμοι. (Αν ηταν μονο πεπερασμενοι, πες $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, τοτε δειξε οτι και ο $1+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ ειναι επισης πρωτος (ατοπο)).

Το δεκατο βιβλιο ερευνα αρρητους αριθμους. Σ αυτο οπως και σ ολα τα βιβλια, οι αριθμοι ταυτιζονται με ευθυγραμμα τμηματα, γινομενα xy ταυτιζονται με εμβαδα ορθογωνιων, τετραγωνα x^2 με εμβαδα τετραγωνων. Κατοπιν, με την βοηθεια της γεωμετριας, αποδεικνυεται οτι οι ριζες ορισμενων αλγεβρικων εξισωσεων ειναι αρρητοι αριθμοι. Ετσι λ.χ. αποδεικνυονται αρρητες οι τετραγωνικες ριζες των πρωτων αριθμων κ.α. Η δυσκολια εδω οφειλεται στην ελλειψη της αλγεβρικης γλωσσας και συμβολισμου.

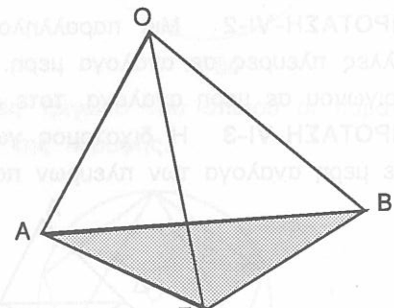
Στο ενδεκατο βιβλιο οριζονται και μελετωνται στερεα σχηματα: τριεδρες γωνιες, παραλληλεπιπεδα και πρισματα. Αναφερω ενδεικτικα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-XI-20 Σε τριεδρο γωνια το αθροισμα δυο επιπεδων γωνιων της ειναι μεγαλυτερο απο την τριτη.

ΠΡΟΤΑΣΗ-XI-21 Το αθροισμα των επιπεδων γωνιων τριεδρου γωνιας ειναι μικροτερο των 4 ορθων.



XI-20



XI-21

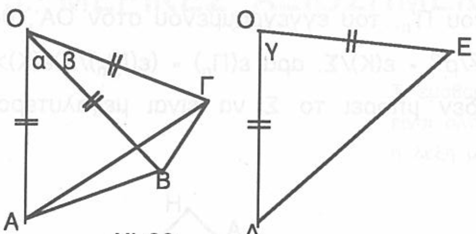
XI-20: Εστω οτι στην τριεδρο ΑΒΓΔ η $\angle$ΒΑΓ ειναι μεγαλυτερη απο τις αλλες.Παρε τριγωνο ΑΕΒ=ΑΔΒ και προεκτεινε την ΕΓ μεχρι να τμηση την ακμη ΑΓ. Ισχυει ΕΓ≤ ΓΔ, διοτι προσθετοντας και στα δυο μελη την ΒΔ=ΕΒ, εχουμε την τριγωνικη ανισοτητα για το τριγωνο ΒΓΔ: ΓΕ+ΕΒ=ΓΒ≤ΓΔ+ΔΒ. Κατα την ΑΣ-7 (§2) επεται οτι ω=$\angle$ΓΑΒ-$\angle$ΔΑΒ ≤$\angle$ΓΑΔ.

XI-21: Τεμνοντας την τριεδρο ΟΑΒΓ με ενα επιπεδο ΑΒΓ, σχηματιζονται αλλες τρεις τριεδρες, στα Α,Β και Γ αντιστοιχως. Το αθροισμα των εδρων της ΟΑΒΓ ειναι $\angle$ΑΟΒ+$\angle$ΒΟΓ+$\angle$ΓΟΑ = (π-$\angle$ΟΑΒ-$\angle$ΟΒΑ)+(π-$\angle$ΟΒΓ-$\angle$ΟΓΒ)+(π-$\angle$ΟΑΓ-$\angle$ΟΓΑ).
Ομως, κατα την XI-20, $\angle$ΟΓΑ+$\angle$ΟΓΒ ≥ $\angle$ΑΓΒ, $\angle$ΟΒΓ+$\angle$ΟΒΑ ≥ $\angle$ΑΒΓ κ.τ.λ.

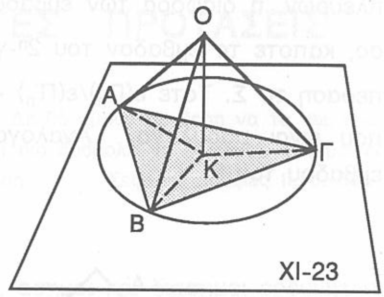
Αλγεινα μεν μοι και λεγειν εστιν ταδε,
αλγος δε σιγαν, πανταχη δε δυσποτμα.
Αισχυλου, Προμηθευς δεσμωτης, 197

ΠΡΟΤΑΣΗ-XI-22 Δοθεντων τριων ισοσκελων τριγωνων με ισα σκελη, των οποιων οι κορυφες, λαμβανομενες ανα δυο, εχουν αθροισμα γωνιων μεγαλυτερο της τριτης, μπορουμε να κατασκευασουμε τριγωνο, του οποιου οι πλευρες να συμπιπτουν με τις βασεις των ισοσκελων.

ΠΡΟΤΑΣΗ-XI-23 Να κατασκευασθη τριεδρος γωνια, της οποιας διδονται οι τρεις επιπεδοι γωνιες, καθε ζευγος των οποιων εχει αθροισμα μεγαλυτερο της τριτης και το αθροισμα των τριων γωνιων ειναι μικροτερο των τεσσαρων ορθων.



XI-22



XI-23

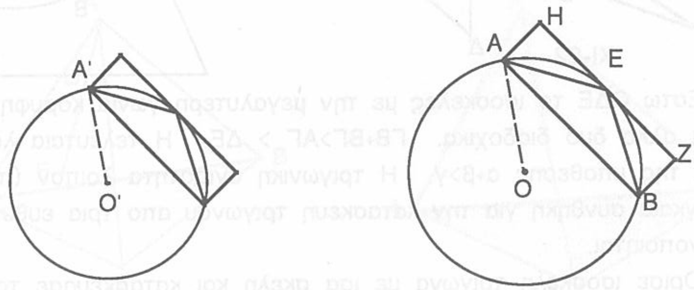
XI-22: Εστω ΟΔΕ το ισοσκελες με την μεγαλυτερη γωνια κορυφης γ. Τοποθετησε τα αλλα δυο διαδοχικα. ΓΒ+ΒΓ>ΑΓ > ΔΕ. Η τελευταια λογω της ΠΡ-8 (§2) και της υποθεσης α+β>γ. Η τριγωνικη ανισοτητα λοιπον (που ειναι ικανη και αναγκαια συνθηκη για την κατασκευη τριγωνου απο τρια ευθυγραμμα τμηματα) ικανοποιηται.

XI-23: Ορισε ισοσκελη τριγωνα με ισα σκελη και κατασκευασε το τριγωνο των βασεων τους ΑΒΓ συμφωνα με το XI-22. Εστω Κ το κεντρο του περιγεγραμμενου κυκλου. Το κοινο σκελος ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ > ΑΚ=ΒΚ=ΓΚ (ακτινα του κυκλου). Πραγματι, ΟΑ=ΑΚ θα σημαινε οτι οι τρεις επιπεδες γωνιες εχουν αθροισμα ισο με 2π, αντιθετα με την υποθεση. ΟΑ<ΑΚ θα σημαινε οτι ∠ΑΟΒ > ∠ΑΚΒ, ∠ΒΟΓ > ∠ΒΚΓ και ∠ΑΟΓ > ∠ΑΚΓ. Τοτε οι τρεις επιπεδες γωνιες θα ειχαν αθροισμα μεγαλυτερο του 2π, αντιθετα με την υποθεση.

Το δωδεκατο βιβλιο χαρακτηριζεται απο την εφαρμογη της "μεθοδου της εξαντλησης" για την προσεγγιση κυκλου με κανονικα 2^n-γωνα και αντιστοιχη προσεγγιση κωνων με πολυγωνικα πρισματα. Τουτη η μεθοδος που οφειλεται στον μαθητη του Πλατωνα Ευδοξο (408-355;) χρησιμοποιηθηκε αργοτερα απο τον Αρχιμηδη (287-212) και γενικευθηκε σε ενα γεωμετρικο εργαλειο, προδρομο του ορισμενου ολοκληρωματος. Αναφερω ενδεικτικα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-XII-2 Ο λογος των εμβαδων δυο κυκλων ισουται με τον λογο των τετραγωνων των διαμετρων τους.

Πραγματι, εστω Κ κυκλος ακτινας ρ=ΟΑ, Κ' κυκλος ακτινας ρ'=Ο'Α' και εστων οτι ο λογος των τετραγωνων των διαμετρων = ρ^2/ρ'^2 ισουται με το εμβαδον του κυκλου Κ, προς εναν αριθμο Σ, μικροτερο του εμβαδου του αλλου κυκλου Κ'. Τα τετραγωνα, οκταγωνα, δεκαεξαγωνα κ.τ.λ. εγγεγραμμενα (κανονικα) πολυγωνα στους κυκλους εχουν κι αυτα λογο εμβαδων ισο με το λογο των τετραγωνων των διαμετρων. Επειδη δε σε καθε διπλασιασμο των πλευρων, η διαφορα των εμβαδων ε(Κ)-ε(Π_n) μειωνεται περισσοτερο απο το μισο, καποτε το εμβαδον του 2^n-γωνου Π'_n, του εγγεγραμμενου στον ΟΑ', θα ξεπεραση το Σ. Τοτε ε(Π_n)/ε(Π'_n) = ρ^2/ρ'^2 = ε(Κ)/Σ, αρα ε(Π_n) = (ε(Π'_n)/Σ)ε(Κ)>ε(Κ), που ειναι παραλογο. Αναλογα, δεν μπορει το Σ να ειναι μεγαλυτερο του εμβαδου του Κ.



Με αναλογο τροπο αργοτερα, ξεκινωντας απο κανονικο περιγεγραμμενο και εγγεγραμμενο εξαγωνο και διπλασιαζοντας το πληθος των πλευρων, μεχρι το 96-γωνο, θα υπολογισει ο Αρχιμηδης, στο "κυκλου μετρησις", το π και θα δειξει οτι περιεχεται μεταξυ των 3+(10/71) και 3+(1/7).

Στο δεκατο τριτο βιβλιο κατασκευαζονται τα πεντε Πλατωνικα σωματα: τετραδρο, κυβος, οκταεδρο, δωδεκαεδρο και εικοσαεδρο κι αποδεικνυεται οτι δεν υπαρχουν αλλα παρομοια στερεα, των οποιων οι εδρες ειναι κανονικα πολυγωνα, ισα μεταξυ τους. Σε μια αναλυση αυτου του προβληματος, απο τη σκοπια της σφαιρικης γεωμετριας, θα επανελθουμε παρακατω (§9).

Των τοιουτων αρπαγων την ποσοτητα εμπορει τις να μεταχειρισθη ως κριτηριον της παιδειας και του νου των εθνων, παρομοιον τροπον τινα του φυσικου Θερμομετρου, να το διαιρεση, εις βαθμους, και να τονομαση **Νουμετρον** ή **Φρενομετρον**. Οσον πλειοτερους εχει το εθνος αργους τρεφομενους απο κοπους εργαζομενων, τοσον ειναι πλησιεστερον εις την καταψυχουσαν τας δυναμεις της ψυχης απαιδευσιαν, οσον ολιγωτερους, τοσον εγγυτερα προχωρει εις τα θερμαινοντα και ζωογονουντα τας φρενας φωτα της παιδειας. Κοραη, Προλεγομενα β' σ. 208.

5. ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

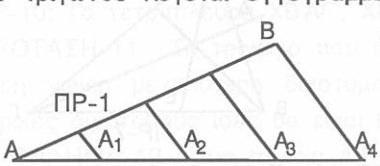
> Τι εμαθαμε; Δε θα ημουν σε θεση να το πω, μου ειναι ολο και πιο δυσκολο να εξηγηθω τι σημαινει η λεξη μαθηση. Σεφερη, Δοκιμες ΙΙ, σ. 326

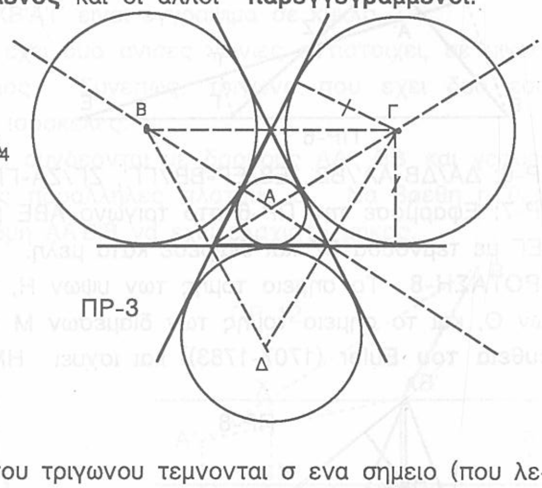
Απο τον καιρο του Ευκλειδη μεχρι σημερα, ασημοι και διασημοι ερευνητες μελετησαν και εμπλουτισαν την Ευκλειδεια γεωμετρια με δικες τους προτασεις. Οι λιγοστες που ακολουθουν ελπιζω να δωσουν μια ιδεα της μεγαλης ποικιλιας.

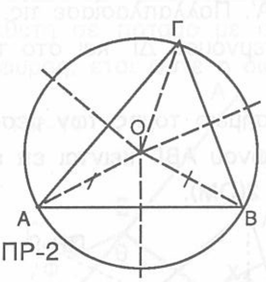
ΠΡΟΒΛΗΜΑ-1 Διαιρεσε δοθεν ευθυγραμμο τμημα σε ν ισα μερη.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Δειξε οτι οι μεσοκαθετοι των πλευρων τριγωνου τεμνονται σ ενα σημειο που συμπιπτει με το κεντρο του περιγεγραμμενου κυκλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Δειξε οτι οι εσωτερικες και εξωτερικες διχοτομοι ενος τριγωνου τεμνονται ανα τρεις σε τεσσερα σημεια Α,Β,Γ,Δ. Τα σημεια αυτα ειναι κεντρα κυκλων που εφαπτονται και των τριων πλευρων του τριγωνου. Ο εσωτερικος του τριγωνου λεγεται **εγγεγραμμενος** και οι αλλοι **παρεγγεγραμμενοι**.

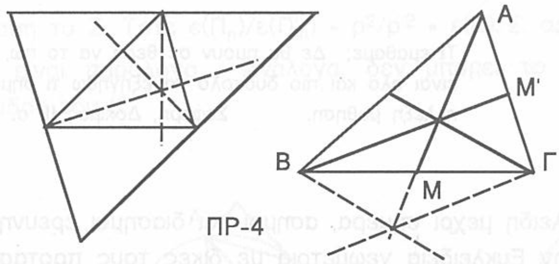




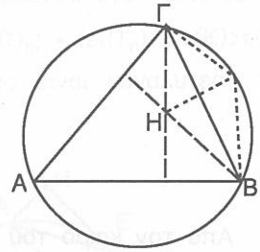


ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Δειξε οτι τα υψη του τριγωνου τεμνονται σ ενα σημειο (που λεγεται **ορθοκεντρο** του τριγωνου). Δειξε οτι και οι διαμεσοι του τριγωνου τεμνονται σ ενα σημειο. Το σημειο αυτο λεγεται **κεντρο βαρους** και χωριζει καθε διαμεσο σε λογο 2:1.

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Δειξε οτι ενα τετραπλευρο ειναι εγγραψιμο σε κυκλο, τοτε και μονον, οταν οι απεναντι γωνιες του ειναι παραπληρωματικες. Δειξε κατοπιν οτι τα συμμετρικα του ορθοκεντρου ως προς τις πλευρες του τριγωνου ειναι σημεια επι της περιγεγραμμενης περιφερειας.



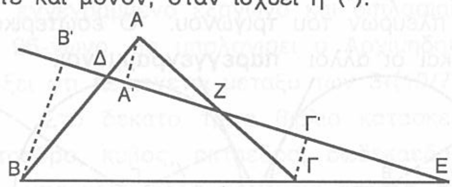
ΠΡ-4



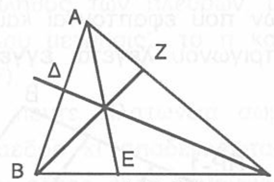
ΠΡ-5

ΠΡΟΤΑΣΗ-6 (Θεωρημα του Μενελαου (περι το 100 π.Χ)) Τρια σημεια Δ,Ε και Ζ, των πλευρων τριγωνου ΑΒΓ ευρισκονται επ ευθειας, τοτε και μονον, οταν ισχυει $\frac{ΔΑ}{ΔΒ}\cdot\frac{ΕΒ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΓ}{ΖΑ}=1$. (*)

ΠΡΟΤΑΣΗ-7 (Θεωρημα του Ceva (1647-1734)) Τρια σημεια Ε,Δ,Ζ των πλευρων τριγωνου ΑΒΓ, οριζουν ευθειες ΔΓ,ΕΑ,ΒΖ διερχομενες απο ενα σημειο τοτε και μονον, οταν ισχυει η (*).



ΠΡ-6

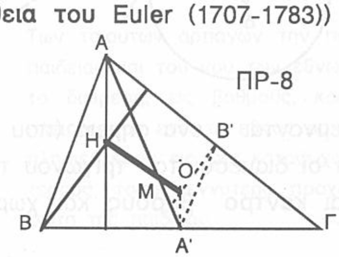


ΠΡ-7

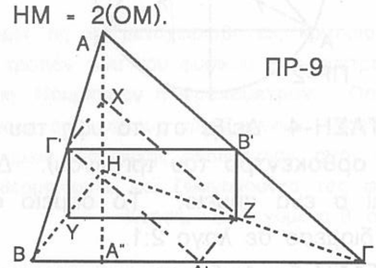
ΠΡ-6: ΔΑ/ΔΒ=ΑΑ'/ΒΒ', ΕΒ/ΕΓ=ΒΒ'/ΓΓ', ΖΓ/ΖΑ=ΓΓ'/ΑΑ'. Πολλαπλασιασε τις.

ΠΡ-7: Εφαρμοσε την ΠΡ-6 στο τριγωνο ΑΒΕ με τεμνουσα ΔΓ και στο τριγωνο ΑΕΓ με τεμνουσα ΒΖ και διαιρεσε κατα μελη.

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 Το σημειο τομης των υψων Η, το σημειο τομης των μεσοκαθετων Ο, και το σημειο τομης των διαμεσων Μ τριγωνου ΑΒΓ κεινται επ ευθειας (ευθεια του **Euler** (1707-1783)) και ισχυει ΗΜ = 2(ΟΜ).

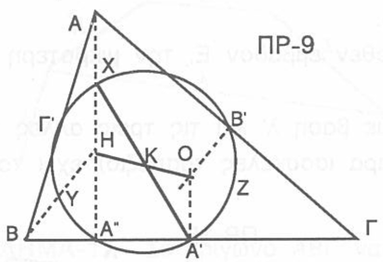


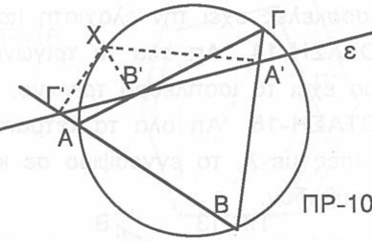
ΠΡ-8



ΠΡ-9

ΠΡΟΤΑΣΗ-9 Τα μεσα των πλευρων Α',Β',Γ', οι ποδες των υψων Α",Β",Γ" και τα μεσα Χ,Υ,Ζ των τμηματων ΑΗ, ΒΗ και ΓΗ τριγωνου ΑΒΓ με ορθοκεντρο Η, κεινται επι κυκλου που λεγεται **κυκλος του Euler** και εχει κεντρο στο μεσον της ευθειας του Euler.





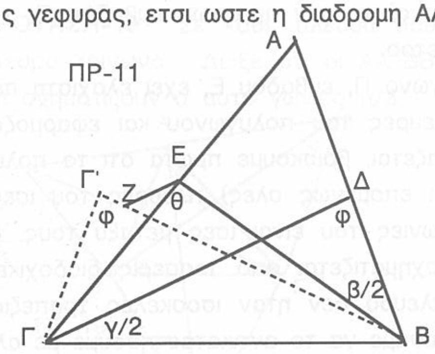
ΠΡΟΤΑΣΗ-10 Για καθε σημειο Χ του περιγεγραμμενου κυκλου τριγωνου ΑΒΓ, οι ποδες των καθετων Α',Β',Γ', απο το Χ στις πλευρες του τριγωνου, κεινται επ ευθειας (που λεγεται **ευθεια του Simson** (1687-1768) του σημειου Χ).

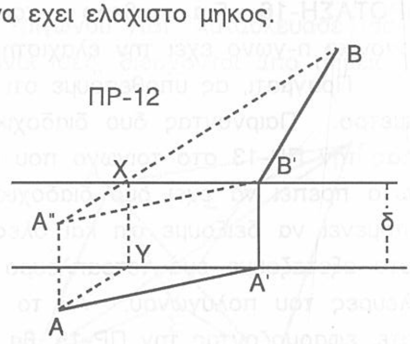
ΠΡ-9: Τα Β'Γ'ΥΖ και Γ'ΧΖΑ' ειναι ορθογωνια παραλληλογραμμα με κοινη διαγωνιο την Γ'Ζ και τα Α",Β",Γ" περιεχονται στον κυκλο που περνα απο τις κορυφες τους. Στο δευτερο σχημα φαινεται ο κυκλος του Euler με διαμετρο ΧΑ'. Τα τριγωνα ΧΗΚ και ΚΟΑ' ειναι ισα, αρα ΗΚ=ΚΟ.

ΠΡ-10: Τα τετραπλευρα ΧΒ'ΑΓ', ΧΒ'Α'Γ ειναι εγγραψιμα σε κυκλο.

ΠΡΟΤΑΣΗ-11 Σε τριγωνο που εχει δυο ανισες γωνιες αντιστοιχει, σε μικροτερη γωνια μεγαλυτερη διχοτομος. Συνεπως, τριγωνο που εχει δυο εσωτερικες διχοτομους ισες θα ειναι ισοσκελες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ-12 Δυο πολεις Α,Β συνδεονται με δρομους ΑΑ', ΒΒ' και γεφυρα Α'Β' καθετη σε ποταμο με οχθες παραλληλες πλατους δ. Να βρεθη η θεση της γεφυρας, ετσι ωστε η διαδρομη ΑΑ'Β'Β να εχει ελαχιστο μηκος.





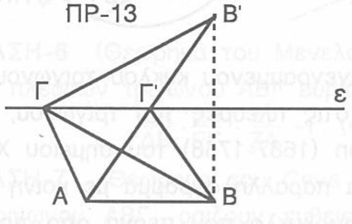
ΠΡ-11: Υποθεσε $\angle B > \angle \Gamma$, τοτε $\theta > \varphi$. Κατασκευασε τριγωνο ΓΒΓ'=ΓΒΔ. Ο περιγεγραμμενος κυκλος του ΓΒΕ θα τεμνει την ΒΓ' στο Ζ. Συγκρινοντας τις γωνιες του ΒΕΖ βρισκουμε οτι $\Gamma'Z \geq ZB \geq EB$.

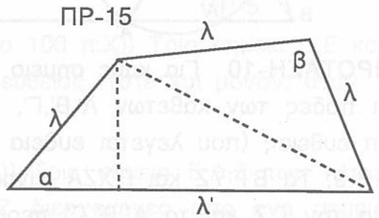
ΠΡ-12: Εστω το Α" ετσι ωστε ΑΑ" να ειναι παραλληλο και ισο προς το δ. Η διαδρομη ΑΑ'Β'Β γινεται ελαχιστη οταν τα Α"Β'Β ειναι επ ευθειας.

ΠΡΟΤΑΣΗ-13 Απ ολα τα τριγωνα με δοθεν εμβαδον Ε και δοθησα βαση ΑΒ, το ισοσκελες εχει την ελαχιστη περιμετρο.

ΠΡΟΤΑΣΗ-14 Απ ολα τα τριγωνα με δοθεν εμβαδον Ε, την μικροτερη περιμετρο εχει το ισοπλευρο τριγωνο.

ΠΡΟΤΑΣΗ-15 Απ ολα τα τετραπλευρα με βαση λ' και τις τρεις αλλες πλευρες ισες με λ, το εγγραψιμο σε κυκλο (αρα ισοσκελες τραπεζιο) εχει το μεγιστο εμβαδον.

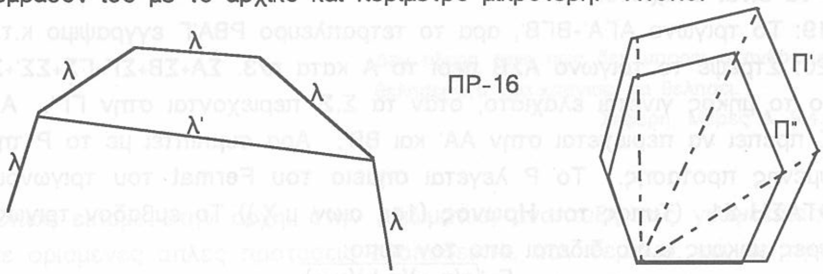




ΠΡ-13: Οι κορυφες ολων των τριγωνων εμβαδου Ε περιεχονται σε ευθεια ε, παραλληλο προς την βαση ΑΒ. Παρε Β' συμμετρικο του Β ως προς ε κ.τ.λ.
ΠΡ-14: Σταθεροποιησε την μια πλευρα και εφαρμοσε την ΠΡ-13 για τις αλλες.
ΠΡ-15: Για το εμβαδον Ε του τετραπλευρου εχουμε $E=(\lambda^2\sin\beta)/2 + (\lambda'\lambda\sin\alpha)/2$ και απο τον τυπο του συνημιτονου $\lambda^2+\lambda'^2 - 2\lambda\lambda'\cos\alpha = 2\lambda^2 - 2\lambda'^2\cos\beta$. Διαιρωντας με λ εχουμε (1): $\lambda\sin\beta+\lambda'\sin\alpha=(2E/\lambda)$, (2): $\lambda\cos\beta-\lambda'\cos\alpha=(\lambda^2-\lambda'^2)/2\lambda$. Υψωνοντας στο τετραγωνο τις (1), (2) και προσθετοντας κατα μελη εχουμε την $\lambda^2+\lambda'^2-2\lambda\lambda'\cos(\alpha+\beta) = (2E/\lambda)^2+((\lambda^2-\lambda'^2)/2\lambda)^2$. Το Ε μεγιστοποιηται οταν $\alpha+\beta=\pi$.

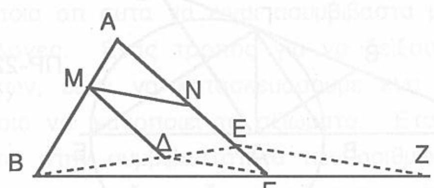
ΠΡΟΤΑΣΗ-16 Για σταθερο n και μεταξυ ολων των n-γωνων εμβαδου Ε, το κανονικο n-γωνο εχει την ελαχιστη περιμετρο.

Πραγματι, ας υποθεσουμε οτι το n-γωνο Π, εμβαδου Ε, εχει ελαχιστη περιμετρο. Παιρνοντας δυο διαδοχικες πλευρες του πολυγωνου και εφαρμοζοντας την ΠΡ-13 στο τριγωνο που σχηματιζεται, βρισκουμε πρωτα οτι το πολυγωνο πρεπει να εχει δυο διαδοχικες (και επομενως ολες) πλευρες του ισες. Απομενει να δειξουμε οτι και ολες οι γωνιες του ειναι ισες μεταξυ τους. Γι αυτο εξεταζουμε ενα τετραπλευρο που σχηματιζεται απο τεσσερις διαδοχικες πλευρες του πολυγωνου. Αν το τετραπλευρο δεν ηταν ισοσκελες τραπεζιο, τοτε, εφαρμοζοντας την ΠΡ-15, θα μπορουσαμε να το αντικαταστησουμε με αλλο, της ιδιας βασης και περιμετρου, αλλα μεγαλυτερου εμβαδου. Το πολυγωνο Π' που θα προεκυπτε, θα ειχε περιμετρο ιση με το αρχικο και εμβδον μεγαλυτερο. Παιρνοντας λοιπον ενα καταλληλο (μικροτερο) ομοιο πολυγωνο, του οποιου το εμβαδον να ειναι ισο με το του αρχικου, θα βρισκαμε ενα πολυγωνο Π" με εμβαδον ισο με το αρχικο και περιμετρο μικροτερη. Ατοπο.

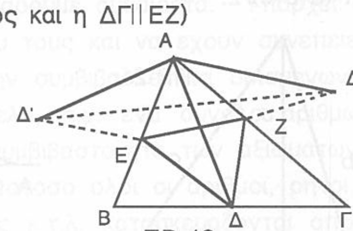


ΠΡ-16

ΠΡΟΒΛΗΜΑ-17 Σε τριγωνο ΑΒΓ να αχθη τεμνουσα ΜΝ, ετσι ωστε ΒΜ=ΜΝ=ΝΓ. (Παρε ΒΑ=ΑΕ=ΕΖ. Το ΜΝΓΔ ειναι ρομβος και η ΔΓ||ΕΖ)



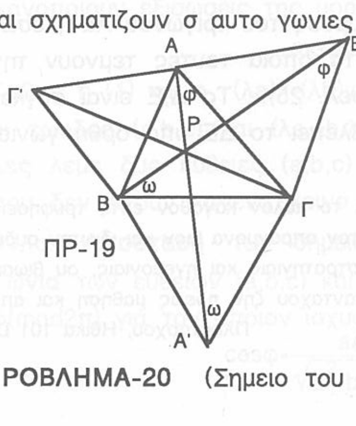
ΠΡ-17



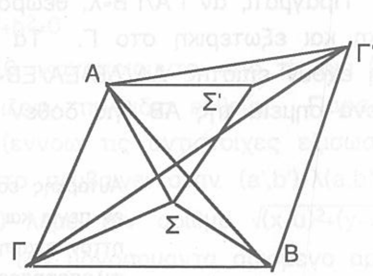
ΠΡ-18

ΠΡΟΒΛΗΜΑ-18 (Του Fagnano (1682-1766)) Σε δοθεν οξυγωνιο τριγωνο να εγγραφη τριγωνο ελαχιστης περιμετρου. (Αν ΕΖΔ εγγεγραμμενο στο ΑΒΓ, παρε Δ' συμμετρικο του Δ ως προς ΑΒ, Δ" συμμετρικο του Δ ως προς ΑΓ. Η περιμετρος ΕΔ+ΔΖ+ΖΕ=Δ'Ε+ΕΖ+ΖΔ" γινεται ελαχιστη οταν τα Ε,Ζ ανηκουν στην Δ'Δ". Τοτε η περιμετρος ισουται με το Δ'Δ" και τουτο γινεται ελαχιστο οταν το Δ συμπεσει με τον ποδα του υψους απο το Α.)

ΠΡΟΤΑΣΗ-19 Σε καθε πλευρα δοθεντος τριγωνου ΑΒΓ κατασκευασε ισοπλευρο τριγωνο. Δειξε οτι οι ΑΑ',ΒΒ',ΓΓ' ειναι ισες, διερχονται απο σημειο Ρ και σχηματιζουν σ αυτο γωνιες π/3.



ΠΡ-19



ΠΡ-20

ΠΡΟΒΛΗΜΑ-20 (Σημειο του Fermat (1601-1665)) Να βρεθη σημειο Σ, ετσι ωστε το αθροισμα των αποστασεων του Σ απο τις κορυφες δοθεντος τριγωνου ΑΒΓ να ειναι ελαχιστο.

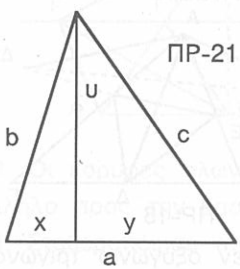
ΠΡ-19: Το τριγωνο ΑΓΑ'=ΒΓΒ', αρα το τετραπλευρο ΡΒΑ'Γ εγγραψιμο κ.τ.λ.

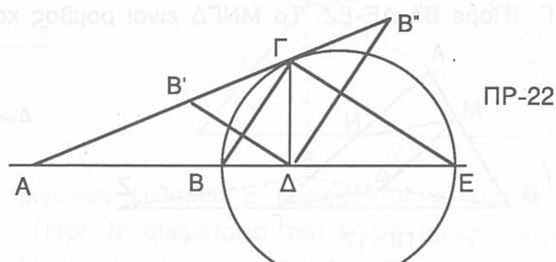
ΠΡ-20: Στρεψε το τριγωνο ΑΣΒ περι το Α κατα π/3. ΣΑ+ΣΒ+ΣΓ=ΓΣ+ΣΣ'+Σ'Γ' και τουτο το μηκος γινεται ελαχιστο, οταν τα Σ,Σ' περιεχονται στην ΓΓ'. Αναλογα το Σ πρεπει να περιεχεται στην ΑΑ' και ΒΒ'. Αρα συμπιπτει με το Ρ της προηγουμενης προτασης. Το Ρ λεγεται **σημειο του Fermat** του τριγωνου ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΗ-21 (Τυπος του **Ηρωνος** (1ος αιων μ.Χ.)) Το εμβαδον τριγωνου με πλευρες μηκους a,b,c διδεται απο τον τυπο:

$$E=\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}\ ,$$

οπου $\tau=(a+b+c)/2$.





Πραγματι, απο το Πυθαγορειο θεωρημα, εχουμε $b^2-x^2=c^2-y^2$. Επισης, $x+y=a$ και για το υψος u στην a, $u^2 = b^2 - x^2$. Λυνοντας τις δυο πρωτες ως προς x,y και αντικαθιστωντας στην τριτη, βρισκουμε οτι $u^2 = b^2-((a^2+b^2-c^2)/2a)^2$. Παραγοντοποιησε και αντικαταστησε στον γνωστο τυπο $E=au/2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-22 (Απολλωνειος κυκλος) Διδεται ευθυγραμμο τμημα ΑΒ. Το συνολο των σημειων Γ των οποιων ο λογος των αποστασεων ΑΓ/ΓΒ=λ (σταθερο), ειναι ενας κυκλος με κεντρο επι της ευθειας των ΑΒ.

Πραγματι, αν ΓΑ/ΓΒ=λ, θεωρουμε τις διχοτομους του τριγωνου ΑΒΓ, εσωτερικη και εξωτερικη στο Γ. Τα σημεια Δ,Ε στα οποια τουτες τεμνουν την βαση εχουν επιστης ΔΑ/ΔΒ=ΕΑ/ΕΒ=λ (ΠΡ-VI-3, σελ. 25). Τα Δ,Ε ειναι συγκεκριμενα σημεια της ΑΒ (για δοθεν λ) και το Γ βλεπει το ΔΕ υπο ορθη γωνια.

Αυταρκης εση, εαν μαθης τι το καλον καγαθον εστι, τρυφησεις εν πενια και βασιλευσεις και τον απραγμονα βιον και ιδιωτην ουδεν ηττον αγαπησεις ή τον επι στρατηγιαις και ηγεμονιαις, ου βιωση φιλοσοφησας αηδως, αλλα πανταχου ζην ηδεως μαθηση και απο παντων. Πλουταρχου, Ηθικα 101 D

6. Η ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ

Δεν ηξερα τοτε πως δεν μπορει ο ανθρωπος να θελησει ο,τι του καπνισει να θελησει.

Σεφερη, Μερες Α, 9.4.1926

Οπως ειπαμε στην αρχη, στην αξιωματικη αναπτυξη της γεωμετριας δεχομαστε ορισμενες απλες προτασεις αναποδεικτα, σαν θεμελιο, και με την λογικη κτιζουμε πανω σ αυτες ολοκληρο το οικοδομημα. Τις απλες αυτες προτασεις, τα αξιωματα, δεν μπορουμε να τα παρουμε αυθαιρετα. Υπαρχει φοβος καποια απ αυτα να ειναι ασυμβιβαστα μεταξυ τους και να εχουν συνεπειες παραλογες. Ενας τροπος για να δειξουμε την συμβιβαστοτητα ορισμενων αξιωματων, ειναι να κατασκευασουμε ενα μοντελο, π.χ. ενα συνολο αριθμων, το οποιο να ικανοποιει τα αξιωματα. Ετσι η συμβιβαστοτητα των αξιωματων αναγεται στην συμβιβαστοτητα των αριθμων. Ωστοσο ολοι οι αριθμοι, ρητοι, πραγματικοι, μιγαδικοι, ζευγη εξ αυτων, τριαδες κ.τ.λ. κατασκευαζονται απο τους φυσικους αριθμους 1,2,3,... και τα αξιωματα τους. Με το μοντελο λοιπον, η συμβιβαστοτητα των αξιωματων αναγεται στην συμβιβαστοτητα των φυσικων αριθμων, κι αυτους, οπως ελεγε ο Kronecker (1823-1891), τους εφτιαξε ο Θεος και ειναι ακλονητοι. Το επομενο μοντελο της Ευκλειδειας γεωμετριας το παρουσιασε ο Hilbert στο βιβλιο του, που ανεφερα στην §1:

Επιπεδο ονομαζουμε το συνολο $R \times R$, οπου R το συνολο των πραγματικων αριθμων. **Σημεια** λοιπον, θα λεμε τα ζευγη (α,β) πραγματικων αριθμων. **Ευθειες** ονομαζουμε ορισμενα υποσυνολα, σημειων (x,y) του επιπεδου, που ικανοποιουν εξισωσεις της μορφης:

$$ax+by+c=0 \quad , \quad \text{με } a^2+b^2 \neq 0. \tag{1}$$

Καθως η (1) και η $(\lambda a)x+(\lambda b)y+(\lambda c)=0$, για $\lambda \neq 0$, ικανοποιουνται απο τα ιδια (x,y), οι τριαδες (a,b,c) και $(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=\lambda(a,b,c)$ οριζουν την ιδια ευθεια. **Παραλληλες** λεμε δυο ευθειες (a,b,c) και (a',b',c') (εννοω τις αντιστοιχες εξισωσεις), που δεν εχουν κανενα κοινο σημειο. Τουτο συμβαινει οταν $(a',b')=\lambda(a,b)$ και $c' \neq \lambda c$. **Αποσταση** των σημειων (x,y), (u,v) λεμε τον αριθμο $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$. **Γωνια** των ευθειων (a,b,c) και (a',b',c') λεμε τον μονοσημαντα ορισμενο αριθμο $\varphi(\bmod 2\pi)$ για τον οποιον ισχυουν οι εξισωσεις:

$$\cos\varphi = \frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}} \, , \quad \sin\varphi = \frac{-aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Καθετες λεμε τις ευθειες, οταν $\cos\varphi = aa' + bb' = 0$. **Ισομετριες** λεμε τις απεικονισεις $f: R\times R \to R\times R$, $(x',y') = f(x,y)$, του επιπεδου στον εαυτο του, που οριζονται, απο εξισωσεις της μορφης:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + u \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + v \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + u \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + v \end{array}\right\} \qquad (2)$$

για σταθερα φ, u και v.

Ισα λεμε δυο σχηματα (δηλαδη υποσυνολα) Σ, Σ' του επιπεδου, οταν υπαρχει απεικονιση f της προηγουμενης μορφης, ετσι ωστε $f(\Sigma) = \Sigma'$. **Κυκλο** λεμε το συνολο των σημειων (x,y) που ικανοποιουν μια εξισωση της μορφης

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 .$$

(3) Το (a,b) λεγεται κεντρο του κυκλου και το r ακτινα.

Μ αυτους τους ορισμους, η επαληθευση των αξιωματων αναγεται σε προτασεις της στοιχειωδους γραμμικης αλγεβρας. Ας δουμε λ.χ. το αξιωμα παραλληλιας: Απο σημειο (x',y') εκτος της ευθειας $ax+by+c=0$, αγεται μια και μονον παραλληλος $Ax+By+C=0$ προς αυτην. Πραγματι, δοθεντων των (x',y') και (a,b,c) ετσι ωστε $ax'+by'+c\neq 0$ (το σημειο δεν περιεχεται στην ευθεια), τα ζητουμενα (A,B,C) προσδιοριζονται αμεσως απο τους ορισμους:

-Θα πρεπει $(A,B) = \lambda(a,b)$, λογω παραλληλιας.

-Θα πρεπει $(\lambda a)x' + (\lambda b)y' + C = 0$, αφου το (x',y') περιεχεται στην (A,B,C).

Λυνοντας ως προς C, βρισκουμε οτι η ευθεια ειναι η $\lambda(a,b,-ax'-by')$. Μια και μοναδικη!

Αναλογα, ολες οι ιδιοτητες, τα προβληματα, τα θεωρηματα, αναγονται σε εξισωσεις και ιδιοτητες συστηματων εξισωσεων. Ας δουμε αλλο ενα παραδειγμα: Απο δυο σημεια $(x,y)\neq(x',y')$ διερχεται μια και μονον ευθεια (a,b,c). Πραγματι, τα ζητουμενα a,b,c θα πρεπει να ικανοποιουν το συστημα εξισωσεων:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ ax'+by'+c=0 \end{array}\right\}$$

Αγνωστοι εδω ειναι τα a,b,c! Το συστημα ειναι γραμμικο με μητρα ταξης 2:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \end{pmatrix}$$

Απο την στοιχειωδη θεωρια γι αυτα τα συστηματα, γνωριζουμε οτι εχουν απλη απειρια λυσεων $\lambda(a,b,c)$ (λ αυθαιρετο). Τουτο μεταφραζεται σ αυτο ακριβως που θελουμε: υπαρχει μια μονον ευθεια διερχομενη απο τα δυο σημεια.

Οι προηγουμενοι ορισμοι διδουν ενα μοντελο της **επιπεδης** Ευκλειδειας γεωμετριας. Οπως ειναι φυσικο, το αναλογο μοντελο του Ευκλειδειου **χωρου** ειναι το $R\times R\times R$ (συνολο τριαδων πραγματικων αριθμων). **Σημεια** λεμε τις τριαδες (x,y,z), **επιπεδα** λεμε συνολα σημειων που ικανοποιουν εξισωσεις της μορφης: $ax+by+cz+d=0$, με $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Και δω οι τετραδες $(\lambda a,\lambda b,\lambda c,\lambda d)$ με $\lambda\neq 0$ οριζουν ολες το ιδιο επιπεδο. **Ευθεια** του χωρου λεμε το συνολο που οριζεται απο την τομη δυο επιπεδων. Η ευθεια περιγραφεται λοιπον απο συστημα

$$\begin{array}{c} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}$$

δυο ανεξαρτητων εξισωσεων που εχει απλη απειρια λυσεων. Η ευθεια ανηκει στο επιπεδο $ax+by+cz=0$, οταν η εξισωση αυτη μπορει να ληφθη σαν μια εκ των δυο εξισωσεων που οριζουν την ευθεια. Οι **ισομετριες** του χωρου ειναι απεικονισεις του χωρου στον εαυτο του $f: R\times R\times R \to R\times R\times R$, $(x',y',z')=f(x,y,z)$, που οριζονται απο εξισωσεις τις μορφης:

$$\left\{\begin{array}{l} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+b_1 \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+b_2 \\ z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+b_3 \end{array}\right\}$$

Οι σταθερες a_{ij} αποτελουν μια **ορθογωνια** μητρα (ή πινακα) A, που ικανοποιει την εξισωση (μητρων) $AA^t=I$. Το A^t συμβολιζει εδω την αναστροφη της μητρας A, δηλαδη την μητρα που εχει γραμμες τις στηλες της A. Το I συμβολιζει την μοναδιαια μητρα και AA^t συμβολιζει το γινομενο των μητρων. Οι ορθογωνιες μητρες περιγραφουν στροφες περι καποιον αξονα και συνθεσεις τετοιων στροφων με κατοπτρισμο ως προς καποιο επιπεδο. Δυο σχηματα του χωρου (δηλαδη δυο υποσυνολα του) Σ και Σ' λεγονται **ισα**, οταν υπαρχει μια ισομετρια f με την ιδιοτητα $f(\Sigma)=\Sigma'$. Με καποιες ελαχιστες γνωσεις γραμμικης αλγεβρας (*) και λιγη αντοχη στους λογαριασμους, αποδεικνυεται οτι το μοντελο αυτο πληροι τα αξιωματα της §1.

Και στις δυο περιπτωσεις, επιπεδου και χωρου, το μοντελο που διδει ο Hilbert δεν ειναι τιποτε αλλο παρα ενας **διανυσματικος χωρος** (2 και 3 διαστασεων αντιστοιχως), εφοδιασμενος με ενα **εσωτερικο γινομενο**. Το εσωτερικο γινομενο ειναι εκεινο που επιτρεπει τον ορισμο μηκους και μετρου γωνιας (*) και οι ορθογωνιες μητρες, βασει των οποιων οριζεται η ισοτητα σχηματων, δεν ειναι τιποτε αλλο παρα οι απεικονισεις που διατηρουν το εσωτερικο γινομενο. Το μοντελο γενικευεται στους λεγομενους **Ευκλειδειους διανυσματικους χωρους** n διαστασεων και στους λεγομενους **χωρους** Hilbert απειρων διαστασεων, πανω στους οποιους θεμελιωνεται η κβαντομηχανικη. Αξιοσημειωτο επισης στο μοντελο ειναι και το ξεκαθαρισμα της εννοιας της ισοτητας. Το συνολο των ισομετριων και στις δυο περιπτωσεις αποτελει μια αλγεβρικη δομη που ονομαζεται **ομαδα**. Ισοτητα σημαινει απεικονιση του

(*)Δες λ.χ. Π. Παμφιλου, Γραμμικη Αλγεβρα, Εκδοσεις Τροχαλια, 1988 ενος σχηματος στο αλλο, μεσω καποιου στοιχειου της ομαδας. Ο Ευκλειδης χρησιμοποιει την εννοια της ισοτητας χωρις να την αναλυει. Παρατηρωντας τις αποδειξεις του ομως, βλεπουμε οτι δυο σχηματα θεωρουνται ισα, οταν το ενα προκυπτει απο το αλλο μεσω στροφων, κατοπτρισμων και μεταφορων (αυτες ακριβως οι απεικονισεις περιγραφονται με τις εξισωσεις (2)). Το συνολο της θεωριας δεν ειναι παρα μια συλλογη ιδιοτητων σχηματων που παραμενουν αναλλοιωτες κατω απο την δραση των ισομετριων. Τουτη η παρατηρηση οδηγησε τον F. Klein (1849-1925) το 1872, στο προγραμμα του Erlangen (Erlanger Programm), που σημερα αποτελει την γενικοτατη αντιληψη της Γεωμετριας: Γεωμετρια ειναι η θεωρια των **Αναλλοιωτων** ομαδων μετασχηματισμων. Αναλλοιωτα μπορουν να ειναι μηκη, εμβαδα, σχηματα, συναρτησεις, ακομη και ολοκληρες αυτοτελεις μαθηματικες δομες, οπως ομαδες, δακτυλιοι, διανυσματικοι χωροι κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι κυκλος και ευθεια εχουν δυο το πολυ κοινα σημεια.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι δυο κυκλοι ισων ακτινων ειναι ισοι.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι δυο ευθειες του επιπεδου ειναι ισες.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Περιγραψε με εξισωσεις της μορφης (2) τις εξης ισομετριες του επιπεδου: α) Ταυτοτικη απεικονιση β) Συμμετρια ως προς κεντρο το (0,0). γ) Κατοπτρισμο ως προς τον x-αξονα. δ) Κατοπτρισμο ως προς την διαγωνιο x=y. ε) Στροφη περι το (0,0) κατα γωνια π/2 και κατα γωνια π/4.

Η πολυχρονιος πειρα εδειξε και καθημεραν δειχνει, οτι η κακια βασιλευει εις τα εθνη αναλογως με την απαιδευσιαν αυτων. Σημειωσε, νεε, και την δοξαν των προγονων σου "Ηθεα βαθυτερα η κατα Θρηϊκας, οια Ελλησι τε ομιλησαντα", και παρατηρησε πως τα φωτισμενα εθνη γινονται παιδαγωγοι των απαιδευτων, και λαμβανουσιν τροπον τινα δεσποτικον δικαιωμα να τα χειραγωγωσιν, ως αι παραμαναι τα νηπια, ως οι βλεποντες τους τυφλους, και αν η παρατηρησις αυτη δεν αναψη παιδειας και φιλοσοφιας ερωτα εις την ψυχην σου, ειπε οτι δεν εχεις ανθρωπου ψυχην.

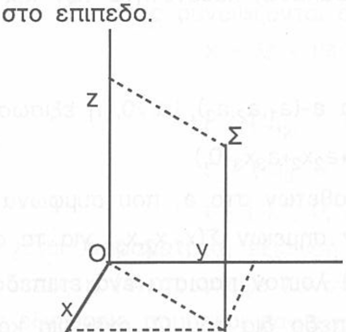
Κοραη, Προλεγομενα Ι σ. 458

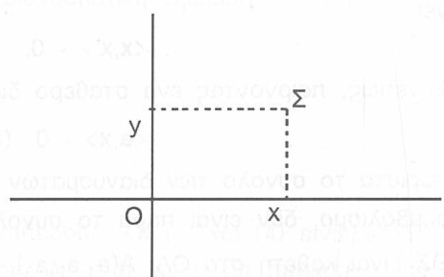
7. ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ποτε ο σκοπος μου δεν ξεπερασε την προσπαθεια μου να μεταρρυθμισω τις ατομικες μου σκεψεις και να χτισω σε χωρο ολοτελα δικο μου.
R. Descartes, Λογος περι μεθοδου

Η αναλυτικη γεωμετρια δεν ειναι νεο ειδος γεωμετριας. Ειναι μια αλλη τεχνικη αντιμετωπισης προβληματων της Ευκλειδειας γεωμετριας. Τουτη η τεχνικη, που εισηγαγε ο Descartes (1596-1650), δεν ειναι τιποτε αλλο παρα η χρηση συντεταγμενων, μεσω των οποιων, γεωμετρικες ιδιοτητες μετατρεπονται σε αριθμητικες σχεσεις, ταυτοτητες, εξισωσεις, συστηματα, κ.τ.λ.

Συντεταγμενες στο χωρο εισαγουμε διαλεγοντας τρεις, καθετους μεταξυ τους σε καποιο σημειο Ο, αξονες και οριζοντας κοινη μοναδα μετρησης σε καθε ενα απ αυτους. Τοτε σε καθε σημειο Σ του χωρου αντιστοιχουν οι συντεταγμενες του (x,y,z) και αντιστροφα, σε καθε τετοια τριαδα αντιστοιχει ενα ακριβως σημειο. Αναλογα οριζονται οι συντεταγμενες ως προς δυο καθετους αξονες στο επιπεδο.





Απο το Πυθαγορειο θεωρημα προκυπτει οτι η αποσταση $|ΟΣ|^2 = x^2+y^2+z^2$. Για την αποσταση δυο σημειων Σ(x,y,z) και Σ'(x',y',z') προκυπτει αναλογα οτι $|ΣΣ'|^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$. Χρησιμοποιωντας τον τυπο του συνημιτονου εχουμε για την γωνια φ μεταξυ των ΟΣ και ΟΣ':

$$|ΣΣ'|^2 = |ΟΣ|^2 + |ΟΣ'|^2 - 2|ΟΣ||ΟΣ'|\cos φ,$$

$$\cos φ = (|ΟΣ|^2 + |ΟΣ'|^2 - |ΣΣ'|^2)/2|ΟΣ||ΟΣ'|.$$

Αντικαθιστωντας τα |ΟΣ|,|ΟΣ'|,|ΣΣ'| με τις εκφρασεις τους συναρτησει των x,y,z βρισκουμε τελικα οτι

$$\cos\varphi = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Ειναι βολικο αντι της (x,y,z) να χρησιμοποιουμε την **διανυσματικη** γραφη:

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$$

καθως και το **εσωτερικο γινομενο** δυο διανυσματων $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$:

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

Ταυτιζοντας το σημειο Σ με το διανυσμα **x** που το παριστα, οι προηγουμενοι τυποι παιρνουν την μορφη:

$$|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle,$$

$$\cos\varphi = \langle \mathbf{x},\mathbf{x}'\rangle/|\mathbf{x}||\mathbf{x}'|.$$

Τα διανυσματα **x** μπορουμε να πολλαπλασιαζουμε με πραγματικους αριθμους και να προσθετουμε μεταξυ τους:

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3).$$

Συμφωνα με τον τυπο του συνημιτονου παραπανω, καθετοτητα των **x**,**x'** σημαινει

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}'\rangle = 0.$$

Συνεπως, παιρνοντας ενα σταθερο διανυσμα $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $|\mathbf{a}|\neq 0$, η εξισωση

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{x}\rangle = 0 \quad (\Leftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,) \qquad (1)$$

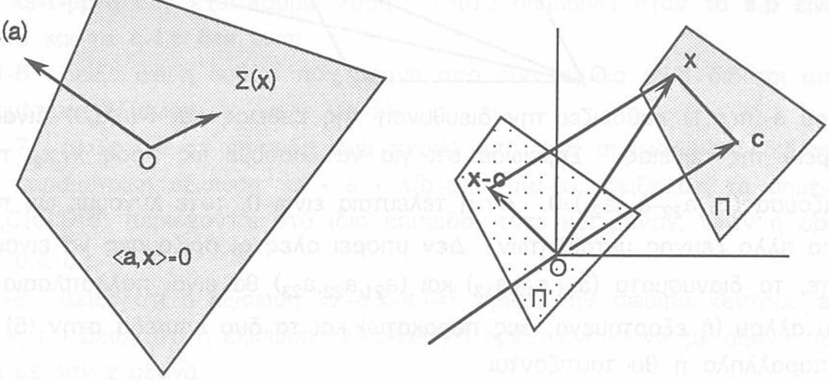
παριστα το συνολο των διανυσματων των καθετων στο **a**, που συμφωνα με τον συμβολισμο, δεν ειναι παρα το συνολο των σημειων $\Sigma(x_1,x_2,x_3)$ για τα οποια η ΟΣ ειναι καθετη στο ΟΑ, $A(a_1,a_2,a_3)$. Η (1) λοιπον παριστα ενα επιπεδο καθετο στο διανυσμα **a**. Αντιστροφα, καθε επιπεδο δια του Ο, εχει μια καθετο σ αυτο το σημειο και επομενως μπορει να παρασταθη με την εξισωση (1), αρα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Καθε επιπεδο δια του Ο συμπιπτει με το συνολο των λυσεων μιας εξισωσης της μορφης (1) (λεμε οτι παρισταται με την εξισωση (1)).

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Καθε επιπεδο του χωρου παρισταται με μιαν εξισωση της μορφης

$$\langle \mathbf{x}-\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle = 0 \;\text{ ή }\; \langle \mathbf{x},\mathbf{a}\rangle = k \quad (\text{οπου } k=\langle \mathbf{c},\mathbf{a}\rangle,\ |\mathbf{a}|\neq 0). \qquad (2)$$

Πραγματι, **x-c** παριστα το σημειο που προκυπτει απο το **x** μετατοπιζοντας το κατα το σταθερο διανυσμα **-c**. Οταν λοιπον το **x** διατρεχει το επιπεδο Π και **c** ειναι καποιο σταθερο σημειο του Π, τοτε το **x-c** θα παριστα ενα επιπεδο Π' που προκυπτει απο παραλληλη μετατοπιση του Π κατα το διανυσμα **-c** και επομενως περιεχει το Ο. Εφαρμοσε λοιπον την ΠΡ-1.



Παρατηρησε οτι η εξισωση (2), αναλυτικα, γραφεται

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 - k = 0. \tag{3}$$

Επειδη $|a|\neq 0$, καποιο απο τα a_i λ.χ. $a_1\neq 0$, μπορουμε να λυσουμε ως προς x_1, $x_1=(k-a_2x_2-a_3x_3)/a_1$. Το συνολο των λυσεων της (3), μπορουμε να περιγραψουμε παιρνοντας αυθαιρετα τα λ,μ και θετοντας $x_2=\lambda$, $x_3=\mu$, $x_1=(k-a_2\lambda-a_3\mu)$. Οι τρεις αυτες εξισωσεις συνοψιζονται σε μια διανυσματικη εξισωση:

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{s} + \mathbf{t}, \tag{4}$$

οπου

$$\mathbf{r} = (-a_2, 1, 0),$$
$$\mathbf{s} = (-a_3, 0, 1),$$
$$\mathbf{t} = (k, 0, 0)$$

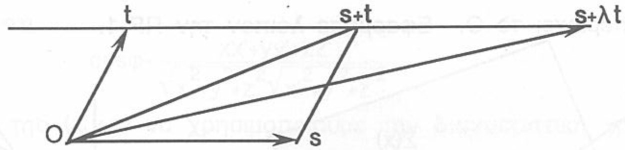
Η (4) λεγεται **παραμετρικη** εξισωση του επιπεδου. Οι (3) και (4) ειναι ισοδυναμες. Οπως η (4) προεκυψε λυνοντας την (3), ετσι και η (3) προκυπτει απο τις τρεις εξισωσεις που περιγραφει η (4), απαλοιφοντας απ αυτες τα λ,μ.

Οι (2),(3) και (4) ειναι ισοδυναμοι τροποι περιγραφης ενος επιπεδου. Μια ευθεια του χωρου μπορει να θεωρηθη σαν τομη δυο επιπεδων και να περιγραφη με τις λυσεις ενος συστηματος

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1&=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+b_2&=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Θετοντας $x_3=\lambda$ και λυνοντας το συστημα ως προς x_1,x_2, βρισκουμε οτι οι λυσεις του (5) περιγραφονται απο εξισωσεις της μορφης $x_3=\lambda$, $x_1=m\lambda+n$, $x_2=p\lambda+q$, για καταλληλα m,n,p,q. Τουτες συνοψιζονται στην **παραμετρικη** εξισωση:

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{s} + \mathbf{t}, \tag{6}$$



οπου $\mathbf{s}=(m,p,1)$ καθοριζει την διευθυνση της ευθειας και $\mathbf{t}=(n,q,0)$ ειναι καποιο σημειο της ευθειας. Σημειωσε οτι για να λυσουμε ως προς x_1,x_2, πρεπει η οριζουσα $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\neq 0$. Αν η τελευταια ειναι 0, τοτε λυνουμε ως προς καποιο αλλο ζευγος μεταβλητων. Δεν μπορει ολες οι οριζουσες να ειναι 0, διοτι τοτε, τα διανυσματα (a_{11},a_{12},a_{13}) και (a_{21},a_{22},a_{23}) θα ειναι πολλαπλασια το ενα του αλλου (ή εξαρτημενα, δες παρακατω) και τα δυο επιπεδα στην (5) θα ειναι ή παραλληλα ή θα ταυτιζονται.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι η αποσταση δυο σημειων $A(\mathbf{a}),B(\mathbf{b})$ διδεται απο τον αριθμο $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το εσωτερικο γινομενο $\langle x,y\rangle$ ικανοποιει τις εξισωσεις:

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle ,$$
$$\langle \lambda x+\mu x',y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle+\mu\langle x',y\rangle ,$$
$$\langle x,\lambda y+\mu y'\rangle=\lambda\langle x,y\rangle+\mu\langle x,y'\rangle ,$$

για καθε ζευγος (λ,μ) πραγματικων αριθμων και οποιαδηποτε διανυσματα $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι τα δυο επιπεδα $\langle \mathbf{a},\mathbf{x}\rangle-k=0$, $\langle \mathbf{b},\mathbf{x}\rangle-m=0$ ειναι παραλληλα, τοτε και μονον, οταν υπαρχουν πραγματικοι αριθμοι λ,μ ετσι ωστε $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=\mathbf{0}$ και $\lambda k+\mu m\neq 0$.

Θυμιζω μερικα στοιχεια απο την γραμμικη αλγεβρα:

- **Ανεξαρτητα** λεγονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_k$ οταν η μοναδικη λυση της εξισωσης $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+...+\lambda_k\mathbf{a}_k = 0$, ειναι η $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = 0$. **Εξαρτημενα** λεγονται οταν δεν ειναι ανεξαρτητα.
- Τα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ ειναι τοτε ακριβως ανεξαρτητα, οταν η οριζουσα $|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}|$ που εχει στηλες τις συντεταγμενες των διανυσματων ειναι 0.
- **Βαση** του R^3 λεμε ενα συνολο $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ τριων ανεξαρτητων διανυσματων. Η βαση αυτη λεγεται **ορθοκανονικη** οταν $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=1$ και $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle=\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle=0$.
- 4 διανυσματα του R^3 ειναι παντοτε εξαρτημενα και για καθε βαση $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ και τυχον διανυσμα $\mathbf{x}$, υπαρχουν μονοσημαντα ορισμενοι αριθμοι λ,μ,ν ετσι ωστε $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$. Τα (λ,μ,ν) λεγονται συντεταγμενες ως προς αυτην την βαση.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι τρια σημεια $A(\mathbf{a}),B(\mathbf{b}),C(\mathbf{c})$ περιεχονται στο ιδιο επιπεδο που περνα απο το O, τοτε και μονον, οταν ειναι γραμμικα εξαρτημενα.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι δυο ευθειες $x=\lambda s+t$, $x'=\mu p+q$ ειναι παραλληλες, οταν το συστημα $\lambda s+t=\mu p+q$ δεν εχει καμμια λυση. Τουτο συμβαινει οταν τα s,p ειναι εξαρτημενα και τα q-t,s δεν ειναι.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι η ευθεια που περνα απο δυο σημεια a, b διδεται απο την παραμετρικη εξισωση $x = a + \lambda(b-a)$.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι το επιπεδο που περνα απο τρια σημεια a,b,c διδεται απο την παραμετρικη εξισωση $x = a + \lambda(b-a) + \mu(c-a)$. Δειξε οτι τα σημεια A(a),B(b),C(c),D(d) περιεχονται στο ιδιο επιπεδο, τοτε και μονον, οταν η οριζουσα $|a-b,a-c,a-d|=0$.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι η εξισωση $<x-a,x-a>=r^2$ οριζει την σφαιρα κεντρου a και ακτινας r. Δειξε οτι η εξισωση $z^2=c^2(x^2+y^2)$ οριζει ενα κωνο με αξονα που συμπιπτει με τον z-αξονα.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι η καθετος απο σημειο c του επιπεδου $<a,x>-k=0$, διδεται απο την εξισωση $x = \lambda a+c$. Δειξε οτι ο ιδιος τυπος διδει την καθετο απ το c και στην περιπτωση που το c δεν περιεχεται στο επιπεδο. Στην τελευταια περιπτωση, δειξε οτι το σημειο c', στο οποιο η καθετος τεμνει αυτο το επιπεδο ειναι το $c'= ((k-<a,c>)/<a,a>)a+c$.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Βρες πως συνδεονται τα s,s',t,t' οταν $x=\lambda s+t$, $x'=\lambda's'+t'$ ειναι παραμετρικες εξισωσεις της ιδιας ευθειας. Βρες πως συνδεονται τα r,s,t,r',s',t' οταν οι παραμετρικες εξισωσεις $x=\lambda r+\mu s+t$, $y=\lambda' r'+\mu' s'+t'$ παριστουν την ιδια ευθεια.

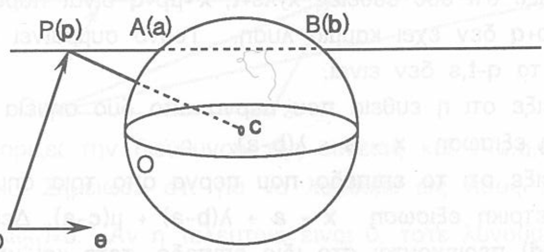
ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι καθε εφαπτομενο επιπεδο της μοναδιαιας σφαιρας $S^2=(x\in R^3|\ |x|=1)$ εχει μια παραμετρικη εξισωση της μορφης $y=e_1+\lambda e_2+\mu e_3$, οπου (e_1,e_2,e_3) ορθοκανονικη βαση. Δειξε οτι καθε επιπεδο του χωρου εχει την παραμετρικη εξισωση $x=de_1+\lambda e_2+\mu e_3$, οπου d η αποσταση του O απο το επιπεδο και (e_1,e_2,e_3) ορθοκανονικη βαση.

Ας δουμε μια γενικευση των προτασεων III-35,III-36 (σελ.23) και τον ορισμο της **δυναμης** σημειου A(a) ως προς μια σφαιρα $<x-b,x-b>=r^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Εστω Σ σφαιρα και P σημειο εκτος αυτης. Για καθε ευθεια διερχομενη απο το P και τεμνουσα την Σ σε δυο σημεια A,B, το γινομενο των ευθυγραμμων τμηματων $|PA||PB|$ ειναι σταθερο και ανεξαρτητο της τεμνουσας.

Πραγματι, η ευθεια δια του P μπορει να γραφει στην παραμετρικη μορφη $x = te + p$, με e μοναδιαιο, δηλαδη $|e|=1$, οποτε $|x-p|=t$ ειναι η αποσταση των σημειων x και p. Τα σημεια τομης αυτης της ευθειας και της σφαιρας

$$<x-c,x-c>=r^2 ,$$



διδονται απο τα t που ικανοποιουν την εξισωση

$$<te+p-c,te+p-c>=r^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$t^2 + 2t<e,p-c> + <p-c,p-c>-r^2 = 0.$$

Αν λοιπον t_1,t_2 ειναι οι ριζες αυτης της τετραγωνικης εξισωσης, το γινομενο των ευθυγραμμων τμηματων ειναι $|PA||PB| = t_1t_2 = <p-c,p-c>-r^2$, που ειναι ανεξαρτητο του e (δηλαδη της διευθυνσης της ευθειας).

Μεσω των συντεταγμενων και της ταυτισης, του Ευκλειδειου χωρου E^3 με τον διανυσματικο χωρο R^3, που οριζουν, μπορουμε να υπολογισουμε τις **ισομετριες** του E^3. Τουτες ειναι απεικονισεις που διατηρουν την αποσταση, επομενως, της μορφης $f: R^3 \to R^3$, με την ιδιοτητα

$$|f(x)-f(y)| = |x-y| \text{ , για καθε ζευγος } x,y \in R^3. \quad (7)$$

ΑΣΚΗΣΗ-12 Οι **Μεταφορες**, δηλαδη απεικονισεις της μορφης $f_c(x)=x+c$, για καποιο σταθερο $c \in R^3$, ειναι ισομετριες.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι για καθε ισομετρια f, υπαρχει καταλληλη μεταφορα f_c, ετσι ωστε $(f_c \circ f)(0)=0$. (Παρε $c=-f(0)$)

ΑΣΚΗΣΗ-14 Για μια ισομετρια f, που εχει την ιδιοτητα $f(0)=0$, ισχυει επισης

$$<f(x),f(y)> = <x,y> \text{, για καθε ζευγος } x,y \in R^3. \quad (8)$$

(Κατ αρχην, $|f(x)| = x$, για καθε x. Κατοπιν $<f(x)-f(y),f(x)-f(y)> = |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2<f(x),f(x)> = |x|^2 + |y|^2 - 2<x,y> = <x-y,x-y>$.)

Θυμιζω λιγες ακομα εννοιες απο την γραμμικη αλγεβρα. **Γραμμικη** λεγεται η απεικονιση $f: R^3 \to R^3$, οταν ισχυει

$$f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y) \text{ , για καθε } \lambda,\mu \in R \text{ και καθε } x,y \in R^3. \quad (9)$$

Σε καθε γραμμικη απεικονιση f, αντιστοιχει η μητρα $A_f = (f(e_1),f(e_2),f(e_3))$, που εχει στηλες, τις συντεταγμενες των διανυσματων $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$ αντιστοιχως, οπου $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Οι εξισωσεις

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3$$
$$y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3$$

διδουν τις συντεταγμενες του $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, με την βοηθεια της μητρας $A_f=(a_{ij})$. Τις εξισωσεις αυτες συμβολιζουμε συνοπτικα με $\mathbf{y}=A_f\mathbf{x}$.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Δειξε οτι μια απεικονιση που ικανοποιει την (8) ειναι γραμμικη, και η αντιστοιχη μητρα A_f ειναι **ορθογωνια**, δηλαδη οι στηλες της αποτελουν μια ορθοκανονικη βαση.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Δειξε οτι μια ισομετρια του E^3 περιγραφεται, σε συντεταγμενες, μεσω εξισωσεων της μορφης $\mathbf{y}=A\mathbf{x}+\mathbf{c}$, οπου A ορθογωνια μητρα και $\mathbf{c}$ σταθερο διανυσμα.

ΑΣΚΗΣΗ-17 Δειξε οτι η αντιστροφη f^{-1} μιας ισομετριας f, ειναι επισης ισομετρια.

Οπως για τον χωρο, ετσι και για το επιπεδο, μπορουμε να ορισουμε τις αναλογες εννοιες: εσωτερικο γινομενο $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2$, παραμετρικη εξισωση ευθειας $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{s}+\mathbf{t}$, εξισωση ευθειας $ax_1+bx_2+c=0$, ισομετριες του επιπεδου κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΗ-18 Δειξε, χρησιμοποιωντας αναλογες μεθοδους με τις των ΑΣ-12 εως ΑΣ-16, οτι οι ισομετριες του Ευκλειδειου Επιπεδου E^2 συμπιπτουν με τις απεικονισεις που περιγραφονται στην (2) §6.

Παρ ολο που η αναλυτικη γεωμετρια προσφερει μια γενικη μεθοδο, οι λογαριασμοι στην συγκεκριμενη περιπτωση μπορει να ειναι δυσαρεστα περιπλοκοι, σε συγκριση με την αμεσοτητα του εξειδικευμενου γεωμετρικου συλλογισμου. Δοκιμασε λ.χ. ν αποδειξης, με τη χρηση συντεταγμενων, οτι τα υψη ενος τριγωνου τεμνονται σ ενα σημειο. Απο την αλλη μερια, με την βοηθεια συντεταγμενων, μπορουμε να ορισουμε, αμεσα και με απλο τροπο, σχηματα πολυ πιο πολυπλοκα απο επιπεδα και σφαιρες. Π.χ. δυο αξιολογες οικογενειες σχηματων ειναι, στον μεν χωρο οι **τετραγωνικες επιφανειες**, που οριζονται σαν συνολα σημειων που ικανοποιουν εξισωση της μορφης

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+mz+p=0 , \qquad (10)$$

στο δε επιπεδο, οι **τετραγωνικες καμπυλες**, που οριζονται απο εξισωσεις της μορφης

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+p=0. \qquad (11)$$

ΑΣΚΗΣΗ-19 Δειξε οτι οι καμπυλες (11) ειναι τομες των επιφανειων (10) με το (x,y)-επιπεδο.

Γενικωτερα, μια συναρτηση $F(x_1,x_2,x_3)=F(\mathbf{x})$ τριων μεταβλητων οριζει μεσω της εξισωσης $F(\mathbf{x})=0$ μια επιφανεια Σ. Αναλογα, μια συναρτηση δυο μεταβλητων $F(x)=F(x_1,x_2)$ οριζει μια καμπυλη K. Προφανως, μια ισομετρια f θα απεικονιζει την Σ σε μια αλλη επιφανεια $\Sigma'=f(\Sigma)$ και η αντιστροφη ισομετρια θα απεικονιζει την Σ' στην $\Sigma=f^{-1}(\Sigma')$ (αναλογα $K'=f(K)$, $K=f^{-1}(K')$). Οι Σ και Σ' θα εχουν το ιδιο "σχημα" και το μονο κατα το οποιο θα διαφερουν θα ειναι η θεση τους στο χωρο. Την εξισωση που παριστα την Σ' την βρισκουμε αμεσως σκεπτομενοι οτι $\mathbf{x}\in\Sigma \Leftrightarrow F(\mathbf{x})=0$, αρα $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})\in\Sigma' \Leftrightarrow \mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{y})\in\Sigma \Leftrightarrow F(f^{-1}(\mathbf{y}))=0$. Η εξισωση της Σ', $F(f^{-1}(x))=0$ μπορει να απλοποιηται σημαντικα, αν επιλεξουμε καταλληλα την f (ή την f^{-1}). Ας δουμε για παραδειγμα την καμπυλη (11). Το αριστερο μερος της εξισωσης ειναι η $F(x)=F(x_1,x_2)$. Μια ισομετρια του επιπεδου f^{-1} θα διδεται, συμφωνα με οσα ειπαμε παραπανω, μεσω των εξισωσεων $\mathbf{x}=f^{-1}(\mathbf{y})$, αναλυτικα:

$$x_1= \cos\varphi y_1-\sin\varphi y_2 ,$$

$$x_2= \sin\varphi y_1+\cos\varphi y_2 .$$

Ατικαθιστωντας στην (11) βρισκουμε την εξισωση $F(f^{-1}(y))=0$ της Σ':

$$a(\cos\varphi y_1-\sin\varphi y_2)^2+b(\cos\varphi y_1-\sin\varphi y_2)(\sin\varphi y_1+\cos\varphi y_2)+c(\sin\varphi y_1+\cos\varphi y_2)^2 +$$
$$+ d(\cos\varphi y_1-\sin\varphi y_2)+e(\sin\varphi y_1+\cos\varphi y_2)+p = 0. \qquad (12)$$

Εκτελωντας τις πραξεις βρισκουμε οτι ο συντελεστης του y_1y_2 ειναι

$$b' = b(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) + 2(c-a)(\cos\varphi\sin\varphi) = b\cos2\varphi+(c-a)\sin2\varphi \qquad (13)$$

Απο την (13) μπορουμε να προσδιορισουμε την γωνια φ, ετσι ωστε $b'=0$, οποτε η εξισωση (12) θα εχει την μορφη

$$a'y_1^2+c'y_2^2+d'y_1+e'y_2+p' = 0. \qquad (14)$$

Αναλογα με τους νεους συντελεστες a',c',d',e',p', η (14) μπορει να απλοποιηθη:

1) $a' \neq 0$ και $c' \neq 0$. Τοτε η (14) παιρνει την μορφη

$$a'\left(y_1+\frac{d'}{2a'}\right)^2+c'\left(y_2+\frac{e'}{2c'}\right)^2+\left(p'-\left(\frac{d'}{2a'}\right)^2-\left(\frac{e'}{2c'}\right)^2\right) = 0 .$$

Τουτη, αντικαθιστωντας $z_1=y_1+(d'/2a')$, $z_2=y_2+(e'/2c')$ (εξισωσεις που οριζουν μια μεταφορα του επιπεδου (ισομετρια)) και διαιρωντας με την τελευταια παρενθεση, αναγεται, αναλογα με τα προσημα των a',c', σε μια απο τις μορφες,

$$1.1)\ \frac{z_1^2}{m^2}+\frac{z_2^2}{n^2}=1 \ ,\ 1.2)\ \frac{z_1^2}{m^2}-\frac{z_2^2}{n^2}=1 \ ,\ 1.3)\ \frac{z_1^2}{m^2}-\frac{z_2^2}{n^2}=0 ,$$

καθως και ορισμενες αλλες, οι οποιες ή ειναι αδυνατες ή αναγονται στην 1.2 μεσω εναλλαγης των μεταβλητων z_1 και z_2 (κατοπτρισμος!). Απ αυτες, η 1.3 οριζει δυο ευθειες, η 1.1 οριζει μια ελλειψη και η 1.2 μια υπερβολη.

2) Αν ενα μονον εκ των a',c' ειναι μη μηδενικο, λ.χ. $a'\neq0$, $c'=0$, τοτε, με αναλογη διαδικασια μπορουμε ευκολα να δουμε οτι η εξισωση ή ειναι αδυνατη ή ανα-

γεται σε μια εξισωση της μορφης

$$2.1)\ z_1^2=0\ ,\quad 2.2)\ z_2=kz_1^2\ .$$

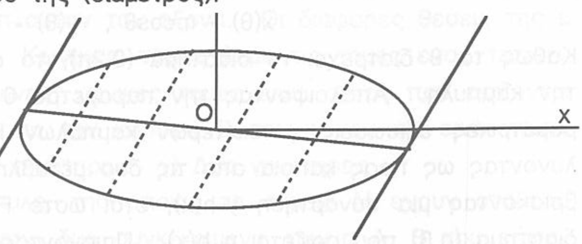
Η 2.2 οριζει μια παραβολη. Συνοψιζοντας τα προηγουμενα εχουμε την:

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Καθε τετραγωνικη καμπυλη Κ, στην εξισωση της οποιας δεν μηδενιζονται ολοι οι τετραγωνικοι οροι, ειναι ισομετρικη Κ=f(Κ') με μια τετραγωνικη καμπυλη Κ' που οριζεται απο εξισωσεις της μορφης 1.1 - 2.2.

Ενα γεωμετρικο ορισμο αυτων των καμπυλων (κωνικων τομων) θα δουμε στην επομενη παραγραφο. Εδω, ας δουμε ενα τελευταιο παραδειγμα εφαρμογης των μεθοδων της αναλυτικης γεωμετριας.

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Τα μεσα παραλληλων χορδων μιας ελλειψης περιεχονται σε μια ευθεια που περνα απο το κεντρο της (διαμετρος).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (*)$$



Σε συντεταγμενες x,y μια ελλειψη μπορει να περιγραφη με την εξισωση (*). Οι παραμετρικες εξισωσεις μιας ευθειας ειναι στο επιπεδο οπως και στο χωρο $\mathbf{x}=t\mathbf{s}+\mathbf{p}$. Το $\mathbf{s}=(s_1,s_2)$ μπορουμε να το παρουμε επι της ελλειψης ($s_1^2/a^2+s_2^2/b^2=1$) και το $\mathbf{p}$ μπορουμε να το παρουμε πανω στον x-αξονα $\mathbf{p}=(p,0)$. Τοτε τα σημεια τομης της ελλειψης με την ευθεια $\mathbf{x}=t\mathbf{s}+\mathbf{p}$ τα βρισκουμε αντικαθιστωντας το $\mathbf{x}$ στην (*) και βρισκοντας τις ριζες ως προς t:

$$(s_1t+p)^2/a^2+(s_2t)^2/b^2=1 \Leftrightarrow t^2+2(s_1p/a^2)t+p^2/a^2-1=0\ .$$

Αν t_1,t_2 ειναι οι ριζες του τετραγωνικου πολυωνυμου, τοτε $\mathbf{y}_1=t_1\mathbf{s}+\mathbf{p}$, $\mathbf{y}_2=t_2\mathbf{s}+\mathbf{p}$ ειναι τα σημεια τομης της ευθειας με την ελλειψη και $\mathbf{y}=((t_1+t_2)/2)\mathbf{s}+\mathbf{p}$ ειναι το μεσον της χορδης με ακρα τα $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2$. Απο τον γνωστο τυπο για το ημιαθροισμα των ριζων τετραγωνικου πολυωνυμου, εχουμε

$$\mathbf{y}=(-s_1p/a^2)\mathbf{s}+\mathbf{p}=p(-s_1^2/a^2+1,\ -s_1s_2/a^2)=p\sigma,$$

που ειναι η παραμετρικη (για μεταβαλλομενο p) εξισωση μιας ευθειας, που περνα απο το κεντρο (συμμετριας) της ελλειψης.

Οι διευθυνσεις που οριζονται απο τα διανυσματα $\mathbf{s}$ και $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ λεγονται **συζυγεις** διευθυνσεις της ελλειψης και ικανοποιουν την εξισωση

$$\frac{s_1\sigma_1}{a^2} + \frac{s_2\sigma_2}{b^2} = 0\,, \qquad (*)$$

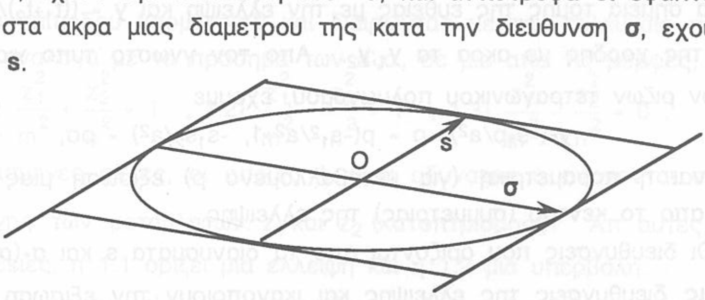
που ειναι συμμετρικη ως προς s_i και σ_i. Τουτο σημαινει, οτι και η **s** ειναι η συζυγης διευθυνση της **σ**, με αλλα λογια, και οι χορδες οι παραλληλες προς την **σ**, θα εχουν τα μεσα τους επ ευθειας που περνα απο το O και εχει διευθυνση s.

Οπως ειδαμε, οι ευθειες του επιπεδου περιγραφονται με δυο τροπους: α) με μια εξισωση $ax+by+c=0$ και β) με μια παραμετρικη εξισωση $x=\lambda s+t$. Αναλογους τροπους περιγραφης εχουμε και για γενικωτερες καμπυλες. Π.χ. η ελλειψη που περιγραφεται με την εξισωση 1.1 παραπανω μπορει να περιγραφη και με τις **παραμετρικες εξισωσεις**:

$$x(\theta) = m\cos\theta\ ,\quad y(\theta) = n\sin\theta.$$

Καθως το θ διατρεχει το διαστημα $(0,2\pi)$, το σημειο $x(\theta)=(x(\theta),y(\theta))$ διατρεχει την καμπυλη. Απαλοιφοντας την παραμετρο θ παιρνουμε ξανα την 1.1. Παραμετρικες εξισωσεις γενικωτερων καμπυλων $F(x,y)=0$, προκυπτουν, συνηθως, λυνοντας ως προς καποια απο τις δυο μεταβλητες π.χ. την y, με αλλα λογια, βρισκοντας μια συναρτηση $y=h(x)$, ετσι ωστε $F(x,h(x))=0$, να ισχυει σε καποιο διαστημα (α,β) που οριζεται η $h(x)$. Παιρνοντας κατοπιν $x = t$, $y = h(t)$,εχουμε μια παραμετρικη εξισωση της καμπυλης. Απαλοιφοντας απ τις δυο εξισωσεις το t, βρισκουμε την αρχικη εξισωση. Αν στις παραμετρικες εξισωσεις μιας καμπυλης $x = h(t)$, $y = k(t)$, οι συναρτησεις $h(t),k(t)$ παραγωγιζονται και οι παραγωγοι $(h'(t),k'(t)) \neq (0,0)$, τοτε η ευθεια $\mathbf{x} = \lambda(h'(t),k'(t))+(h(t),k(t))$ αποδεικνυεται, με την βοηθεια στοιχειωδους απειροστικου λογισμου, οτι συμπιπτει με την εφαπτομενη της καμπυλης στο σημειο $(h(t),k(t))$.

ΑΣΚΗΣΗ-20 Με τους συμβολισμους της τελευταιας προτασης, δειξε οτι η εφαπτομενες της ελλειψης στα ακρα μιας διαμετρου της που αποτεμνει η ευθεια $x = \lambda\mathbf{s}$, εχουν την διευθυνση του **σ**, και αντιστροφα οι εφαπτομενες της ελλειψης στα ακρα μιας διαμετρου της κατα την διευθυνση **σ**, εχουν την διευθυνση του **s**.



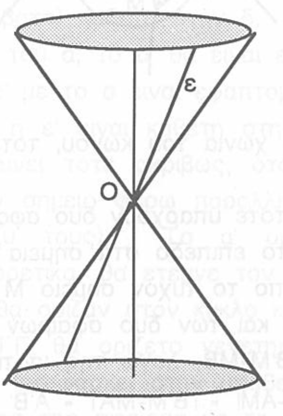
8. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

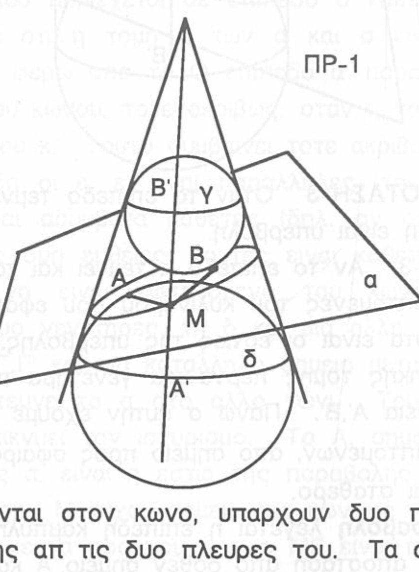
> Ο δε του μεν διδασκαλου ειχετο, το δε της πολεως ηθος ατοπον θ ηγειτο κου χρηστον εμφιλοσοφησαι, τρυφης τε γαρ ουδαμου μαλλον απτονται, σκωπτολαι τε και υβρισται παντες, και δεδωκασι τη οθονη μαλλον ή τη σοφια Αθηναιοι, ποταμος τ αυτους διαρρει Κυδνος, ω παρακαθηνται καθαπερ των ορνιθων οι υγροι.
>
> Φιλοστρατου, Βιος Απολλωνιου VII.

Ο κωνος (ορθος ή εκ περιστροφης) οριζεται περιστρεφοντας μια ευθεια ε που τεμνει τον z-αξονα γυρω απ αυτον τον αξονα. Οι διαφορες θεσεις της ε λεγονται γενετηρες του κωνου. **Κωνικες τομες** λεμε τις τομες ενος τετοιου κωνου με επιπεδο. Οι "τετριμμενες" κωνικες τομες ειναι αυτες που οριζονται οταν το επιπεδο τομης περνα απο την κορυφη Ο του κωνου και ειναι τριων ειδων: α) Το σημειο Ο, β) Μια γενετηρα, γ) Δυο γενετηρες .

Ελλειψη λεμε μια επιπεδη καμπυλη, της οποιας τα σημεια Μ εχουν σταθερο αθροισμα αποστασεων ΜΑ+ΜΒ, απο δυο συγκεκριμενα σημεια Α, Β του επιπεδου, που λεγονται **εστιες** της ελλειψης

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Οταν το επιπεδο τεμνει μονο το ενα χωνι του κωνου και ολες τις γενετηρες, τοτε η τομη ειναι ελλειψη.



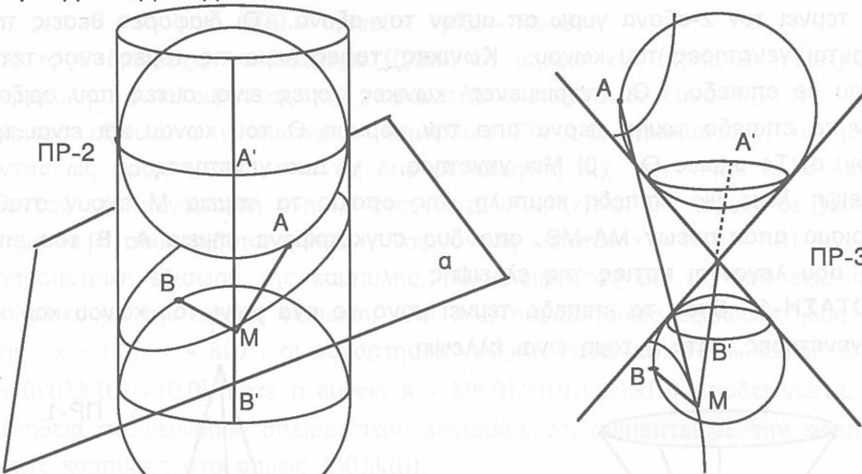


ΠΡ-1

Απ ολες τις σφαιρες που εφαπτονται στον κωνο, υπαρχουν δυο που εφαπτονται ταυτοχρονα στο επιπεδο τομης απ τις δυο πλευρες του. Τα σημεια επαφης Α,Β των σφαιρων αυτων με το επιπεδο τομης α, ειναι οι εστιες της ελλειψης. Πραγματι, εστω Μ σημειο της τομης και Α',Β' τα σημεια τομης της γενετηρας δια του Μ με τους κυκλους επαφης των σφαιρων και του κωνου αντιστοιχως. Επειδη ΜΑ,ΜΑ' ειναι εφαπτομενες σφαιρας απο το σημειο Μ, ειναι ισες. Παρομοια ΜΒ=ΜΒ'. Αρα ΜΑ+ΜΒ=ΜΑ'+ΜΒ'=Α'Β' που ειναι σταθερου μηκους, ανεξαρτητα της θεσης του Μ. Αναλογα αποδεικνυεται η.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Η τομη κυλινδρου με επιπεδο μη παραλληλο προς τις γενετηρες του ειναι ελλειψη.

Υπερβολη λεμε μια επιπεδη καμπυλη της οποιας τα σημεια Μ εχουν σταθερη διαφορα ΜΑ-ΜΒ απο δυο συγκεκριμενα σημεια του επιπεδου Α,Β, που λεγονται **εστιες** της υπερβολης.



ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Οταν το επιπεδο τεμνει και τα δυο χωνια του κωνου, τοτε η τομη ειναι υπερβολη.

ΠΡ-3: Αν το επιπεδο α τεμνει και τα δυο χωνια, τοτε υπαρχουν δυο σφαιρες εφαπτομενες του κυλινδρου που εφαπτονται και στο επιπεδο στα σημεια Α,Β. Τουτα ειναι οι εστιες της υπερβολης. Πραγματι απο το τυχον σημειο Μ της κωνικης τομης περνα μια γενετηρα που εφαπτεται και των δυο σφαιρων στα σημεια Α',Β'. Πανω σ αυτην εχουμε Α'Μ=ΑΜ και Β'Μ=ΜΒ, λογω της ισοτητας εφαπτομενων, απο σημειο προς σφαιραν. Αρα |ΒΜ-ΑΜ| = |Β'Μ-ΜΑ'| = Α'Β' που ειναι σταθερο.

Παραβολη λεγεται η επιπεδη καμπυλη της οποιας τα σημεια Μ απεχουν την ιδια αποσταση απο δοθεν σημειο Α και δοθησα ευθεια ε. Το σημειο Α λεγεται

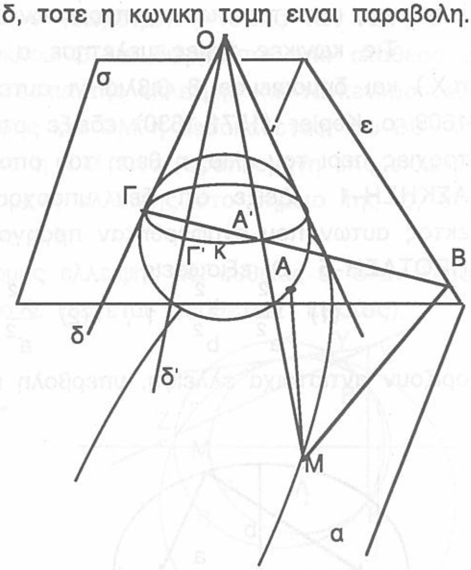
εστια της παραβολης και η ευθεια ε **διευθετουσα**.

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Οταν το επιπεδο α τεμνει μονο το ενα χωνι του κωνου και ειναι παραλληλο προς καποια γενετηρα δ, τοτε η κωνικη τομη ειναι παραβολη.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ Ο ΤΥΑΝΕΥΣ ΕΝ ΡΟΔΩ

Για την αρμοζουσα παιδευσι κι αγωγη
ο Απολλωνιος ομιλουσε μ εναν
νεον που εκτιζε πολυτελη
οικιαν εν Ροδω. "εγω δε ες ιερον"
ειπεν ο Τυανευς στο τελος "παρελθων
πολλω αν ηδιον εν αυτω μικρω
οντι αγαλμα ελεφαντος τε και χρυσου
ιδοιμι η εν μεγαλω κεραμεουν και φαυλον".-

Το "κεραμεουν" και "φαυλον", το σιχαμερο:
που κιολας μερικους (χωρις προπονησι αρκετη)
αγυρτικως εξαπατα. Το κεραμεουν και φαυλον.
Κ. Καβαφης



Εστω α το επιπεδο τομης και ας θεωρησουμε παλι την σφαιρα που εφαπτεται ταυτοχρονα του κωνου και του επιπεδου. Τουτη η σφαιρα εφαπτεται του κωνου κατα μηκος ενος κυκλου κ, που περιεχεται σε επιπεδο σ καθετο στον αξονα του κωνου. Δειχνω πρωτα οτι η τομη ε των α και σ ειναι (ασυμβατα) καθετη στην δ. Πραγματι, αν φερω απο το Ο επιπεδο α' παραλληλο του α, το α' θα ειναι εφαπτομενο του κωνου, τοτε ακριβως, οταν η τομη του ε' με το σ ειναι εφαπτομενη του κυκλου κ. Τουτο συμβαινει τοτε ακριβως, οταν η ε' ειναι καθετη στην δ και επειδη οι ε, ε' ειναι παραλληλες, τουτο συμβαινει τοτε ακριβως, οταν οι δ,ε ειναι ασυμβατα καθετες (δηλ. αν απο τυχον σημειο φερω παραλληλες προς τις δυο ευθειες, τουτες ειναι καθετες μεταξυ τους). Το α' ομως πρεπει να ειναι εφαπτομενο του κωνου. Διαφορετικα, θα ετεμνε τον κωνο κατα δυο γενετηρες, τη δ και μια αλλη δ', που θα οριζαν στον κυκλο κ δυο σημεια Γ,Γ' και για καταλληλο σημειο μεταξυ των ΓΓ' θα οριζετο γενετηρα που θα ετεμνε το α στο αλλο χωνι. Τουτο ομως αντιφασκει στην υποθεση και αποδεικνυει τον ισχυρισμο. Το Α, σημειο επαφης της σφαιρας με το επιπεδο τομης α, ειναι η εστια της παραβολης, η ευθεια ε ειναι η διευθετουσα. Πραγματι, εστω Μ τυχον σημειο της κωνικης τομης και ΜΒ η καθετος στην ε. Συμφωνα με τα προηγουμενα, η ΜΒ ειναι παραλληλος της δ, αρα η ΒΑ' περνα απο το Γ (η ευθεια των Β,Α' ειναι η τομη του σ με το επιπεδο των δ,ΜΒ). Το τριγωνο ΟΓΑ' ειναι ισοσκελες, αρα και το Α'ΜΒ ειναι ισοσκελες. Επομενως ΜΒ=ΜΑ'=ΜΑ, οπου η τελευταια ισοτητα ισχυει λογω της ισοτητας των εφαπτομενων της σφαιρας απο το σημειο Μ.

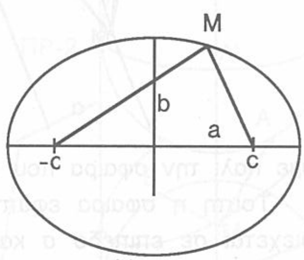
Τις κωνικες τομες μελετησε ο Απολλωνιος (Περγα Παμφυλιας 260-200 π.Χ.) και δημοσιευσε 8 βιβλια γι αυτες, που περιεχουν 487 θεωρηματα! Το 1609 ο Kepler (1571-1630) εδειξε οτι οι πλανητες κινουνται σε ελλειπτικες τροχιες περι τον ηλιο, η θεση του οποιου συμπιπτει με μια εστια της ελλειψης.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι δεν υπαρχουν αλλες περιπτωσεις κωνικων τομων, εκτος αυτων που αναφερθηκαν προηγουμενως.

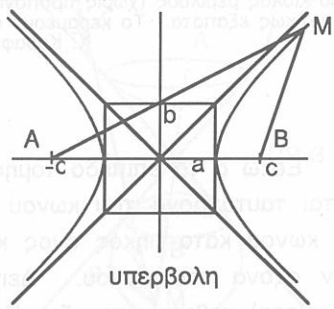
ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Οι εξισωσεις

$$(1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\quad (2)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\quad (3)\ y^2-4ax=0\ ,$$

οριζουν αντιστοιχα ελλειψη, υπερβολη και παραβολη (δες §7).

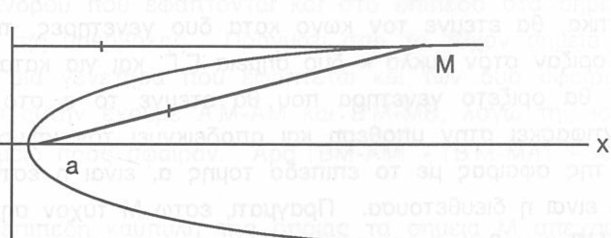


ελλειψη



υπερβολη

Για τα (1), (2): παρε δυο σημεια A(-c,0),B(c,0) και σταθερα a. Εξετασε την παρασταση $f(M)=((MA+MB)^2-4a^2)((MA-MB)^2-4a^2) = (MA^2-MB^2)^2-8a^2(MA^2+MB^2)+16a^4$ Ομως $MA^2=(x+c)^2+y^2$ και $MB^2=(x-c)^2+y^2$. Αρα $f(M)=16c^2x^2-8a^2(2x^2+2y^2+2c^2)+16a^4$ $= 16a^2(c^2-a^2)(x^2/a^2 + y^2/(a^2-c^2) - 1)$. Διακρινε δυο περιπτωσεις: $f(M)=0$ και $a>c$ (ελλειψη), $a<c$ (υπερβολη). Για την παραβολη παρε A(a,0) και την ευθεια (διευθετουσα) $x=-a$. Τοτε ΜΑ=ΜΓ, αρα $(x-a)^2+y^2=(x+a)^2 \Leftrightarrow y^2 - 4ax = 0$.

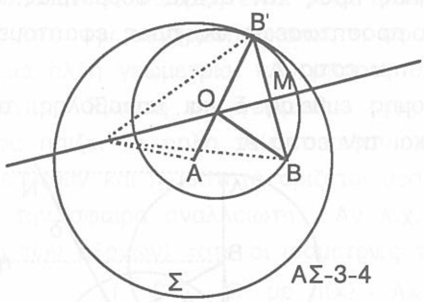


ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το γραφημα της συναρτησης $y=1/x$ ειναι υπερβολη, ισομετρικη της $x^2-y^2=2$.

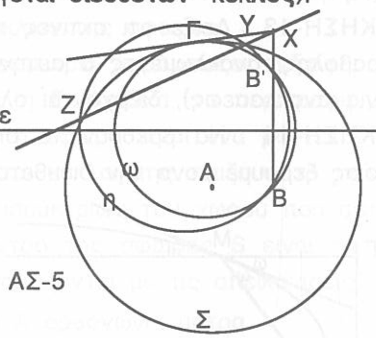
ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι η ελλειψη ειναι ο γεωμετρικος τοπος των κεντρων Ο κυκλων, που εφαπτονται δοθεντος κυκλου Σ και διερχονται απο σταθερο σημειο Β εντος του Σ. Το Β ειναι η μια εστια της ελλειψης και το κεντρο του Σ Α ειναι η αλλη. Αν Β' το σημειο επαφης και ΟΜ η μεσοκαθετος του ΒΒ', τοτε μονον το Ο ανηκει στην ελλειψη. Αρα η ΟΜ ειναι εφαπτομενη της ελλειψης.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Κατασκευασε την εφαπτομενη ελλειψης στο σημειο της Ο, οταν γνωριζεις μονο το Ο και τις δυο εστιες Α,Β.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Να βρεθουν τα σημεια τομης ελλειψης και ευθειας ε, οταν ξερουμε μονον τις εστιες Α,Β και τον κυκλο Σ (λεγεται **διευθετων κυκλος**).



ΑΣ-3-4

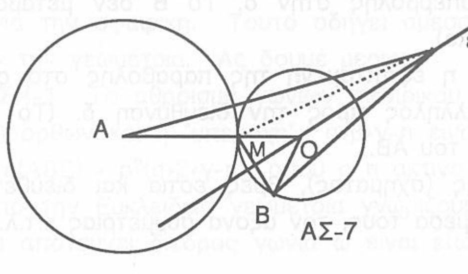


ΑΣ-5

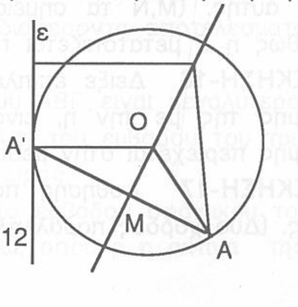
(ΠΡ-5: Αναγεται στο να βρεθη κυκλος ω διερχομενος απο το Β και Β', συμμετρικο του Β ως προς την ε, και εφαπτομενος του Σ. Το σημειο επαφης Γ του ω με τον Σ βρισκουμε με βοηθητικο κυκλο η.)

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δοθησης ελλειψεως (του σχηματος) να βρεθουν οι εστιες της. (Ενωσε τα μεσα δυο παραλληλων χορδων κ.τ.λ. ΠΡ-5 (§7))

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι η υπερβολη ειναι ο γεωμετρικος τοπος των κεντρων Ο κυκλων που εφαπτονται δοθεντος κυκλου Σ και διερχονται απο σταθερο σημειο Β εκτος του Σ. Αν Β' το σημειο επαφης και ΟΜ η μεσοκαθετος στο ΒΒ', δειξε οτι η ΟΜ δεν περιεχει αλλο σημειο της υπερβολης, αρα ειναι εφαπτομενη της.



ΑΣ-7



ΑΣ-12

ΑΣΚΗΣΗ-8 Κατασκευασε την εφαπτομενη σε σημειο Ο της υπερβολης, οταν γνωριζεις μονο το Ο και τις δυο εστιες Α,Β.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Να βρεθουν τα σημεια τομης υπερβολης και ευθειας ε, οταν ξερουμε μονο τις εστιες Α,Β και τον διευθετουντα κυκλο Σ.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Δειξε οτι τα μεσα παραλληλων χορδων της υπερβολης περιεχονται σε ευθεια που διερχεται απο το κεντρο συμμετριας της.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δοθησης υπερβολης (σχημα της) προσδιορισε τις εστιες της.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι η παραβολη ειναι ο γεωμετρικος τοπος των κεντρων Ο, κυκλων που εφαπτονται ευθειας ε και διερχονται απο σημειο Α εκτος αυτης. Αν Μ το μεσον του ΑΑ', τοτε η ΟΜ δεν περιεχει αλλο σημειο της παραβολης εκτος του Ο, αρα ειναι εφαπτομενη της παραβολης.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι ακτινες παραλληλες προς τον αξονα συμμετριας της παραβολης, ανακλωμενες σ αυτην (γωνια προσπτωσεως ως προς εφαπτομενη= γωνια ανακλασεως), διερχονται ολες απο την εστια Α.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Να βρεθουν τα σημεια τομης ευθειας δ και παραβολης, της οποιας ξερουμε μονο την διευθετουσα ε και την εστια Α.

ΑΣ-13

ΑΣ-14

(ΑΣ-14: Α' συμμετρικο του Α ως προς δ. Να βρεθη κυκλος διερχομενος απο τα ΑΑ' και εφαπτομενος της ε. Παρε βοηθητικο κυκλο ω, βρες τα Δ,Δ' κ.τ.λ.)

ΑΣΚΗΣΗ-15 Δειξε οτι τα μεσα χορδων παραβολης, παραλληλων προς δοθησα διευθυνση δ περιεχονται σε ευθεια η παραλληλη προς τον αξονα συμμετριας αυτης. (Μ,Ν τα σημεια της υπερβολης στην δ. Το Β δεν μεταβαλλεται καθως η δ μετατοπιζεται παραλληλα)

ΑΣΚΗΣΗ-16 Δειξε επιπλεον οτι η εφαπτομενη της παραβολης στο σημειο τομης της με την η, ειναι παραλληλος προς την διευθυνση δ. (Το σημειο τομης περιεχεται στην μεσοκαθετο του ΑΒ.)

ΑΣΚΗΣΗ-17 Δοθησης παραβολης (σχηματος), βρες εστια και διευθετουσα της. (Δυο χορδες παραλληλες, τα μεσα τους, τον αξονα συμμετριας κ.τ.λ.)

9. ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Και γαρ αυ τουτο δει ταγαθον τιθεσθαι, εις ο παντα ανηρτηται, αυτο δε εις μηδεν, ουτω γαρ και αληθες το ου παντα εφιεται. Δει ουν μενειν αυτο, προς αυτο δε επιστρεφειν παντα, ωσπερ κυκλον προς κεντρον αφ ου πασαι γραμμαι. Και παραδειγμα ηλιος ωσπερ κεντρον ων προς το φως το παρ αυτου ανηρτημενον προς αυτον. Πλωτινου, Εννεαδες Α7

Η σφαιρικη γεωμετρια και ειδικα η σφαιρικη τριγωνομετρια αναπτυχθηκαν απ τις αναγκες της σφαιρικης αστρονομιας. Σ αυτην παρουσιαζεται το προβλημα της "επιλυσης σφαιρικων τριγωνων", δηλαδη, τριγωνων της σφαιρας των οποιων οι πλευρες ειναι τοξα μεγιστων κυκλων της σφαιρας.

Απο την συγχρονη σκοπια, η σφαιρικη γεωμετρια παρουσιαζει ενδιαφερον σαν μια αλλη γεωμετρια, που μπορει, οπως και η Ευκλειδεια, να περιγραφη με αξιωματα. Σ αυτη την γεωμετρια (της οποιας η σφαιρα ειναι ενα μοντελο) η σφαιρα παιζει το ρολο του επιπεδου, οι μεγιστοι κυκλοι της παιζουν το ρολο των ευθειων και η ισοτητα οριζεται μεσω των ισομετριων του χωρου που αφηνουν την σφαιρα αναλλοιωτη. Αν λ.χ. το κεντρο της σφαιρας S ειναι το O (αρχη των αξονων) τοτε οι ισομετριες της S ταυτιζονται με τις απεικονισεις

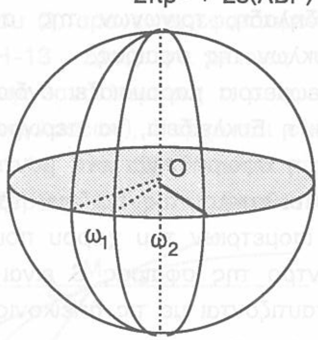
$$f : S \longrightarrow S \text{ με } f(x) = Ax \text{ , οπου } A \text{ ορθογωνια μητρα.}$$

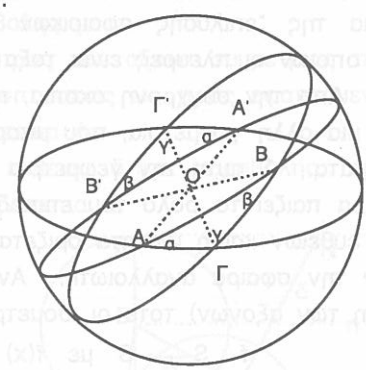
Σε αντιθεση με την μη-Ευκλειδεια ή υπερβολικη γεωμετρια, που θα εξετασουμε παρακατω, η σφαιρικη διαφερει απο την Ευκλειδεια σε περισσοτερα του ενος αξιωματα. Λ.χ. δυο οποιεσδηποτε "ευθειες" (μεγιστοι κυκλοι) της σφαιρας τεμνονται σε δυο σημεια, οι ευθειες ειναι κλειστες και καθε σημειο μιας τριαδας σημειων της περιεχεται μεταξυ των αλλων δυο, απο τους πολους ενος μεγιστου κυκλου αγονται απειρες καθετες σ αυτον κ.α. Θα μπορουσα να αναπτυξω την σφαιρικη γεωμετρια απο τα αξιωματα της, αναλογα με την Ευκλειδεια. Το συγκεκριμενο μοντελο της σφαιρας προσφερει ωστοσο την δυνατοτητα να χρησιμοποιησουμε τα μεσα της Ευκλειδειας γεωμετριας για να βγαλουμε συμπερασματα για την σφαιρικη. Τουτο οδηγει αμεσα σε ενδιαφεροντα αποτελεσματα γι αυτην την γεωμετρια. Ας δουμε μερικα.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Το αθροισμα γωνιων σφαιρικου τριγωνου ΑΒΓ ειναι μεγαλυτερο των δυο ορθων και η "υπεροχη" $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ ειναι αναλογη του εμβαδου του τριγωνου $\varepsilon(ΑΒΓ) = \rho^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$, οπου ρ η ακτινα της σφαιρας.

Απο την Ευκλειδεια γεωμετρια γνωριζουμε οτι το εμβαδον σφαιρικου τομεα που αποτεμνει διεδρος γωνια ω ειναι $\varepsilon(\omega) = 2\rho^2\omega$, οπου ρ η ακτινα της σφαιρας (προσθετικοτητα της ε: $\varepsilon(\omega_1+\omega_2)=\varepsilon(\omega_1)+\varepsilon(\omega_2)$ και συνεχεια της ε συνεπαγονται $\varepsilon(\omega)=\kappa\omega$. Το κ προσδιοριζεται παιρνοντας $\omega=2\pi$). Δοθεντος τωρα σφαιρικου τριγωνου ΑΒΓ με αντιποδικο (ή αντιδιαμετρικο) Α'Β'Γ', οι τρεις σφαιρικοι τομεις που οριζουν οι διεδροι α,β,γ (γωνιες που σχηματιζουν οι εφαπτομενες των μεγιστων κυκλων στα σημεια Α,Β,Γ αντιστοιχως) του τριγωνου, εχουν εμβαδον $2\rho^2(\alpha+\beta+\gamma)$. Απο την αλλη μερια, οπως φαινεται απο το σχημα (λαμβανοντας υποψιν την συμμετρια της σφαιρας), οι τομεις αυτοι καλυπτουν ενα ημισφαιριο εμβαδου $2\pi\rho^2$, συν, 2 φορες το εμβαδον ε(ΑΒΓ) του σφαιρικου τριγωνου. Εχουμε λοιπον

$$2\pi\rho^2 + 2\varepsilon(AB\Gamma) = 2\rho^2(\alpha+\beta+\gamma).$$





Σφαιρικα τριγωνα ΑΒΓ αντιστοιχουν, οπως φαινεται στο σχημα, σε τριεδρες στερεες γωνιες ΟΑΒΓ και αντιστροφως. Θεωρηματα της Ευκλειδειας γεωμετριας που αφορουν τριεδρους, μεταφραζονται λοιπον σε θεωρηματα για σφαιρικα τριγωνα. Η επομενη ασκηση ισοδυναμει με την γνωστη προταση της Ευκλειδειας γεωμετριας: κατα κορυφην τριεδρες γωνιες ειναι ισες.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Το σφαιρικο τριγωνο ΑΒΓ και το αντιποδικο του Α'Β'Γ' ειναι ισα. (Με την εννοια, οτι υπαρχει ισομετρια της σφαιρας με f(ΑΒΓ)=Α'Β'Γ' : f(x)=-x)

Δοθησης τριεδρου στερεας γωνιας ΟΑΒΓ κατασκευαζεται αλλη τριεδρος ΟΑ"Β"Γ" που λεγεται **παραπληρωματικη** της ΟΑΒΓ και της οποιας οι ΟΑ",ΟΒ" ΟΓ" ειναι προς το ιδιο μερος με τις ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ αντιστοιχως και καθετες στα επιπεδα ΟΒΓ,ΟΑΓ,ΟΑΒ αντιστοιχως. Πανω στη σφαιρα τα Α",Β",Γ" δεν ειναι αλλα απο τους πολους των ημισφαιριων που περιεχουν το ΑΒΓ και οριζονται απο τους μεγιστους κυκλους των πλευρων του. Το Α"Β"Γ" λεω παραπληρωματικο του ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το παραπληρωματικο του παραπληρωματικου σφαιρικου τριγωνου (ή αντιστοιχου τριεδρου) ειναι το αρχικο. Δειξε ακομη οτι, αν α,β,γ ειναι οι διεδρες γωνιες του ΑΒΓ και α",β",γ" οι διεδρες του Α"Β"Γ", $a=\angle B O \Gamma$, b=∠ΑΟΓ, c=∠ΑΟΒ, a"=∠Β"ΟΓ", b"=∠Α"ΟΓ", c"=∠Α"ΟΒ" οι αντιστοιχες επιπεδες γωνιες των τριεδρων, τοτε ισχυουν οι σχεσεις:

$$\alpha+a"=\beta+b"=\gamma+c"=\pi$$
$$\alpha"+a=\beta"+b=\gamma"+c=\pi.$$

Με αλλα λογια: οι επιπεδες γωνιες μιας τριεδρου ειναι παραπληρωματικες των διεδρων γωνιων της παραπληρωματικης της και αντιστροφως.

Απο την προηγουμενη ασκηση προκυπτει μια αλλη αποδειξη του οτι το αθροισμα των γωνιων α+β+γ σφαιρικου τριγωνου ειναι μεγαλυτερο του π. Πραγματι, $\alpha+\beta+\gamma = 3\pi - (a"+b"+c") > 3\pi - 2\pi = \pi$ (ΠΡ-ΧΙ-21, §4).

Οι επομενες ασκησεις ειναι μεταφραση, στην γλωσσα των σφαιρικων τριγωνων, ιδιοτητων των τριεδρων γωνιων. Διατηρω τους συμβολισμους της προηγουμενης ασκησης και με ρ συμβολιζω την ακτινα της σφαιρας. Τοτε 2πρ ειναι το μηκος των μεγιστων κυκλων και ρa,ρb,ρc ειναι το μηκος των πλευρων του σφαιρικου τριγωνου ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Αν δυο σφαιρικα τριγωνα εχουν δυο πλευρες ισες και τις περιεχομενες γωνιες αντιστοιχως ισες, τοτε ειναι ισα.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Αν δυο σφαιρικα τριγωνα εχουν τις τρεις πλευρες τους αντιστοιχα ισες, τοτε ειναι ισα.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Αν δυο σφαιρικα τριγωνα εχουν δυο γωνιες και τις περιεχομενες πλευρες αντιστοιχα ισες, τοτε ειναι ισα.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Αν δυο σφαιρικα τριγωνα εχουν τις γωνιες τους αντιστοιχα ισες, τοτε ειναι ισα (δεν υπαρχουν ομοια τριγωνα πανω στη σφαιρα!).

ΑΣΚΗΣΗ-7 Σε ισοσκελες σφαιρικο τριγωνο οι παρα την βαση γωνιες ειναι ισες.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Για καθε σφαιρικο ευθυγραμμο τμημα (τοξο μεγιστου κυκλου) υπαρχει η μεσοκαθετος και ειναι τουτη ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που ισαπεχουν απο τα ακρα του τμηματος.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Οι τρεις μεσοκαθετοι σφαιρικου τριγωνου τεμνονται σ ενα σημειο, κεντρο του περιγεγραμμενου κυκλου.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Οι τρεις διχοτομοι σφαιρικου τριγωνου διερχονται απο κοινο σημειο που ειναι κεντρο του εγγεγραμμενου κυκλου του τριγωνου.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Το αθροισμα των πλευρων σφαιρικου τριγωνου ειναι μικροτερο του 2πρ (μηκους μεγιστου κυκλου).

ΑΣΚΗΣΗ-12 Το αθροισμα των γωνιων α+β+γ σφαιρικου τριγωνου ειναι μικροτερο του 3π.

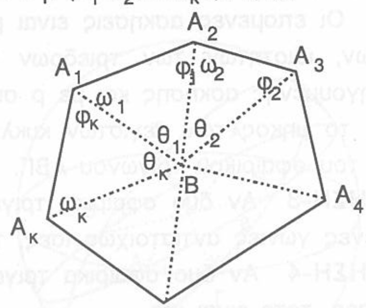
ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι υπαρχουν απειρα μη ισα ισοπλευρα σφαιρικα τριγωνα. Δειξε γενικωτερα οτι υπαρχουν απειρα μη ισα κανονικα σφαιρικα ν-γωνα.

Κυρτο λεμε το σφαιρικο πολυγωνο Π, οταν για καθε πλευρα του, το Π περιεχεται εξ ολοκληρου σ ενα εκ των δυο ημισφαιριων που αυτη οριζει.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Δειξε οτι το κυρτο σφαιρικο πολυγωνο Π συμπιπτει με την τομη ορισμενων ημισφαιριων (κλειστων: που συμπεριλαμβανουν τον μεγιστο κυκλο) και για καθε δυο σημεια του Α,Β, υπαρχει "ευθυγραμμο τμημα" (δηλ. τοξο μεγιστου κυκλου) που τα ενωνει, μηκους $\leq 2\pi\rho$, περιεχομενο εξ ολοκληρου μεσα στο πολυγωνο.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Το εμβαδον ενος κυρτου σφαιρικου πολυγωνου Π, με κ το πληθος εσωτερικες γωνιες $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\kappa$ ειναι $E = \rho^2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+(2-\kappa)\pi)$.

Παρε σημειο Β στο εσωτερικο του Π και σχηματισε τα τριγωνα που φαινονται στο σχημα. Καθ ενα εχει εμβαδον (ΠΡ-1) αναλογο του ω+φ+θ-π. Συνολικα, οι γωνιες ω,φ αθροιζομενες, διδουν το αθροισμα γωνιων του Π. Οι θ αθροιζομενες, διδουν 2π κι απ αυτες πρεπει ν αφαιρεσουμε κ2π.



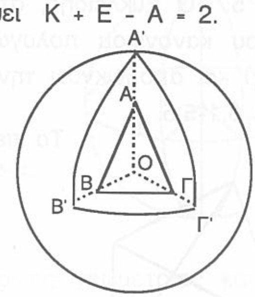
Χρησιμοποιωντας αυτην την προταση, μπορουμε τωρα να προχωρησουμε σε δυο ενδιαφεροντα θεματα, το θεωρημα του Euler και τον προσδιορισμο των 5 Πλατωνικων σωματων. Και τα δυο στηριζονται σε οικοπεδοποιησεις ή πλακοστρωσεις της σφαιρας με κυρτα πολυγωνα που εχουν ανα δυο την ιδιοτητα: οταν τεμνονται, να το κανουν κατα μια κορυφη τους ή κατα μια ολοκληρη πλευρα. Προκυπτει ετσι μια καλυψη της σφαιρας με πολυγωνα, που τεμνονται στις **κορυφες** της καλυψης και τις **ακμες** της καλυψης. Κορυφες ειναι τα σημεια στα οποια τεμνονται περισσοτερα απο δυο πολυγωνα. Ακμες ειναι τα ευθυγραμμα τμηματα (σφαιρικα) που ειναι κοινες πλευρες ακριβως δυο πολυγωνων.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Για καθε πλακοστρωση της σφαιρας με Ε το πληθος πολυγωνα που οριζουν Κ κορυφες και Α ακμες καλυψης, ισχυει $K + E - A = 2$.

Πραγματι, εστω $\Pi_1,\ldots,\Pi_E$ τα πολυγωνα της καλυψης και $\alpha_{\mu\nu}$ οι γωνιες του Π_μ, $\mu=1,\ldots,E$ και $\nu=1,\ldots,\gamma(\mu)$=πληθος γωνιων του Π_μ. Προφανως το εμβαδον της σφαιρας ειναι το αθροισμα των εμβαδων $4\pi\rho^2 = \varepsilon(\Pi_1)+\ldots+\varepsilon(\Pi_E)$. Κατα την ΠΡ-2 $\varepsilon(\Pi_\mu)=\rho^2(\alpha_{\mu 1}+\ldots+\alpha_{\mu\gamma(\mu)}+(2-\gamma(\mu))\pi)$, αρα αθροιζοντας, θα εχουμε συνολικα: $4\pi\rho^2 = \rho^2((\Sigma\alpha_{\mu\nu})+2\pi E-(\Sigma\gamma(\mu))\pi)$ (*). Το πρωτο αθροισμα λογαριαζουμε αθροιζοντας πρωτα τις γωνιες (απο τα διαφορα πολυγωνα που συντρεχουν) σε μια κορυφη της καλυψης. Τουτες διδουν αθροισμα 2π. Εχουμε Κ κορυφες, αρα συνολικα $\Sigma a_{\mu\nu}$=Κ2π. Το Σγ(μ) ειναι το πληθος των πλευρων ολων των πολυγωνων. Ισχυει ομως Σγ(μ)=2Α, αφου καθε ακμη της καλυψης ειναι κοινη πλευρα δυο ακριβως πολυγωνων. Αντικαταστησε στον (*) και διαιρεσε με $2\pi\rho^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 (Χαρακτηριστικη του Euler) Για καθε κυρτο πρισμα του Ευκλειδειου χωρου με Ε εδρες, Α ακμες και Κ κορυφες, ισχυει $K + E - A = 2$.

Παρε σημειο Ο, εσωτερικο του πρισματος και προβαλε το πρισμα σε μια αρκετα μεγαλη σφαιρα με κεντρο το Ο. Οι εδρες ΑΒΓ κ.τ.λ. του πρισματος προβαλονται σε σφαιρικα πολυγωνα Α'Β'Γ' κ.τ.λ. Προκυπτει μια καλυψη της σφαιρας με πολυγωνα που εχει Ε πολυγωνα, Κ κορυφες και Α ακμες.



ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Μια πλακοστρωση της σφαιρας με **ισα** μεταξυ τους **κανονικα** πολυγωνα ειναι δυνατη μονον στις εξης 5 περιπτωσεις.

5.1 Με 4 κανονικα τριγωνα.
5.2 Με 6 κανονικα τετραπλευρα.
5.3 Με 8 κανονικα τριγωνα.
5.4 Με 12 κανονικα πενταγωνα.
5.5 Με 20 κανονικα τριγωνα.

Πραγματι, ας υποθεσουμε οτι χρειαζονται m το πληθος κανονικα k-γωνα. Εστω επισης οτι σε μια κορυφη συνερχονται n το πληθος k-γωνα. Επειδη ολες οι γωνιες των πολυγωνων ειναι ισες, καθε μια τους θα ειναι 2π/n. Το εμβαδον καθε k-γωνου θα ειναι (ΠΡ-2): $\rho^2(k(2\pi/n)+(k-2)\pi)$ και το εμβαδον της σφαιρας θα ειναι το αθροισμα των εμβαδων των m ισων πολυγωνων $4\pi\rho^2 = \rho^2(k(2\pi/n)+(k-2)\pi)m$. Διαιρωντας με $\pi\rho^2$ παιρνουμε την σχεση μεταξυ m,n και k:

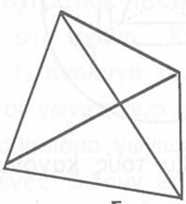
$$2km + (2-k)mn = 4n. \qquad (1)$$

Για k=3 (κανονικα τριγωνα), n>2 και m>1, 6m - mn = 4n εχει τις εξης ακεραιες λυσεις: n=3 ⇒ m=4, περιπτωση 5.1. n=4 ⇒ m=8, περιπτωση 5.3 και n=5 ⇒ m=20, περιπτωση 5.5. Ολες οι αλλες τιμες του n, για k=3, οδηγουν σε παραλογα. Για k>3 η (1) συνεπαγεται την ανισοτητα $(k-2)mn < 2km$, αρα $(k-2)n < 2k$, η οποια για $n \geq 3$ δινει $k < 6$, αρα k = 4,5 (k=3 το εξετασαμε). Αντικαθιστωντας παλι στην (1) k=4 και δοκιμαζοντας ακεραιες τιμες των n,m βρισκουμε οτι η μονη δυνατοτητα ειναι n=3, m=6, περιπτωση 5.2. Αναλογα k=5, δινει την 5.4.

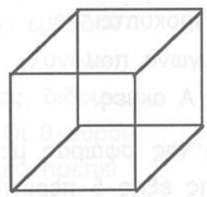
ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Υπαρχουν 5 το πολυ Πλατωνικα σωματα, δηλαδη κυρτα πρισματα, εγγραψιμα σε σφαιρα, των οποιων οι εδρες ειναι ισα κανονικα πολυγωνα. Πραγματι, προβαλλοντας ενα τετοιο πρισμα πανω στην περιγεγραμμενη σφαιρα, απο το κεντρο, προκυπτει μια πλακοστρωση της σφαιρας με ισα κανονικα σφαιρικα πολυγωνα. Το συμπερασμα ειναι λοιπον συνεπεια της ΠΡ-5.

Η προηγουμενη προταση περιοριζει το πληθος των Πλατωνικων σωματων σε 5. Ο Ευκλειδης, στο 13ο βιβλιο των στοιχειων του, κατασκευαζει την ακμη του κανονικου πολυγωνου (δοθησης της ακτινας της περιγεγραμμενης σφαιρας) και αποδεικνυει την **υπαρξη** του πρισματος που αναλογει σε καθε μια απο τις 5.1-5.5.

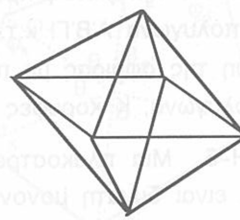
Τα πεντε Πλατωνικα σωματα



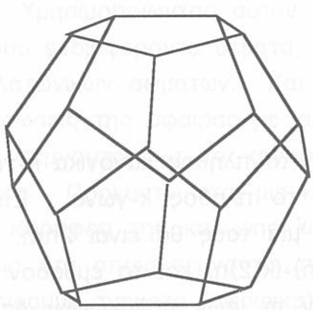
τετραεδρο



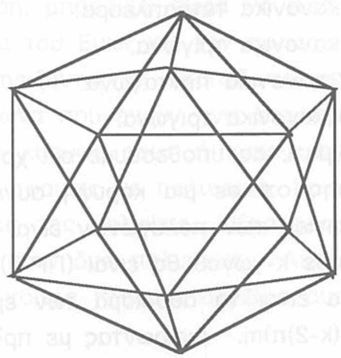
κυβος



οκταεδρο

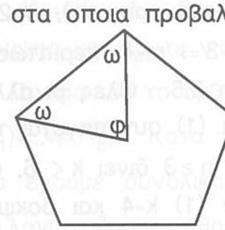


δωδεκαεδρο



εικοσαεδρο

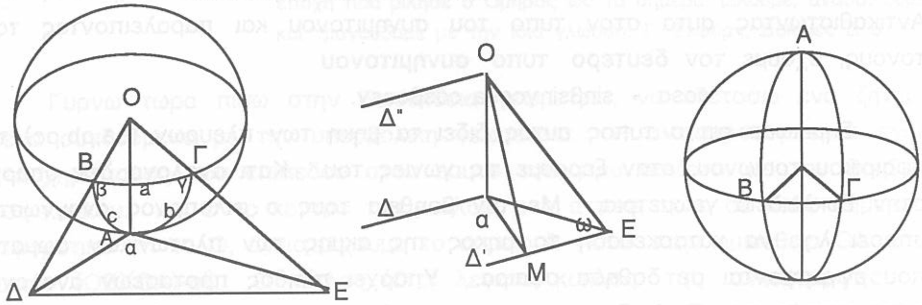
Σημειωνω οτι τα σφαιρικα κανονικα πολυγωνα στα οποια προβαλλονται οι εδρες των σωματων κατασκευαζονται, διοτι ξερουμε τις γωνιες τους. Ετσι, λ.χ. το δωδεκαεδρο οριζει σφαιρικα πολυγωνα με γωνιες $2\pi/3$. Ενωνοντας το κεντρο του με τις κορυφες, σχηματιζονται σφαιρικα ισοσκελη τριγωνα με γωνιες $\omega=2\pi/6$ και $\varphi=2\pi/5$.



Η συνδεση των γωνιων με τα μηκη των πλευρων σφαιρικου τριγωνου γινεται με την βοηθεια της σφαιρικης τριγωνομετριας, που στηριζεται στον εξης τυπο:

ΠΡΟΤΑΣΗ-7 Εστω οτι α,β,γ ειναι οι διεδρες γωνιες σφαιρικου τριγωνου ΑΒΓ και a,b,c οι επιπεδες γωνιες, απεναντι των α,β,γ αντιστοιχως. Τοτε ισχυει:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$



Τουτος ειναι ο **τυπος του συνημιτονου** της σφαιρικης γεωμετριας και αποδεικνυεται με την βοηθεια του τυπου του συνημιτονου της Ευκλειδειας γεωμετριας. Στο παραπανω σχημα, το επιπεδο τριγωνο ΑΔΕ σχηματιζεται στο εφαπτομενο επιπεδο της σφαιρας στο Α, προεκτεινοντας τις ακτινες στα Β,Γ. Αν η ακτινα της σφαιρας ειναι ρ, τοτε $O\Delta = \rho/\cos c$, $OE = \rho/\cos b$. Εφαρμοζοντας τον τυπο του συνημιτονου στο ευθυγραμμο τριγωνο ΟΔΕ, εχουμε

$$\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2 - 2(O\Delta)(OE)\cos a = \rho^2(\cos^{-2}c + \cos^{-2}b - 2\cos^{-1}b\cos^{-1}c\cos a). \quad (2)$$

Επισης, $A\Delta = \tan c$, $AE = \tan b$ και κατα τον ιδιο τυπο για το ΑΔΕ:

$$\Delta E^2 = A\Delta^2 + AE^2 - 2(A\Delta)(AE)\cos\alpha = \rho^2(\tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan b \tan c \cos\alpha). \quad (3)$$

Ο τυπος προκυπτει εξισωνοντας τις (2),(3) και λαμβανοντας υποψη την $\cos^{-2}x = 1 + \tan^2 x$. Αν η ΟΒ ειναι παραλληλος προς το επιπεδο ΑΔΕ, τοτε προκυπτει το δευτερο σχημα, $\omega = \pi - a$ και ο τυπος του συνημιτονου συναγεται αμεσως απο το ορθογωνιο τριγωνο ΟΜΕ: $\cos a = \sin b \cos\alpha$ ($\alpha = \angle\Delta A E$). Αν συμβει και οι δυο: ΟΒ, ΟΓ να ειναι παραλληλες προς το ΑΔΕ, τοτε οι διεδρες γωνιες β,γ ειναι ορθες το σφαιρικο τριγωνο ειναι ισοσκελες (δισορθογωνιο) και ο τυπος ισχυει κατα τετριμμενο τροπο ($\alpha = a$).

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 Με τους συμβολισμους της προηγουμενης προτασης ισχυει ο **τυπος του ημιτονου:**

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Τουτος αποδεικνυεται τετραγωνιζοντας τον τυπο του συνημιτονου:

$$\cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c = \sin^2 b \sin^2 c \cos^2\alpha = \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2\alpha =$$

$$1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Η παρασταση δεξια ειναι συμμετρικη ως προς a,b,c.

Σημειωσε τον τυπο που προκυπτει απ αυτον του συνημιτονου εφαρμοζοντας τον στο παραπληρωματικο σφαιρικο τριγωνο ΑΣ-2, $\alpha+a''=0, \beta+b''=0$, κ.τ.λ. Αντικαθιστωντας αυτα στον τυπο του συνημιτονου και παραλειποντας τους τονους, εχουμε τον **δευτερο τυπο συνημιτονου**

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\cos a-\cos\beta\cos\gamma.$$

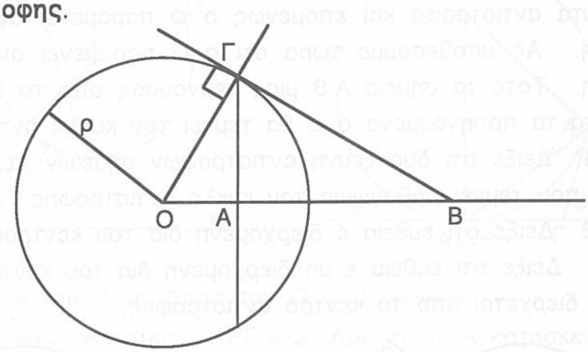
Σημειωσε οτι ο τυπος αυτος διδει τα μηκη των πλευρων (ρa,ρb,ρc) του σφαιρικου τρίγωνου, οταν ξερουμε τις γωνιες του. Κατι αναλογο δεν υπαρχει στην Ευκλειδεια γεωμετρια. Με την βοηθεια τους ο φιλοπονος αναγνωστης μπορει λ.χ. να κατασκευαση το μηκος της ακμης των πλατωνικων σωματων που εγγραφονται σε δοθησα σφαιρα. Υπαρχει πληθος προτασεων αναλογων προς εκεινες της Ευκλειδειας γεωμετριας. Αρκετες απ αυτες βρισκονται εγκατεσπαρμενες στο αξιολογο βιβλιο "Ασκησεις Γεωμετριας Ιησουΐτων" (*). Με το υλικο που παρεθεσα εδω, ελπιζω να εγινε φανερη η αναλογια (και οι διαφορες) της σφαιρικης προς την Ευκλειδεια γεωμετρια. Και οι δυο εξεταζουν ιδιοτητες σχηματων που περιεχονται σε επιφανειες, η Ευκλειδεια στο επιπεδο, η σφαιρικη στη σφαιρα. "Ευθειες" ειναι καποιες ειδικες καμπυλες πανω στις επιφανειες, που εχουν την ιδιοτητα να ελαχιστοποιουν την αποσταση μεταξυ δυο σημειων της επιφανειας. Αποδεικνυεται γενικωτερα οτι και μια αυθαιρετη επιφανεια φερει πανω της αναλογες καμπυλες, που ελαχιστοποιουν την αποσταση μεταξυ δυο (αρκετα κοντινων) σημειων τους και λεγονται **γεωδαισιακες** της επιφανειας. Υιοθετωντας λοιπον αυτες τις καμπυλες σαν "ευθειες" μπορουμε να ορισουμε σχηματα και να αναπτυξουμε μια "Γεωμετρια" που προσιδιαζει στην συγκεκριμενη επιφανεια. Το επιπεδο και η σφαιρα ειναι ειδικες περιπτωσεις επιφανειων (οι απλουστερες). Στο επιπεδο οι γεωδαισιακες ειναι οι ευθειες, στη σφαιρα οι μεγιστοι κυκλοι. Η μελετη της γεωμετριας των επιφανειων γινεται σημερα με τα μεσα της **διαφορικης γεωμετριας** που θεμελιωσε ο Gauss και γενικευσε ο μαθητης του Riemann. Σημειωσε επισης οτι η μελετη της γεωμετριας της σφαιρας (και γενικωτερα της αυθαιρετης επιφανειας) γινεται με τα μεσα της Ευκλειδειας γεωμετριας. Αντιστροφα, οπως ειναι φυσικο και δειχνουν λ.χ. οι ΠΡ-4, ΠΡ-6, ιδιοτητες των επιφανειων μεταφραζονται σε προτασεις της Ευκλειδειας γεωμετριας.

(*) Ασκησεις Γεωμετριας (Ιησουΐτων), εκδοσεις Α.Καραβια, Αθηναι 1952

10. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

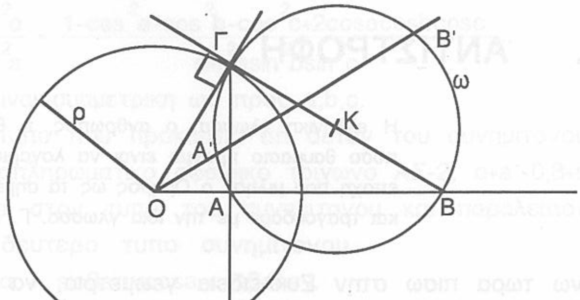
Η ελληνικη γλωσσα, ο ανθρωπος, η θαλασσα... Για κοιταξετε ποσο θαυμασιο πραγμα ειναι να λογαριαζει κανεις πως, απο την εποχη που μιλησε ο Ομηρος ως τα σημερα, μιλουμε, ανασαινουμε, και τραγουδαμε με την ιδια γλωσσα. Γ. Σεφερη, Δοκιμες Δ σ. 177

Γυρνω τωρα πισω στην Ευκλειδεια γεωμετρια, να εξετασω ενα ζητημα στενα συνδεδμενο με την υπερβολικη γεωμετρια. Η **αντιστροφη** ειναι ενας μετασχηματισμος του επιπεδου στον εαυτο του, που οριζεται με την βοηθεια ενος κυκλου. Αν Ο το κεντρο του κυκλου, ρ η ακτινα, τοτε σε καθε σημειο Α διαφορετικο απ το Ο, αντιστοιχουμε το σημειο Β πανω στην ημιευθεια ΟΑ, ετσι ωστε $(OB)(OA)=\rho^2$. Ο κυκλος (Ο,ρ) λεγεται **κυκλος της αντιστροφης**, το σημειο Ο λεγεται **κεντρο της αντιστροφης** και η ακτινα του ρ λεγεται **δυναμη της αντιστροφης**.



Σημειωσε οτι ο μετασχηματισμος αυτος οριζεται σε καθε σημειο Α του επιπεδου εκτος του Ο. Τα σημεια που ειναι μεσα στον κυκλο απεικονιζονται σε εξωτερικα, τα σημεια που ειναι στο εξωτερικο απεικονιζονται στο εσωτερικο και τα σημεια του κυκλου αντιστροφης παραμενουν σταθερα. Στο παραπανω σχημα φαινεται ο τροπος κατασκευης του $B = T(A)$, οπου Τ συμβολιζει τον μετασχηματισμο της αντιστροφης. Η ιδια εικονα δειχνει οτι $A = T(B)$, αρα $T^2 = T \circ T$ ειναι η ταυτοτικη ή $T^{-1} = T$, με αλλα λογια, ο αντιστροφος μετασχηματισμος του Τ συμπιπτει με τον Τ. Τα Α,Β λεμε συχνα **αντιστροφα** μεταξυ τους (εννοειται ως προς την δοθησα αντιστροφη Τ).

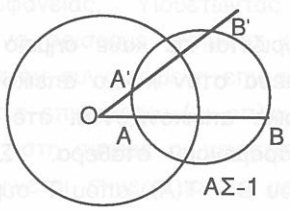
ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Καθε κυκλος ω που διερχεται απο δυο αντιστροφα σημεια Α,Β τεμνει τον κυκλο αντιστροφης ορθογωνια, παραμενει αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη (απεικονιζεται στον εαυτο του) και τουμπαλιν, καθε κυκλος αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη, τεμνει τον κυκλο αντιστροφης ορθογωνια.



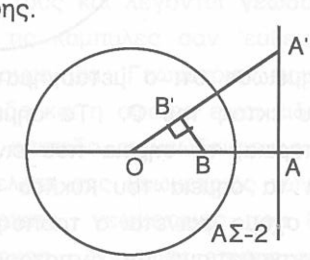
Πραγματι, εστω ω ενας κυκλος που περνα απο δυο αντιστροφα σημεια Α,Β. Εστω Γ ενα κοινο σημειο του ω με τον κυκλο αντιστροφης. Τοτε $(ΟΑ)(ΟΒ)=ρ^2=ΟΓ^2$. Τουτο σημαινει οτι η ακτινα ΟΓ ειναι εφαπτομενη του ω, οποτε και η ατκινα ΚΓ του ω θα ειναι καθετη στην ΟΓ και οι δυο κυκλοι τεμνονται ορθογωνια. Για καθε τεμνουσα ΟΑ'Β' του ω, $(ΟΑ')(ΟΒ')=(ΟΑ)(ΟΒ)=ρ^2$, αρα τα Α',Β' ειναι κι αυτα αντιστροφα και επομενως ο ω παραμενει αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη. Ας υποθεσουμε τωρα οτι ο ω παραμενει αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη. Τοτε τα σημεια Α,Β μιας τεμνουσας απο το Ο θα ειναι αντιστροφα και κατα τα προηγουμενα ο ω θα τεμνει τον κυκλο αντιστροφης ορθογωνια.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι δυο ζευγη αντιστροφων σημειων περιεχονται παντοτε σ ενα κυκλο που τεμνει ορθογωνια τον κυκλο αντιστροφης.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι ευθεια ε διερχομενη δια του κεντρου απεικονιζεται στον εαυτο της. Δειξε οτι ευθεια ε μη διερχομενη δια του κεντρου απεικονιζεται σε κυκλο που διερχεται απο το κεντρο αντιστροφης.



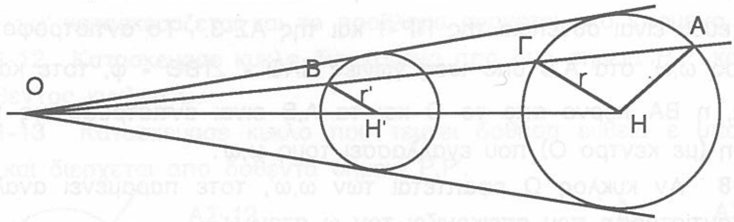
ΑΣ-1



ΑΣ-2

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι ο αντιστροφος κυκλου (Η,r), μη διερχομενου δια του Ο, ειναι κυκλος (Η',r') ομοιοθετος του (Η,r) με ακτινα $r'=rρ^2/λ^2$, οπου $λ^2$ η δυναμη του 0 ως προς τον (Η,r) και κεντρο ομοιοθεσιας το Ο.

Θυμιζω οτι **ομοιοθεσια** λεγεται ενας μετασχηματισμος του επιπεδου στον εαυτο του $Φ: E^2 \to E^2$, που οριζεται με την βοηθεια ενος σημειου Ο (**κεντρο ομοιοθεσιας**) και ενος αριθμου $μ>0$ (**λογος ομοιοθεσιας**). Η Φ αντιστοιχει σε καθε σημειο Α, το σημειο Β επι της ευθειας ΟΑ, ετσι ωστε $ΟΒ/ΟΑ=μ$.

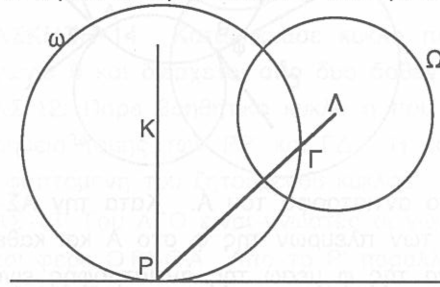


(Β=Τ(Α), (ΟΒ)(ΟΑ)=ρ^2, (ΟΓ)(ΟΑ)=λ^2 : δυναμη του Ο ως προς (Η,r), ΟΒ/ΟΓ=ρ^2/λ^2)

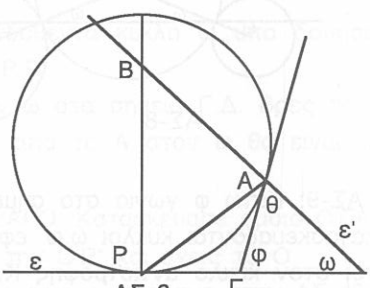
ΑΣΚΗΣΗ-4 Βρες μια αντιστροφη που απεικονιζει δοθησα ευθεια ή κυκλο σε δοθησα ευθεια ή κυκλο. Διερευνησε τις διαφορες δυνατοτητες.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Κατασκευασε κυκλο ω, που εφαπτεται ευθειας ε σε σημειο της Ρ και τεμνει δοθεντα κυκλο Ω ορθογωνια.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Κατασκευασε κυκλο ω, που εφαπτεται ευθειας ε σε σημειο της Ρ και τεμνει δοθησα ευθεια ε' υπο γωνια θ.



ΑΣ- 5

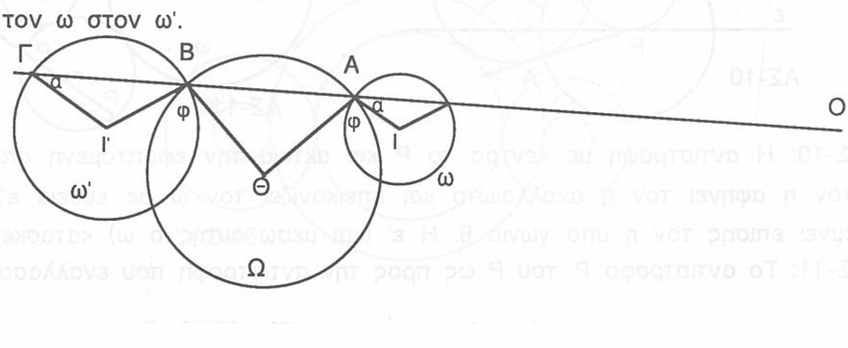


ΑΣ-6

ΑΣ-5: Το Γ αντιστροφο του Ρ ως προς τον Ω ειναι γνωστο.

ΑΣ-6: Οι γωνιες θ, ω ειναι γνωστες. ∠ΑΡΓ=φ/2, Αρα το ΡΒΑ κατασκευαζεται.

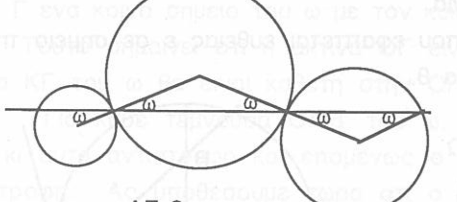
ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω (Ο,ρ^2) η αντιστροφη που απεικονιζει δοθεντα κυκλο ω σε αλλο δοθεντα κυκλο ω'. Αν το Α ειναι αντιστροφο του Β, τοτε καθε κυκλος Ω που περνα απο τα Α,Β, ειναι αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη και τεμνει τους ω,ω' υπο ισες γωνιες. Και αντιστροφα, αν κυκλος Ω τεμνει δυο δοθεντες υπο ισες γωνιες, τοτε παραμενει αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη που απεικονιζει τον ω στον ω'.



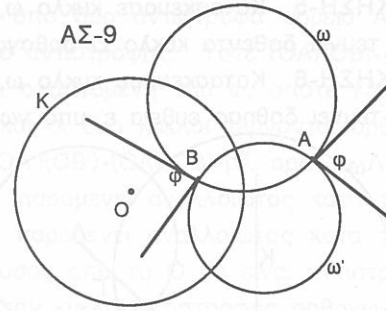
ΑΣ-7: Το ευθυ ειναι συνεπεια της ΠΡ-1 και της ΑΣ-3. Το αντιστροφο: Αν ο Ω τεμνει τους ω,ω' στα Α,Β υπο ισες γωνιες ∠ΙΑΘ = ∠Ι'ΒΘ = φ, τοτε και ∠ΙΑΟ = ∠Ι'ΓΒ = α, η ΒΑ περνα απο το Ο και τα Α,Β ειναι αντιστροφα ως προς την αντιστροφη (με κεντρο Ο) που εναλλασσει τους ω,ω'.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Αν κυκλος Ω εφαπτεται των ω,ω', τοτε παραμενει αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη που απεικονιζει τον ω στον ω'.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι η αντιστροφη απεικονιζει κυκλους και ευθειες σε κυκλους και ευθειες και ειναι **συμμορφη** απεικονιση. Με αλλα λογια, διατηρει τις γωνιες μεταξυ κυκλων και ευθειων.



ΑΣ-8

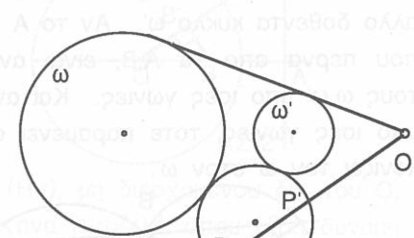
ΑΣ-9


ΑΣ-9: Εστω φ γωνια στο σημειο Α, Β το αντιστροφο του Α. Κατα την ΑΣ-5 κατασκευαζονται κυκλοι ω,ω' εφαπτομενοι των πλευρων της φ στο Α και καθετοι στον κυκλο αντιστροφης Κ. Η εικονα της φ μεσω της αντιστροφης ειναι μια ιση προς την φ γωνια στο Β.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Κατασκευασε κυκλο ω εφαπτομενο ευθειας ε στο Ρ και τεμνοντα δοθεντα κυκλο η υπο γωνιαν θ.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Κατασκευασε κυκλο εφαπτομενο δυο δοθεντων κυκλων ω,ω' και διερχομενο δια σημειου Ρ.

ΑΣ-10



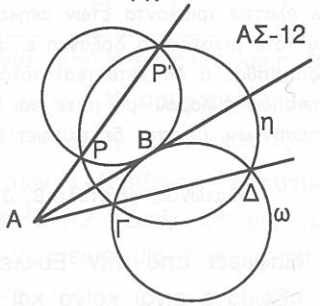
ΑΣ-11

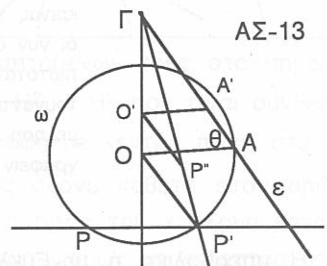
ΑΣ-10: Η αντιστροφη με κεντρο το Ρ και ακτινα την εφαπτομενη απο το Ρ στον η αφηνει τον η αναλλοιωτο και απεικονιζει τον ω σε ευθεια ε'||ε που τεμνει επισης τον η υπο γωνια θ. Η ε' (και μεσω αυτης ο ω) κατασκευαζεται.

ΑΣ-11: Το αντιστροφο Ρ' του Ρ ως προς την αντιστροφη που εναλλασσει τους κυκλους ω,ω' κατασκευαζεται και το προβλημα αναγεται στο επομενο.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Κατασκευασε κυκλο διερχομενο απο δυο σημεια Ρ,Ρ' και εφαπτομενο δοθεντος κυκλου ω.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Κατασκευασε κυκλο που τεμνει δοθησα ευθεια ε υπο δοθεισα γωνια θ και διερχεται απο δοθεντα σημεια Ρ,Ρ'.





ΑΣΚΗΣΗ-14 Κατασκευασε κυκλο που τεμνει δοθεντα κυκλο ω υπο δοθησα γωνια θ και διερχεται απο δυο δοθεντα σημεια Ρ,Ρ'.

ΑΣ-12: Παρε βοηθητικο κυκλο η που τεμνει τον ω στα σημεια Γ,Δ. Βρες το Α σημειο τομης των ΡΡ' και ΓΔ. Η εφαπτομενη απο το Α στον ω θα ειναι και εφαπτομενη του ζητουμενου κυκλου.

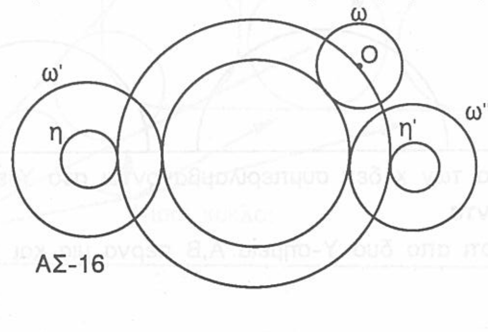
ΑΣ-13: Του ΑΓΟ ειναι γνωστες οι γωνιες θ, φ=∠ΑΓΟ. Κατασκευασε ομοιο Ο'ΓΑ' και φερε Ο'Ρ"=Ο'Α'. Απο το Ρ' παραλληλο προς την Ο'Ρ" και εχεις το Ο.

ΑΣ-14: Παρε αντιστροφη ως προς καποιο σημειο του ω, αναγαγε στην ΑΣ-13.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Κατασκευασε κυκλο που διερχεται απο δοθεν σημειο Ρ και τεμνει δοθεντες κυκλους ω,ω' υπο δοθησαν γωνια φ.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Κατασκευασε κυκλο που εφαπτεται τριων δοθεντων κυκλων ω,ω' και ω" (προβλημα του Απολλωνιου).

ΑΣ-15: Κατα την ΑΣ-7 ο ζητουμενος κυκλος θα ειναι αναλλοιωτος ως προς την αντιστροφη που εναλλασσει τους ω,ω' αρα θα διερχεται απο το αντιστροφο Ρ' του Ρ και θα τεμνει τον ω υπο γωνια φ. Χρησιμοποιησε την ΑΣ-13.



ΑΣ-16

11. ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

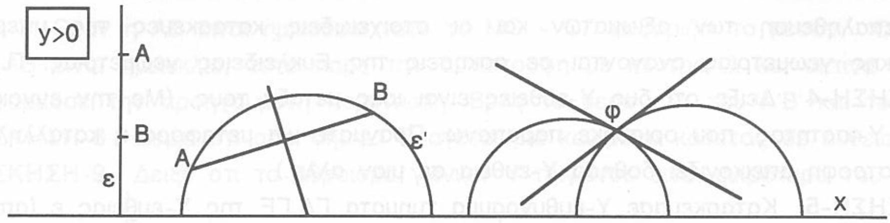
εισι γαρ ανθρωποι ταυτα ακηκοοτες και πλειους, δυνατοι μεν μαθειν, δυνατοι δε μνημονευσαι και βασανισαντες παντη παντως κριναι, γεροντες ηδη και ουκ ελαττω τριακοντα ετων ακηκοοτες, οι νυν αρτι σφισι φασι τα μεν τοτε απιστοτατα δοξαντα ειναι νυν πιστοτατα και εναργεστατα φαινεσθαι, α δε τοτε πιστοτατα, νυν τουναντιον. προς ταυτ ουν σκοπων ευλαβου, μη ποτε σοι μεταμεληση των νυν αναξιως εκπεσοντων, μεγιστη δε φυλακη το μη γραφειν αλλ εκμανθανειν.

Πλατωνος, επιστολη β', 314 B

Η υπερβολικη ή μη-Ευκλειδεια γεωμετρια διαφερει απο την Ευκλειδεια μονο κατα το αξιωμα παραλληλιας, τα υπολοιπα αξιωματα ειναι κοινα και στις δυο γεωμετριες. Το νεο αξιωμα παραλληλιας ειναι: **Απο σημειο εκτος ευθειας αγονται τουλαχιστον δυο παραλληλοι προς αυτην**. Την γεωμετρια που προκυπτει απο τα υπολοιπα 19 αξιωματα της Ευκλειδειας και το νεο αξιωμα παραλληλιας μπορει να αναπτυξει κανεις συνθετικα, με τον τροπο της Ευκλειδειας. Ενα κοινο μερος των δυο γεωμετριων ειναι η απολυτος γεωμετρια που γνωρισαμε στην §2. Απο κει και περα ομως τα πραγματα αλλαζουν. Πιο γρηγορα και αμεσα φτανει κανεις σε ουσιαστικα αποτελεσματα χρησιμοποιωντας ενα μοντελο, οπως το επομενο, που οφειλεται στους Liouville, Beltrami και Poincare (1854-1912): Υπερβολικο επιπεδο (συντομα: **Y-επιπεδο**, που συμβολιζω με H^2) οριζεται να ειναι το συνολο των σημειων (x,y) του ανω ημιεπιπεδου (δηλ. με y>0). **Y-ευθειες** ονομαζουμε τις ημιευθειες και τα ημικυκλια που ειναι καθετα στον αξονα των x και περιεχονται στο ανω ημιεπιπεδο. **Παραλληλες** λεμε δυο Y-ευθειες που δεν τεμνονται.

Τα σημεια του αξονα των x δεν συμπεριλαμβανονται στο Y-επιπεδο και τα λεμε **σημεια του οριζοντα.**

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι απο δυο Y-σημεια Α,Β περνα μια και μονον Y-ευθεια.

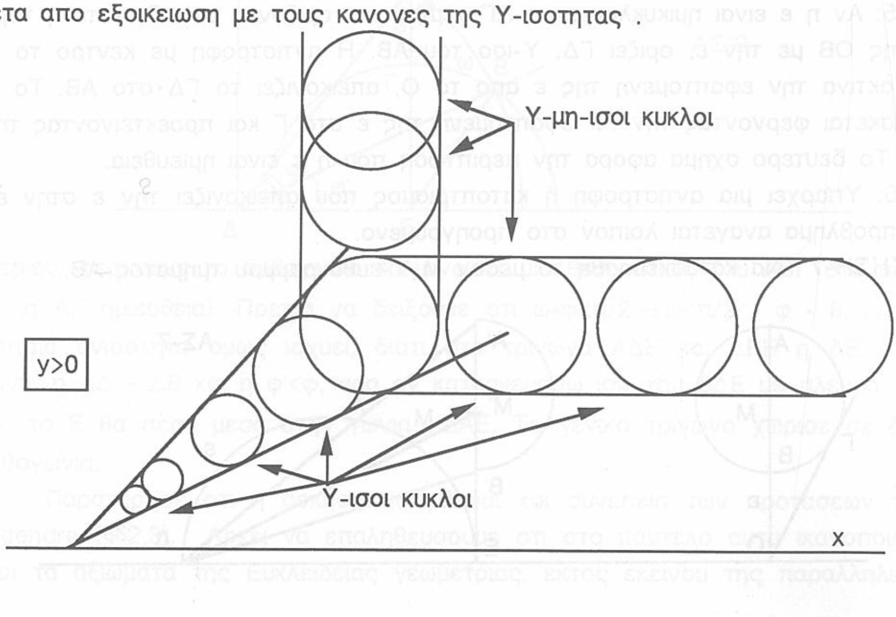


Γωνια δυο Υ-ευθειων λεμε την γωνια των εφαπτομενων τους στο σημειο τομης τους. **Υ-ισομετρια** λεμε μια απεικονιση T: $H^2 \to H^2$ που ειναι συνθεση $T = T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_\kappa$, οπου καθε T_ν ειναι ή μια αντιστροφη με κεντρο πανω στον αξονα των x (οριζοντα) ή κατοπτρισμος ως προς αξονα καθετο στον οριζοντα.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι μια μεταφορα παραλληλα προς τον x αξονα κατα διαστημα λ ειναι μια Υ-ισομετρια (συνθεση δυο κατοπτρισμων με κατοπτρα σε αποσταση λ/2).

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι η συνθεση δυο αντιστροφων με το ιδιο κεντρο ειναι μια ομοιοθεσια ως προς αυτο το κεντρο. Συμπερανε οτι οι ομοιοθεσιες με κεντρο στον οριζοντα ειναι Υ-ισομετριες.

Δυο σχηματα Σ,Σ' του Υ-επιπεδου τα λεμε **ισα** οταν υπαρχει Υ-ισομετρια T που απεικονιζει το ενα στο αλλο: T(Σ)=Σ'. Οπως φαινεται απο τον ορισμο της, η ισοτητα στην υπερβολικη γεωμετρια (στο παρον μοντελο) δεν ειναι τοσο οφθαλμοφανης οσο στο Ευκλειδειο επιπεδο. Η Υ-οραση αναπτυσσεται σιγα-σιγα, μετα απο εξοικειωση με τους κανονες της Υ-ισοτητας.

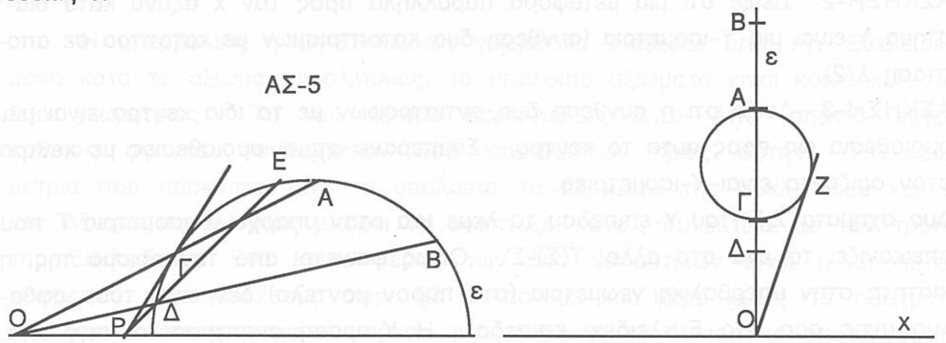


Η επαληθευση των αξιωματων και οι στοιχειωδεις κατασκευες της υπερβολικης γεωμετριας αναγονται σε ασκησεις της Ευκλειδειας γεωμετριας. Π.χ.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι δυο Υ-ευθειες ειναι ισες μεταξυ τους. (Με την εννοια της Υ-ισοτητας, που ορισθηκε παραπανω. Πραγματι, μια μεταφορα ή καταλληλη αντιστροφη απεικονιζει δοθησα Υ-ευθεια σε μιαν αλλη.)

ΑΣΚΗΣΗ-5 Κατασκευασε Υ-ευθυγραμμα τμηματα ΓΔ,ΓΕ της Υ-ευθειας ε (απο τις δυο μεριες του Γ) που ειναι ισα με το Υ-ευθυγραμμο τμημα ΑΒ της ιδιας ευθειας.

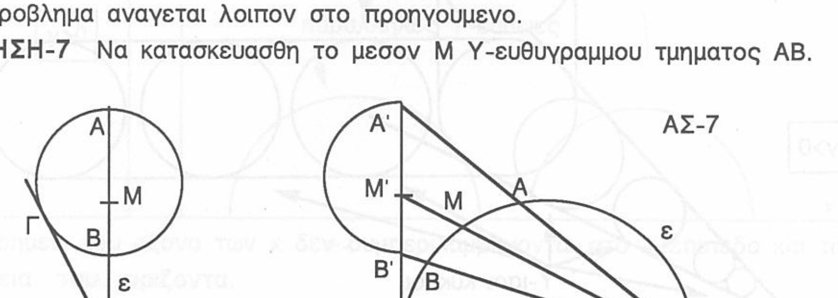
ΑΣΚΗΣΗ-6 Κατασκευασε Υ-ευθυγραμμα τμηματα ΓΔ,ΓΕ της Υ-ευθειας ε' (απο τις δυο μεριες του Γ) που ειναι ισα με το Υ-ευθυγραμμο τμημα ΑΒ μιας αλλης ευθειας ε.



ΑΣ-5: Αν η ε ειναι ημικυκλιο και η ΑΓ τεμνει τον οριζοντα στο Ο, τοτε η τομη Δ της ΟΒ με την ε, οριζει ΓΔ, Υ-ισο του ΑΒ. Η αντιστροφη με κεντρο το Ο και ακτινα την εφαπτομενη της ε απο το Ο, απεικονιζει το ΓΔ στο ΑΒ. Το Ε ευρισκεται φερνοντας την ΡΓ εφαπτομενη της ε στο Γ και προεκτεινοντας την ΡΓ. Το δευτερο σχημα αφορα την περιπτωση που η ε ειναι ημιευθεια.

ΑΣ-6: Υπαρχει μια αντιστροφη ή κατοπτρισμος που απεικονιζει την ε στην ε'. Το προβλημα αναγεται λοιπον στο προηγουμενο.

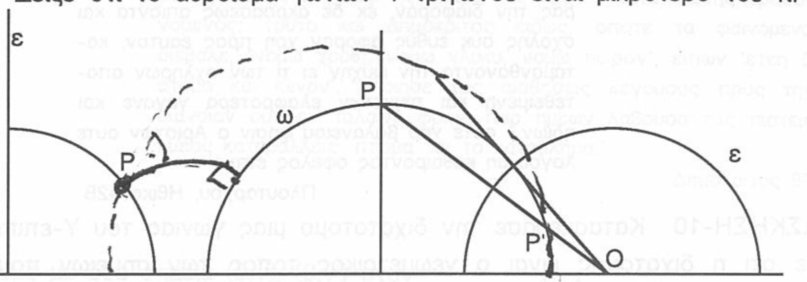
ΑΣΚΗΣΗ-7 Να κατασκευασθη το μεσον Μ Υ-ευθυγραμμου τμηματος ΑΒ.



ΑΣ-7: Οταν η ΑΒ ειναι ημιευθεια τοτε το ΜΟ = ΟΓ καθοριζει το μεσον. Οταν η ΑΒ ειναι ημικυκλιο, τοτε παρε την αντιστροφη με κεντρο Δ και ακτινα ΔΕ. Εφαρμοσε την προηγουμενη περιπτωση. Βρες το μεσον Μ' του Α'Β' και το Μ.

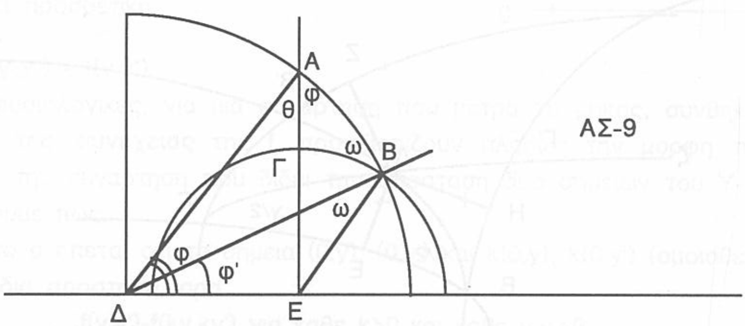
ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι απο σημειο Ρ αγεται μια και μονο καθετος σε ευθεια ε.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι το αθροισμα γωνιων Υ-τριγωνου ειναι μικροτερο του π.



ΑΣ-8: Η καθετος ω, απο το Ρ στην ε, θα ειναι και καθετος στον οριζοντα. Θα περνα λοιπον απο το Ρ' και το συμμετρικο Ρ" (που δε φαινεται) του Ρ ως προς τον οριζοντα. Το μονοσημαντο προκυπτει απο το μονοσημαντο του κυκλου που περνα απο τρια σημεια. Οι αλλες περιπτωσεις ειναι πιο απλες.

ΑΣ-9: Πρωτα για ορθογωνια Υ-τριγωνα: Χρησιμοποιωντας στην αναγκη Υ-ισο-



μετριες, φερνουμε το ορθογωνιο τριγωνο σε μια θεση οπως του ΑΒΓ στο σχημα (η ΑΓ ημιευθεια). Πρεπει να δειξουμε οτι $\omega+\varphi<\pi/2 \Leftrightarrow \omega<\pi/2 - \varphi = \theta$. Η τελευταια ανισοτητα ομως ισχυει, διοτι στα τριγωνα ΑΔΕ και ΔΒΕ η ΔΕ ειναι κοινη, η ΑΔ = ΔΒ και η $\varphi'<\varphi$, αρα αν κατασκευασω ισο του ΒΔΕ με πλευρα την ΑΔ, το Ε θα πεση μεσα στην γωνια ∠ΔΑΕ. Το γενικο τριγωνο χωρισε σε δυο ορθογωνια.

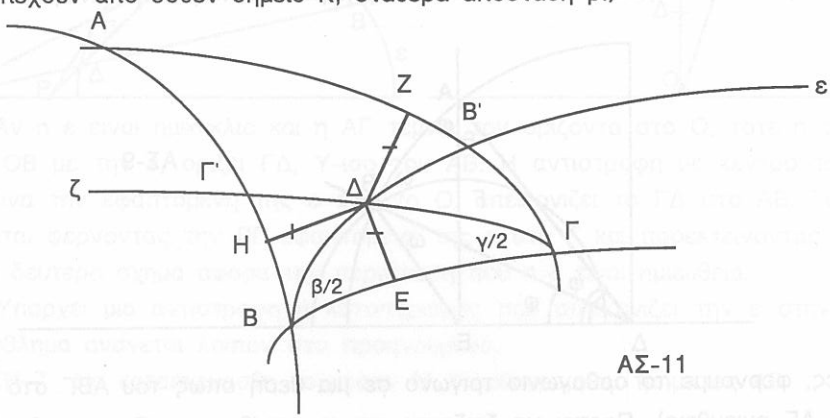
Παρατηρησε οτι η ασκηση αυτη ειναι και συνεπεια των προτασεων του Legendre (§§2,3). Αρκει να επαληθευσουμε οτι στο μοντελο αυτο ικανοποιουνται τα αξιωματα της Ευκλειδειας γεωμετριας, εκτος εκεινου της παραλληλιας.

Ο φιλοπονος και φιλοκαλος αναγνωστης δεν θα παραληψει να εξεταση αυτον τον τροπο, παρολο που η προηγουμενη αποδειξη ειναι πιο αμεση.

> ου γαρ εκ κουρειου μεν αναστάντα δει των κατοπτρω παραστηναι και της κεφαλης αψασθαι, την περικοπην των τριχων επισκοπουντα και της κουρας την διαφοραν, εκ δε ακροασεως απιοντα και σχολης ουκ ευθυς αφοραν χρη προς εαυτον, καταμανθανοντα την ψυχην ει τι των οχληρων αποτεθειμενη και περιττων ελαφροτερα γεγονε και ηδιων. ουτε γαρ βαλανειου φησιν ο Αριστων ουτε λογου μη καθαιροντος οφελος εστιν.
>
> Πλουταρχου, Ηθικα 42Β

ΑΣΚΗΣΗ-10 Κατασκευασε την διχοτοτομο μιας γωνιας του Υ-επιπεδου. Δειξε οτι η διχοτομος ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που ισαπεχουν απο τις πλευρες της γωνιας.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι οι διχοτομοι ενος Υ-τριγωνου τεμνονται σ ενα σημειο που συμπιπτει με το κεντρο του εγγεγραμμενου κυκλου. (Ο κυκλος στο Υ-επιπεδο οριζεται οπως και στο Ευκλειδειο, σαν γεωμετρικος τοπος των σημειων που απεχουν απο δοθεν σημειο Κ, σταθερα αποσταση ρ.)



ΑΣ-11

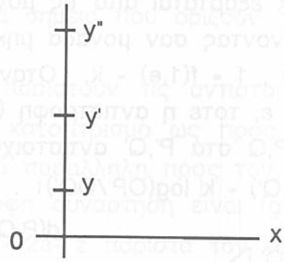
ΑΣ-11: Η αποδειξη καλυτερα να γινη μ ενα, καπως αφηρημενο, σχημα. Η διχοτομος ε της γωνιας ∠Β θα τεμνει την απεναντι πλευρα του τριγωνου ΑΒΓ σ ενα σημειο Β'. Αναλογα, η διχοτομος ζ της γωνιας ∠Γ θα τεμνει την απεναντι πλευρα του τριγωνου ΒΒ'Γ σ ενα σημειο Δ. Εξασφαλιζεται λοιπον (οπως και στην Ευκλειδεια) το σημειο τομης Δ δυο εκ των διχοτομων. Με την ΑΣ-10 εξασφαλιζεται η διελευση και της αλλης διχοτομου απ το Δ.
Σημειωσε οτι στο Υ-τριγωνο δεν εξασφαλιζεται παντοτε η τομη μιας εσωτερικης και μιας εξωτερικης διχοτομου (αρα και οι παρεγγεγραμμενοι κυκλοι).

12. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ

Ος γαρ ουδ αρξασθαι δυναται της εναργειας χωρις, πως αν ουτος πιστος ειη, παρ ης ελαβε τας αρχας, κατα ταυτης θρασυνομενος; τουτο και Δημοκριτος ειδως, οποτε τα φαινομενα διεβαλε, "νομω χροιη, νομω γλυκυ, νομω πικρον", ειπων "ετεη δ ατομα και κενον", εποιησε τας αισθησεις λεγουσας προς την διανοιαν ουτως: "ταλαινα φρην, παρ ημεων λαβουσα τας πιστεις ημεας καταβαλλεις; πτωμα τοι το καταβλημα."

Δημοκριτος 99

Ας ξεκινησουμε με δυο σημεια (0,y), (0,y') στον y-αξονα. Εστω f(y,y') η υπερβολικη αποσταση πανω σ αυτη την Y-ευθεια. Τουτη η συναρτηση θα πρεπει



α) Να παραμενει αναλλοιωτη κατα τις Y-ισομετριες.

β) Να ειναι προσθετικη

$$f(y,y')+f(y',y") = f(y,y").$$

Τουτες οι φυσιολογικες, για μια συναρτηση που μετρα το μηκος, συνθηκες και η απαιτηση της **συνεχειας** της f, προσδιοριζουν πληρως την μορφη της και μεσω αυτης την συναρτηση που διδει την αποσταση δυο σημειων του Y-επιπεδου. Ας δουμε πως.

Απο το α επεται οτι τα σημεια (0,y), (0,y') και k(0,y), k(0,y') (ομοιοθετα) θα εχουν την ιδια αποσταση, αρα

$$f(y,y') = f(ky,ky') \text{ για καθε } k>0 \text{ και καθε } y,y'>0. \quad (1)$$

Απο το α επεται επισης η συμμετρικοτητα της f,

$$f(x,y) = f(y,x). \quad (2)$$

Συνεπεια των δυο προηγουμενων ειναι αμεσως η

$$f(y,y') = f(1,y/y') = f(1,y'/y). \quad (3)$$

Οριζοντας την συναρτηση του t(=y/y'), g(t)=f(1,t), αναγουμε λοιπον το προβλημα του προσδιορισμου της f σε κεινο του προσδιορισμου της g. Ολα αυτα απο την α. Απο την β απαιτηση προσθετικοτητας για τα σημεια y, y^2, ... ,y^n εχουμε $f(1,y^n) = f(1,y)+f(y,y^2)+f(y^2,y^3)+...+f(y^{n-1},y^n) = nf(1,y)$, που για την g σημαινει,

$$g(t^n) = ng(t), \text{ για καθε ακεραιο n και θετικο t.} \quad (4)$$

Τουτη συνεπαγεται αμεσως την $g(t^{1/n}) = g(t)/n$, αφου $g(t) = g(t^{n/n}) = ng(t^{1/n})$. Η (4) λοιπον ισχυει και οταν ο n ειναι αντιστροφος ακεραιου, αρα ισχυει και οταν ο n ειναι ρητος αριθμος. Η συνεχεια της f συνεπαγεται την συνεχεια της g και προσεγγιζοντας καθε θετικο πραγματικο αριθμο με μια ακολουθια ρητων συμπεραινουμε οτι

$g(t^n) = ng(t)$, ισχυει για καθε θετικο πραγματικο n και καθε t. (5)

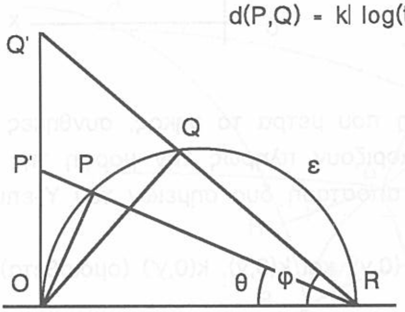
Απ αυτην εχουμε αμεσως $g(e^n) = ng(e) = kn$ $(k = g(e))$. Ειναι λοιπον η g αντιστροφη της εκθετικης και συνεπως για $t>1$ συμπιπτει με τον φυσικο λογαριθμο $g(t) = k(\log(t))$. Λογω της ιδιοτητας της g, $g(1/t) = g(t)$ εχουμε συνεπως:

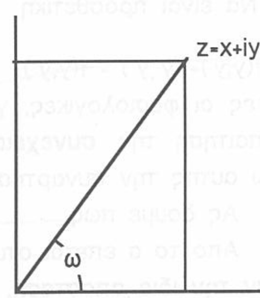
$$g(t) = k|\log t| \text{, για καθε θετικο } t, \tag{6}$$

$$\Rightarrow f(y,y') = k|\log(y/y')| \text{ , για θετικα } y,\ y'. \tag{7}$$

Το k εξαρταται απο τις μοναδες μετρησης και μπορουμε λ.χ. να το κανουμε 1 παιρνοντας σαν μοναδα μηκους την Υ-αποσταση μεταξυ των σημειων (0,1) και (0,e) , $1 = f(1,e) = k$. Οταν η Υ-ευθεια που οριζουν τα σημεια P,Q ειναι ημικυκλιο ε, τοτε η αντιστροφη (Υ-ισομετρια) με κεντρο το R και ακτινα OR στελνει τα P,Q στα P',Q' αντιστοιχα. Για την Υ-αποσταση εχουμε συνεπως $d(P,Q) = d(P',Q') = k|\log(OP'/OQ')|$. Και επειδη $OP' = (OR)\tan\theta$, $OQ' = (OR)\tan\varphi$, εχουμε

$$d(P,Q) = k|\log(\tan\theta/\tan\varphi)| \text{ .} \tag{8}$$





Ο προηγουμενος τυπος παιρνει μια κομψη μορφη, αν χρησιμοποιησω μιγαδικους αριθμους $z = x+iy$ αντι των ζευγων συντεταγμενων (x,y). Θυμιζω οτι $|z|^2 = x^2+y^2$ ειναι το τετραγωνο του μετρου του μιγαδικου z και $z = |z|(\cos\omega + i\sin\omega) = |z|e^{i\omega}$ οπου ω το ορισμα του z. Αν τα O,P,Q,R αντιστοιχουν στους μιγαδικους z_1, z_2, z_3 και z_4 , τοτε $z_2 - z_1 = |z_2 - z_1|e^{i\theta'}$, οπου $\theta' = \pi/2 - \theta$, $z_2 - z_4 = |z_2 - z_4|e^{i\theta''}$, οπου $\theta'' = \pi - \theta$, $z_3 - z_1 = |z_3 - z_1|e^{i\varphi'}$, οπου $\varphi' = \pi/2 - \varphi$, $z_3 - z_4 = |z_3 - z_4|e^{i\varphi''}$, οπου $\varphi'' = \pi - \varphi$. Συνεπως

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_4} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_4} = \frac{|z_2 - z_1|\, e^{i\theta'}}{|z_2 - z_4|\, e^{i\theta''}} : \frac{|z_3 - z_1|\, e^{i\varphi'}}{|z_3 - z_4|\, e^{i\varphi''}} = \frac{\tan\theta}{\tan\varphi} \text{ ,}$$

αφου $e^{i\theta'}/e^{i\theta''} = e^{i(\theta' - \theta'')} = e^{-i\pi/2} = e^{i(\varphi' - \varphi'')} = e^{i\varphi'}/e^{i\varphi''}$. Η παρασταση στα αριστερα συμβολιζεται με (z_1,z_2,z_3,z_4) και λεγεται **διπλος λογος** των μιγαδικων αριθμων z_1,z_2,z_3,z_4. Συμφωνα λοιπον με την (8), η αποσταση των $P(z_2)$, $Q(z_3)$ διδεται απο τον τυπο

$$d(P(z_2),Q(z_3)) = k|\log(z_1,z_2,z_3,z_4)|,$$

(9) οπου $O(z_1)$, $R(z_4)$ τα σημεια του οριζοντα, στα οποια τον τεμνει η Υ-ευθεια. Ο τυπος (9) ισχυει γενικωτερα και στην περιπτωση της ημιευθειας, αν θεωρησουμε οτι τουτη τεμνει τον οριζοντα προς τα πανω, σ ενα σημειο στο απειρο (το z_4 τεινει στο απειρο και αντικαθιστουμε το διπλο λογο με το αντιστοιχο οριο) και ορισουμε γι αυτη την περιπτωση $(z_1,z_2,z_3,z_4)=(z_2-z_1)/(z_3-z_1)$.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι ο διπλος λογος τεσσαρων μιγαδικων αριθμων z_1,z_2,z_3,z_4 ειναι πραγματικος αριθμος τοτε και μονον, οταν τα σημεια που οριζουν αυτοι οι αριθμοι ειναι στην ιδια ευθεια ή στον ιδιο κυκλο.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι οι μιγαδικες συναρτησεις παριστουν τις αντιστοιχες Υ-ισομετριες: α) $f(z) = -\bar{z} = -x+iy$, παριστα τον κατοπτρισμο ως προς τον y-αξονα. β) $g^a(z) = z+a$, με a πραγματικο, παριστα παραλληλη προς τον οριζοντα μετατοπιση, κατα διαστημα a και η αντιστροφη συναρτηση ειναι $(g^a)^{-1}=g^{-a}$. γ) Η συνθετη συναρτηση $f^a = g^a \circ f \circ g^{-a}$, $f^a(z) = 2a-\bar{z}$ παριστα τον κατοπτρισμο ως προς την καθετη ευθεια στο σημειο $x=a$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι οι μιγαδικες συναρτησεις παριστουν τις αντιστοιχες Υ-ισομετριες: α) $h^\lambda(z) = \lambda/\bar{z} = \lambda(x+iy)/(x^2+y^2)$ παριστα την αντιστροφη με κεντρο το (0,0) και δυναμη $\lambda>0$. β) $h^{\lambda,a} = g^a \circ h^\lambda \circ g^{-a}$ παριστα την αντιστροφη με κεντρο στο σημειο (a,0) και δυναμη λ.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Χρησιμοποιωντας τις δυο προηγουμενες ασκησεις και επαγωγη ως προς k δειξε οτι μια Υ-ισομετρια:

α) παρισταται σαν μια συνθετη συναρτηση $f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k$, οπου καθε f_i ειναι μια απο τις παραπανω f^a, $h^{\lambda,a}$.

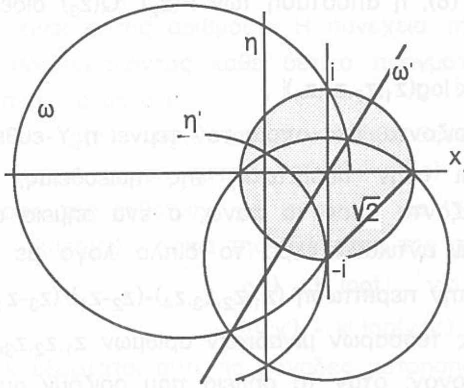
β) Η f εχει μια απο τις μορφες:

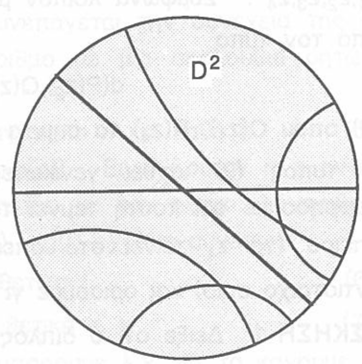
β.1) $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, με πραγματικα a,b,c,d και $ad-bc>0$.

β.2) $f(z) = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$, με πραγματικα a,b,c,d και $ad-bc<0$.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε (αντιστροφα προς ΑΣ-4) οτι καθε συναρτηση f που εχει μια απο τις παραπανω μορφες β.1 ή β.2, γραφεται σαν συνθεση συναρτησεων της μορφης ., $f(z)=z+a$ (μεταφορα), 2) $f(z)=mz$ (ομοιοθεσια), 3) $f(z)=1/\bar{z}$ (αντιστροφη) και 4) $f(z)=-\bar{z}$ (κατοπτρισμος).

Συμπερανε οτι το συνολο των Υ-ισομετριων μπορει να ταυτιστη με το συνολο των μετασχηματισμων της μορφης β.1 ή β.2.





ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι η αντιστροφη με κεντρο το -i και δυναμη 2 περιγραφεται με την μιγαδικη συναρτηση $w = (1-i\,\bar{z})/(\bar{z} - i)$, απεικονιζει το ανω ημιεπιπεδο H^2 στο εσωτερικο του μοναδιαιου κυκλου $|z|<1$ και τον οριζοντα στην περιφερεια $|z|=1$ του κυκλου.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι κατα την προηγουμενη απεικονιση: α) Οι Υ-ευθειες που διερχονται απο τα σημεια i,-i απεικονιζονται σε ευθειες, που διερχονται απο το κεντρο του μοναδιαιου κυκλου. β) Οι Υ-ευθειες που συμπιπτουν με καθετες στον οριζοντα ημιευθειες, απεικονιζονται σε τοξα κυκλων δια του -i , καθετων στον μοναδιαιο κυκλο. γ) Οι Υ-ευθειες που συμπιπτουν με καθετα στον οριζοντα ημικυκλια, απεικονιζονται σε τοξα κυκλων, καθετων στον μοναδιαιο κυκλο.

Μεσω των προηγουμενων ασκησεων, βλεπουμε οτι προκυπτει ενα δευτερο μοντελο της υπερβολικης γεωμετριας, που αποτελειται απο το εσωτερικο D^2 του μοναδιαιου κυκλου S^2. Οι Υ-ευθειες σ αυτο το μοντελο ειναι τοξα κυκλων, καθετα στην περιφερεια. Ο οριζοντας απεικονιζεται στον S^2, που φαινεται να διαφερει απο τον οριζοντα του H^2, κατα το οτι ειναι κλειστος. Η διαφορα ειναι φαινομενικη. Στο μοντελο H^2, της υπερβολικης, πρεπει να λογαριασουμε στον οριζοντα και το σημειο στο απειρο, του θετικου y-αξονα. Μ αυτο το υποθετικο σημειο, ο οριζοντας κλεινει (συμπαγοποιειται) και καθε Υ-ευθεια οριζει (και καθοριζεται ακριβως απο) δυο σημεια του. Το δευτερο αυτο μοντελο εμφανιζει μια συμμετρια που συχνα διευκολυνει στους υπολογισμους. Θεωρωντας οτι τα δυο μοντελα ειναι ισομετρικα μεσω της συναρτησης (αντιστροφης) $f(z)=w=(1-i\,\bar{z})/(\bar{z}-i)$, οριζουμε την αποσταση δυο σημειων z_1,z_2 του D^2, μεσω της αποστασης των εικονων τους $w_1=f(z_1)$, $w_2=f(z_2)$ στο H^2: $d(z_1,z_2)=$

$=d(w_1,w_2)$. Για τις γωνιες, γνωριζουμε ηδη οτι η f τις διατηρει, αφου παριστα μιαν αντιστροφη.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι μια απεικονιση του δισκου D^2 στον εαυτο του $S: D^2 \to D^2$ ειναι Y-ισομετρια, τοτε ακριβως, οταν η συνθεση $T=f \circ S \circ f^{-1}$ ($= f \circ S \circ f$, καθως $f^{-1}=f$ διοτι η f ειναι αντιστροφη) ειναι μια ισομετρια του H^2. Αποδειξε οτι η $S(z)=\bar{z}$ ειναι μια Y-ισομετρια του μοντελου D^2 και η αντιστοιχη $T=f \circ S \circ f$ ειναι η $T(z)=1/\bar{z}$ ισομετρια του H^2.

Ο τροπος με τον οποιο περιγραφονται οι Y-ισομετριες του H^2 (ΑΣ-4), η ισομετρια f μεταξυ των δυο μοντελων H^2 και D^2 καθως και η μορφη των ισομετριων του D^2, επιβαλλουν καποια εξεταση των μιγαδικων συναρτησεων, που εχουν την μορφη $h(z) = (az+b)/(cz+d)$ με $ad-bc \neq 0$. Τετοιοι μετασχηματισμοι λεγονται **μετασχηματισμοι του Moebius** και παρουσιαζουν γενικωτερο ενδιαφερον, τοσο για την γεωμετρια, οσο και για την θεωρια αναλυτικων συναρτησεων (*),(**).

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι η συνθεση των μετασχηματισμων $z=h(x)=(ax+b)/(cx+d)$ και $w=h'(z)=(Az+B)/(Cz+D)$, διδεται απο τον $w=(A'x+B')/(C'x+D')$, οπου τα A',B',C',D' διδονται απο το συνηθισμενο γινομενο μητρων

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa+Bc & Ab+Bd \\ Ca+Dc & Cb+Dd \end{pmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΗ-10 Δειξε οτι ο αντιστροφος του μετασχηματισμου $w=(az+c)/(cz+d)$ διδεται απο (πολλαπλασιο της αντιστροφης μητρας) τον $z=(dw-b)/(-cw+a)$.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι οι μετασχηματισμοι Moebius διατηρουν τον διπλο λογο τεσσαρων μιγαδικων αριθμων. Συμπερανε οτι οι μετασχηματισμοι αυτοι απεικονιζουν το συνολο των κυκλων και ευθειων του μιγαδικου επιπεδο, στον εαυτο του.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι ενας μετασχηματισμος του μιγαδικου επιπεδου στον εαυτο του, που διατηρει τον διπλο λογο καθε τετραδας σημειων, ειναι, αναγκαστικα, ενας μετασχηματισμος Moebius και καθοριζεται πληρως απο τρια σημεια και τις αντιστοιχες εικονες τους.

ΑΣ-12: Εστω τρια σημεια z_1,z_2,z_3 και w_1,w_2,w_3, αντιστοιχα οι εικονες τους. Λυσε την εξισωση $(w,w_1,w_2,w_3)=(z,z_1,z_2,z_3)$ ως προς w.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε, χρησιμοποιωντας την ΑΣ-8, οτι οι Y-ισομετριες στο μοντελο D^2, περιγραφονται απο τους μετασχηματισμους Moebius της μορφης:

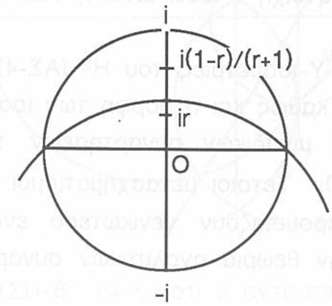
(*) Hans Schwerdtfeger, Geometry of complex numbers, Dover 1979.

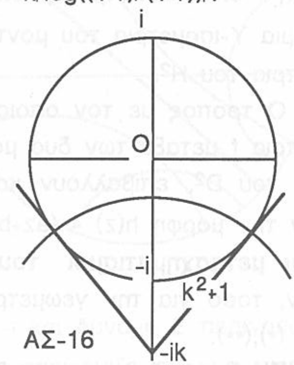
(**) Constantin Caratheodory, Conformal representation, Cambridge U.P. 1969.

13.1) $w = (az+b)/(\bar{b}z+\bar{a})$ και $(a\bar{a}-b\bar{b})>0$ ή

13.2) $w = (a\bar{z}+b)/(-\bar{b}\bar{z}-\bar{a})$ και $(-a\bar{a}+b\bar{b})<0$.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Δειξε οτι οι στροφες περι το (0,0), $w=e^{i\varphi}z$, ειναι Υ-ισομετριες στο D^2. Χρησιμοποιωντας κατοπιν τον ορισμο της ισομετριας στο D^2 (μεσω εκεινης του H^2), δειξε οτι η Υ-αποσταση $d(O,re^{i\varphi}) = k|\log((1-r)/(1+r))|$.





ΑΣ-16

ΑΣΚΗΣΗ-15 Δειξε οτι για δυο σημεια z_1, z_2 του D^2 η $w = (z-z_1)/(-\bar{z}_1z+1)$, ειναι Υ-ισομετρια που απεικονιζει το z_1 στο 0 και το z_2 στο $(z_2-z_1)/(-\bar{z}_1z_2+1)$. Το τελευταιο, με μια στροφη περι το 0, απεικονιζεται στο $|z_2-z_1|/|1-\bar{z}_1z_2|$. Συμπερανε (ΑΣ-14) οτι η Υ-αποσταση των δυο σημειων διδεται απο τον τυπο

$$d(z_1,z_2) = k\ \log\left(\frac{|1-\bar{z}_1\ z_2| + |z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1\ z_2| - |z_2-z_1|}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ-16 Δειξε οτι η αντιστροφη με κεντρο το -ik και ακτινα k^2+1, ειναι Υ-ισομετρια του D^2 και διδεται απο τον τυπο $w=(-ik\ \bar{z}-1)/(\bar{z}-ik)$. Δειξε οτι καθε αντιστροφη που αφηνει τον μοναδιαιο κυκλο S^2 αναλλοιωτο, οριζει μια ισομετρια του D^2.

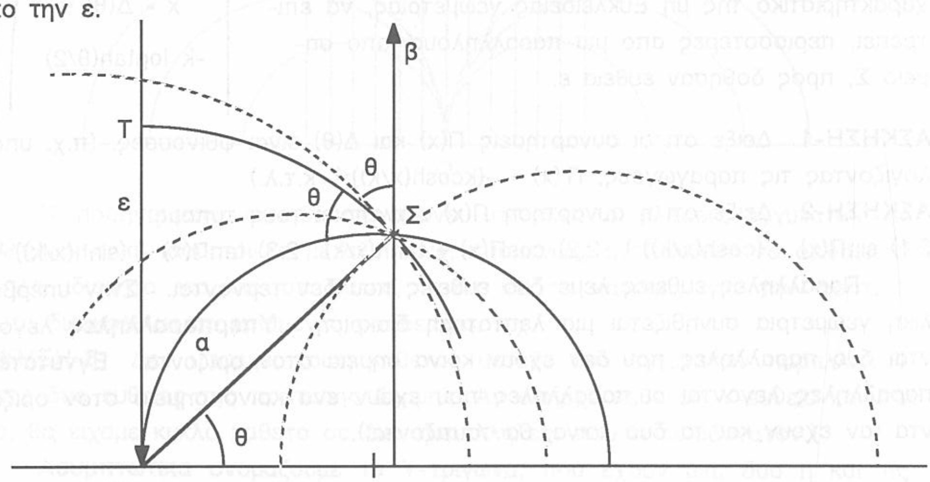
ΑΣΚΗΣΗ-17 Δειξε οτι για μια Υ-ευθεια ε του D^2 και δυο σημεια z_2,z_3 αυτης, υπαρχει Υ-ισομετρια που απεικονιζει το z_2 στο 0 και το z_3 σε ενα σημειο ir με $r=(\lambda-1)/(\lambda+1)$, οπου στον διπλο λογο $\lambda=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, τα σημεια z_1,z_4 ειναι τα σημεια τομης της ε με τον οριζοντα. Συμπερανε οτι η Υ-αποσταση των δυο σημειων ειναι $d(z_2,z_3)=k|\log(z_1,z_2,z_3,z_4)|$ (το ξεραμε ηδη λογω του ορισμου της αποστασης και της ΑΣ-11).

Ω ποποι, οιον δη νυ θεους βροτοι αιτιοωνται,
εξ ημεων γαρ φασι κακ εμμεναι, οι δε και αυτοι
σφησιν ατασθαλιησιν υπερ μορον αλγε εχουσιν
Οδυσσεια Α, 33

13. ΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Την εργασια μου την προσεχω και την αγαπω
Μα της συνθεσεως μ αποθαρρυνει σημερα η βραδυτης.
Η μερα μ επηρεασε. Η μορφη της
ολο και σκοτεινιαζει. Ολο φυσα και βρεχει.
Πιοτερο επιθυμω να δω παρα να πω. ...
Κ. Καβαφη, Ζωγραφισμενα

Ας παρουμε ενα σημειο Σ εκτος της Υ-ευθειας ε και ας φερουμε την καθετο ΣΤ στην ε. Οι Υ-ημιευθειες δια του Σ χωριζονται σε δυο κατηγοριες: αυτες που τεμνουν την ε και αυτες που δεν την τεμνουν. Μεταξυ των ημιευθειων των δυο κατηγοριων υπαρχουν δυο οριακες α και β, που σχηματιζουν γωνια θ με την ΣΤ. Καθε ημιευθεια μεταξυ των α,β τεμνει την ε ενω ολες οι αλλες (συμπεριλαμβανομενων των α,β) δεν την τεμνουν. Η θ λεγεται **γωνια παραλληλιας** και εξαρταται μονον απο την Υ-αποσταση $x = d(Σ,Τ)$ του Σ απο την ε.



Απο το σχημα και τον τυπο (8),§12 συμπεραινουμε οτι η γωνια παραλληλιας διδεται, συναρτησει του x,, απο τον τυπο

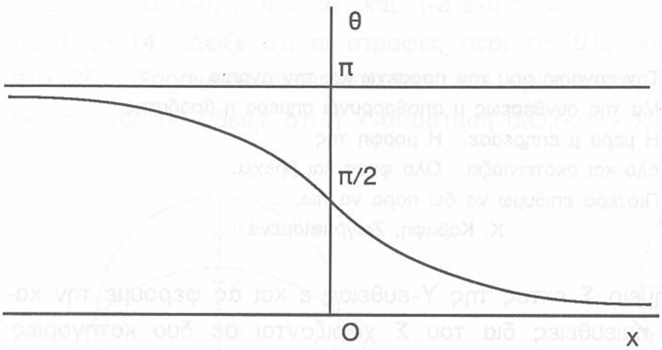
$$x = k|\log(\tan(θ/2)/\tan(π/4))| = k\,|\log(\tan(θ/2))|,$$

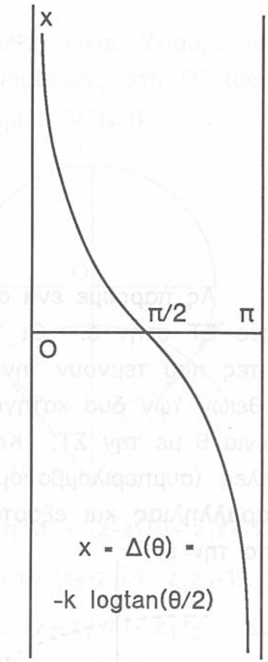
αρα για $0 \leq θ \leq π/2$, $x = -k\log(\tan(θ/2)) \Leftrightarrow \tan(θ/2) = e^{-x/k}$ και επομενως

$$θ = Π(x) = 2\mathrm{Arctan}(e^{-x/k}). \qquad (1)$$

Την Π(x) μπορουμε να επεκτεινουμε και για αρνητικα x, θετοντας γι αυτα

$$\Pi(x) = \pi - \Pi(-x).$$



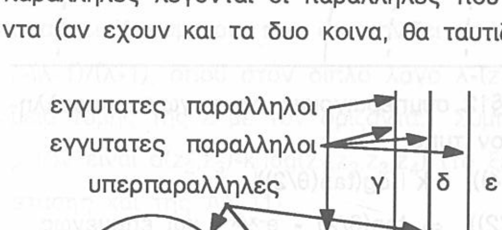


Η αντιστροφη συναρτηση $x = \Delta(\theta) = -k \ \mathrm{logtan}(\theta/2)$ ειναι, οπως και η $\Pi(x)$, φθινουσα στο $(0,\pi)$ και πληροι την εξισωση $\Delta(\pi-\theta) = -\Delta(\theta)$. Οι δυο συναρτησεις $\Pi(x)$ και $\Delta(\theta)$ οφειλουν την υπαρξη τους στο ιδιαιτερο χαρακτηριστικο της μη Ευκλειδειας γεωμετριας, να επιτρεπει, περισσοτερες απο μια παραλληλους, απο σημειο Σ, προς δοθησαν ευθεια ε.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι οι συναρτησεις $\Pi(x)$ και $\Delta(\theta)$ ειναι φθινουσες. (π.χ. υπολογιζοντας τις παραγωγους, $\Pi'(x) = -(k\cosh(x/k))^{-1}$ κ.τ.λ.)

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι η συναρτηση $\Pi(x)$ ικανοποιει τους τυπους:
2.1) $\sin\Pi(x) = (\cosh(x/k))^{-1}$ 2.2) $\cos\Pi(x) = \tanh(x/k)$ 2.3) $\tan\Pi(x) = (\sinh(x/k))^{-1}$.

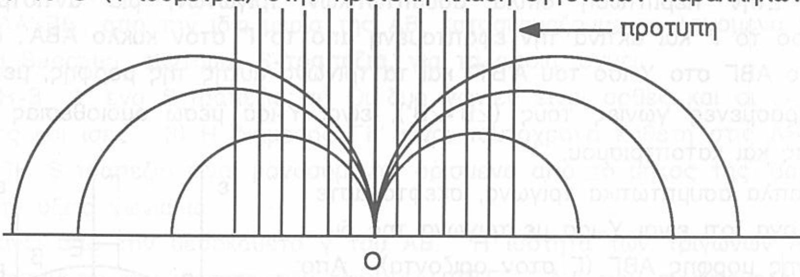
Παραλληλες ευθειες λεμε δυο ευθειες που δεν τεμνονται. Στην υπερβολικη γεωμετρια συνηθιζεται μια λεπτοτερη διακριση. **Υπερπαραλληλες** λεγονται δυο παραλληλες που δεν εχουν κοινα σημεια στον οριζοντα. **Εγγυτατες** παραλληλες λεγονται οι παραλληλες που εχουν ενα κοινο σημειο στον οριζοντα (αν εχουν και τα δυο κοινα, θα ταυτιζονται).



Η ιδια ορολογια χρησιμοποιειται και για ημιευθειες ή για προσανατολισμενες ευθειες. Αντιθετα με την Ευκλειδεια γεωμετρια, στην οποια η σχεση παραλληλιας ειναι σχεση ισοδυναμιας στο συνολο των ευθειων, εδω μονο το συνολο των προσανατολισμενων ευθειων (και των ημιευθειων) δεχεται την σχεση εγγυτατης παραλληλιας, σαν σχεση ισοδυναμιας.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι η σχεση εγγυτατης παραλληλιας, ειναι σχεση ισοδυναμιας στο συνολο των προσανατολισμενων ευθειων (ημιευθειων). Καθε κλαση ισοδυναμιας καθοριζεται απο ενα σημειο του οριζοντα, στο οποιο συγκλινουν ολες οι ευθειες (ημιευθειες) της ιδιας κλασης.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι οι προς τα πανω κατευθυνομενες Υ-ευθειες του H^2, αποτελουν μια κλαση εγγυτατων παραλληλων, που λογω της απλοτητας της θα την λεγω **προτυπη**. Καθε αλλη κλαση εγγυτατων παραλληλων, που οριζεται απο το σημειο του οριζοντα Ο, απεικονιζεται μεσω μιας αντιστροφης με κεντρο το Ο (Υ-ισομετρια) στην προτυπη κλαση εγγυτατων παραλληλων.

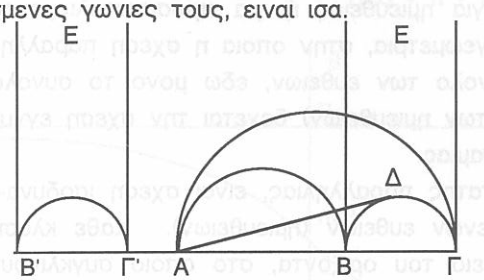


Η προηγουμενη ασκηση φανερωνει οτι ολες οι κλασεις εγγυτατων παραλληλων ειναι ισομετρικες μεταξυ τους, επομενως, αν θελουμε να αποδειξουμε μια ιδιοτητα για μια απ αυτες, αρκει να το κανουμε για την προτυπη. Τουτο διευκολυνει σε ορισμενες αποδειξεις. λ.χ.

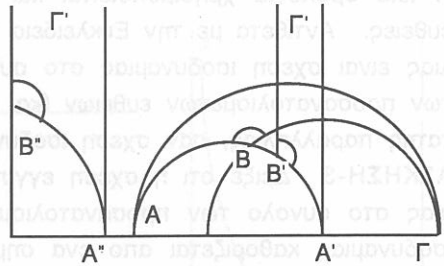
ΑΣΚΗΣΗ-5 Δεν υπαρχει κοινη καθετος μεταξυ δυο εγγυτατων παραλληλων. (Παρε δυο ευθειες της προτυπης δεσμης. Αν υπηρχε καθετος Υ-ευθεια και στις δυο, θα ειχαμε κυκλο καθετο σε δυο παραλληλες, που ειναι αδυνατον.)

Ασυμπτωτικα ονομαζουμε τα Υ-τριγωνα, που εχουν μια, δυο ή και τις τρεις κορυφες τους στον οριζοντα. Συμφωνα με την προηγουμενη παρατηρηση, δεν βλαπτει την γενικοτητα, να υποθετουμε οτι το ενα σημειο του οριζοντα ειναι το σημειο στο απειρο του θετικου y-αξονα. Τα ασυμπτωτικα τριγωνα παιρνουν τοτε μια απο τις μορφες των επομενων σχηματων και ισχυει:

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 α) Ολα τα τριπλα ασυμπτωτικα τριγωνα ειναι ισα μεταξυ τους. β) Δυο διπλα ασυμπτωτικα τριγωνα με ισες τις πεπερασμενες γωνιες τους ειναι ισα. γ) Δυο απλα ασυμπτωτικα τριγωνα με, αντιστοιχα, ισες τις πεπερασμενες γωνιες τους, ειναι ισα.



τριπλα ασυμπτωτικα

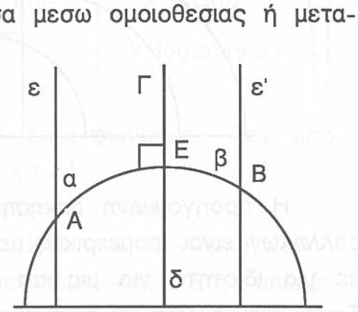


διπλα ασυμπτωτικα

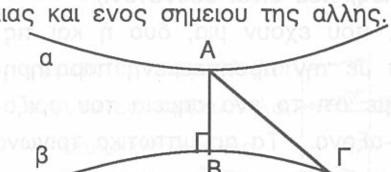
Πραγματι, στην περιπτωση των τριπλα ασυμπτωτικων τριγωνων, μια αντιστροφη με ακτινα ΑΔ, που αφηνει την "βαση" ΒΓ του ασυμπτωτικου τριγωνου αναλλοιωτη, απεικονιζει το τριγωνο ΒΓΕ σ ενα της μορφης Β'Γ'Ε και ολα τα ασυμπτωτικα αυτα τριγωνα ειναι Υ-ισα, μεσω ομοιοθεσιας ή μεταφορας.

Στην περιπτωση διπλα ασυμπτωτικων τριγωνων, μια αντιστροφη με κεντρο το Γ και ακτινα την εφαπτομενη απο το Γ στον κυκλο ΑΒΑ', απεικονιζει το ΑΒΓ στο Υ-ισο του Α'Β'Γ' και τα τριγωνα αυτης της μορφης, με ισες τις πεπερασμενες γωνιες τους (∠Β'=∠Β"), ειναι Υ-ισα μεσω ομοιοθεσιας ή μεταφορας και κατοπτρισμου.

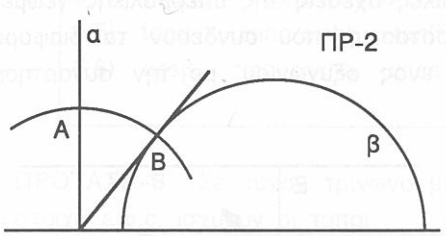
Για απλα ασυμπτωτικα τριγωνα, σκεφτομαστε αναλογα, οτι ειναι Υ-ισα με τριγωνα της διπλανης μορφης ΑΒΓ (Γ στον οριζοντα). Απο το Γ φαιρνουμε την καθετο δ στην ΑΒ, οποτε το μηκος της βασης ΑΒ= ΑΕ+ΕΒ=Δ(α)+Δ(β) εξαρταται μονο απ τις πεπερασμενες γωνιες α,β.

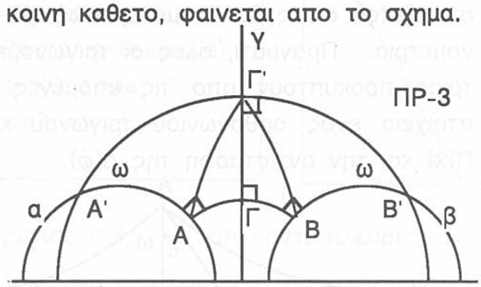


ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Κοινη καθετο εχουν δυο Υ-ευθειες, τοτε και μονον, οταν ειναι υπερπαραλληλες. Σ αυτη την περιπτωση η κοινη καθετος ειναι μοναδικη και χαρακτηριζεται απ το οτι ελαχιστοποιει την αποσταση μεταξυ ενος σημειου της μιας και ενος σημειου της αλλης.



Πραγματι, αν ΑΒ ειναι η ελαχιστη αποσταση μεταξυ δυο ευθειων, τοτε το ΑΒ, πρεπει να ειναι καθετο και στις δυο. Διοτι αν η ελαχιστη αποσταση ΑΓ δεν ηταν καθετη στην β, τοτε, απο το Α θα φερναμε καθετη ΑΒ, θα σχηματιζαμε το ορθογωνιο ΑΒΓ, στο οποιο η υποτεινουσα ΑΓ ειναι μεγαλυτερη του ΑΒ (ΠΡ-6, §2), ατοπο. Δεν υπαρχουν δυο τετοιες ελαχιστες ΑΒ, Α'Β', διοτι αν υπηρχαν, θα σχηματιζοταν ενα Υ-τετραπλευρο με 4 ορθες, που ειναι ατοπο. Το οτι τεμνομενες ευθειες δεν εχουν κοινη καθετο ειναι σαφες. Το οτι εγγυτατες παραλληλοι επισης δεν εχουν κοινη καθετο, το ειδαμε στην ΑΣ-5. Το οτι δυο υπερπαραλληλοι εχουν παντοτε κοινη καθετο, φαινεται απο το σχημα.





Παιρνοντας δυο υπερπαραλληλες α,β, την κοινη τους καθετο ΑΒ και ισα τμηματα ΑΑ'=ΒΒ', απο την ιδια μερια της ΑΒ, κατασκευαζουμε τα λεγομενα τραπεζια του Saccheri, συντομα: **S-τραπεζια**, για τα οποια ισχυει:

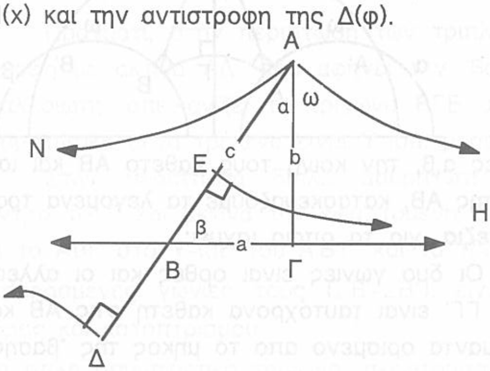
ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Σ ενα S-τραπεζιο: α) Οι δυο γωνιες ειναι ορθες και οι αλλες δυο οξειες και ισες. β) Η διαμεσος ΓΓ' ειναι ταυτοχρονα καθετη στις ΑΒ και Α'Β'. γ) Το S-τραπεζιο ειναι μονοσημαντα ορισμενο απο το μηκος της "βασης" ΑΒ και την οξεια γωνια ω.

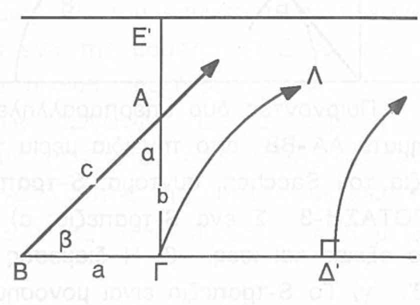
Ξεκινω απο την μεσοκαθετο γ του ΑΒ. Η ισοτητα των τριγωνων ΑΓΓ', ΓΒΓ', συνεπαγεται την ισοτητα των τριγωνων ΒΒ'Γ', Γ'Α'Α που συνεπαγεται την ισοτητα Β'Γ' και Γ'Α' και $\angle ΓΓ'Β' = \angle ΓΓ'Α' = \pi/2$. Τουτα αποδεικνυουν τα α,β. Για το γ παρατηρησε οτι καθως το Γ' κινηται επι της γ, απομακρυνομενο του Γ, η ω μεταβαλλεται φθινουσα γνησιως. Διαφορετικα, θα ειχαμε τετραπλευρο με αθροισμα γωνιων μεγαλυτερο ή ισο του 2π.

Πρεπει να σημειωσω οτι το ολο σχημα ειναι συμμετρικο ως προς την γ. Ο ευκλειδειος κατοπτρισμος ως προς την γ ειναι ταυτοχρονα και Υ-κατοπτρισμος και το σχημα παραμενει αναλλοιωτο ως προς αυτον. **Υ-κατοπτρισμος** ειναι η ισομετρια του Υ-επιπεδου που οριζεται οπως και στην Ευκλειδεια: Υπαρχει μια ευθεια γ (το κατοπτρο) και ο μετασχηματισμος, εξ ορισμου, αντιστοιχει σε καθε σημειο Α ενα σημειο Α', ετσι ωστε η γ να ειναι μεσοκαθετος του ΑΑ'.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι ο Υ-κατοπτρισμος ως προς την Υ-ευθεια γ του H^2 συμπιπτει με τον ευκλειδειο, οταν η γ ειναι ημιευθεια καθετη στον οριζοντα και με την αντιστροφη ως προς γ, οταν η τελευταια ειναι ημικυκλιο. Συμπερανε οτι καθε Y-ισομετρια ειναι συνθεση Y-κατοπτρισμων.

Το "μισο" ενος S-τραπεζιου, οπως το ΓΒΒ'Γ' στην ΠΡ-3 λεγεται **οξυγωνιο**. Τουτο, λογω της αναλογης ιδιοτητας του S-τραπεζιου, καθοριζεται πληρως οταν γνωριζουμε τις δυο καθετες πλευρες ΓΓ' και ΓΒ ή μια εξ αυτων και την οξεια γωνια ω (οι αλλες ειναι ολες ορθες). Το οξυγωνιο τετραπλευρο σχετιζεται, οπως θα δουμε αμεσως, με το ορθογωνιο τριγωνο και την Y-τριγωνομετρια. Πραγματι, ολες οι τριγωνομετρικες σχεσεις της υπερβολικης γεωμετριας προκυπτουν απο τις επομενες προτασεις, που συνδεουν τα διαφορα στοιχεια ενος ορθογωνιου τριγωνου και ενος οξυγωνιου, με την συναρτηση Π(x) και την αντιστροφη της Δ(φ).





ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Σ ενα ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ με οξειες γωνιες α,β, και απεναντι πλευρες αντιστοιχα a,b ισχυουν οι σχεσεις:

4.1) $\alpha+\Pi(c+\Delta(\beta)) = \Pi(b)$ .... στο σχημα: $\Delta B = BE = \Delta(\beta)$

4.2) $\alpha+\Pi(b) = \Pi(c-\Delta(\beta))$ .... στο σχημα: $\omega = \Pi(b)$, $\alpha+\omega = \Pi(c-\Delta(\beta))$.

4.3) $\Pi(c-\Delta(\beta)) - \Pi(c+\Delta(\beta)) = 2\alpha$ ...... στο σχημα: $\omega = \angle \Gamma A N = \Pi(c+\Delta(\beta))$.

4.4) $\Pi(c-\Delta(\beta)) + \Pi(c+\Delta(\beta)) = 2\Pi(b)$

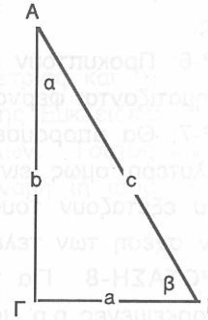
4.5) $\Pi(\Delta(\alpha)+b) + \Pi(\Delta(\beta)-a) = \pi/2$ .... στο σχημα: $AE' = \Delta(\alpha)$, $\angle A\Gamma\Lambda = \Pi(\Delta(\alpha)+b)$, $\Gamma\Delta' = \Delta(\beta)-a$, $\angle \Delta'\Gamma\Lambda = \Pi(\Delta(\beta)-a)$.

Η αποδειξη διαβαζεται στο σχημα. Οι κατευθυνομενες ευθειες που δειχνουν προς την ιδια μερια, οριζουν το ιδιο σημειο του οριζοντα. Τα Δ,Ε,Δ',Ε' επιλεγουμε ετσι ωστε να ικανοποιουνται οι σχεσεις δεξια των τυπων. Εφαρμοζουμε τον ορισμο της γωνιας παραλληλιας. Οι δυο πρωτες προκυπτουν αμεσως. Οι δυο επομενες προσθαφαιρωντας τις προηγουμενες. Η τελευταια απο το δευτερο σχημα.

Για να απλοποιησω τους τυπους, παιρνω στα επομενα την μοναδα μηκους ετσι ωστε k=1. Αν δεν το εκανα, θα επρεπε αντι των a,b,c,... να εγραφα a/k, b/k, c/k, ...

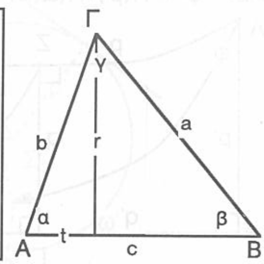
ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Σε ορθογωνιο τριγωνο με οξειες γωνιες α,β, αντιστοιχες απεναντι πλευρες a,b και υποτεινουσα c ισχυουν οι τυποι:

5.1) $\cosh c = \cot\alpha \cot\beta$.
5.2) $\sin\alpha = \sinh a/\sinh c$, $\sin\beta = \sinh b/\sinh c$.
5.3) $\cos\alpha = \tanh b/\tanh c$, $\cos\beta = \tanh a/\tanh c$.
5.4) $\cosh c = \cosh a \cosh b$ (Υ-Πυθαγορειο θεωρημα)
5.5) $\tan\alpha = \tanh a/\sinh b$, $\tan\beta = \tanh b/\sinh a$.
5.6) $\cos\beta = \sin\alpha \cosh b$, $\cos\alpha = \sin\beta \cosh a$.



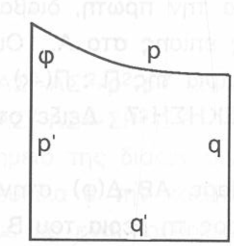
ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Σε τυχον τριγωνο με γωνιες α,β,γ και απεναντι πλευρες αντιστοιχα a,b,c, ισχυουν οι τυποι:

6.1) $\sin\alpha/\sinh a = \sin\beta/\sinh b = \sin\gamma/\sinh c$.
(τυπος του ημιτονου)
6.2) $\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos\alpha$
(1ος τυπος συνημιτονου)
6.3) $\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cosh a$.
(2ος τυπος συνημιτονου)



ΠΡΟΤΑΣΗ-7 Σε τυχον οξυγωνιο με οξεια γωνια φ, απεναντι καθετες q,q' και προσκειμενες στην φ, πλευρες p,p', ισχυουν οι τυποι:

7.1) $\sinh p' = \cosh p \sinh q$, $\sinh p = \cosh p' \sinh q'$.
7.2) $\cot\varphi = \sinh p \tanh q$, $\cot\varphi = \sinh p' \tanh q'$.
7.3) $\cos\varphi = \tanh p \tanh p' = \sinh q \sinh q'$.
7.4) $\tanh p = \tanh q' \cosh q$, $\tanh p' = \tanh q \cosh q'$.
7.5) $\cosh q' = \cosh p \sin\varphi$, $\cosh q = \cosh p' \sin\varphi$.



ΠΡ-5: Η αποδειξη στηριζεται στους τυπους 4.1-4.4 και γνωστες τριγωνομετρικες ταυτοτητες (χρειαζεται τυπολογιο και πολλη υπομονη στους λογαριασμους). Ας δειξω την 5.1, που με την βοηθεια της 4.3 μεταφραζεται στην:

$$\cosh c = \cot\alpha \cot\beta = \cot((\Pi(c-\Delta(\beta))-\Pi(c+\Delta(\beta)))/2)\ \cot((\Pi(c-\Delta(\alpha))-\Pi(c+\Delta(\alpha)))/2).$$

Τουτη χρησιμοποιωντας τους τριγωνομετρικους τυπους $\cot(\gamma-\delta) = (\cot\gamma \cot\delta + 1)/(\cot\gamma - \cot\delta)$ και $\cot(\varphi/2) = (1+\cos\varphi)/\sin\varphi$ (η οποια για $\varphi=\Pi(x)$, λογω της ΑΣ-2 διδει την χρησιμη: (*) $\cot(\Pi(x)/2)=e^x$) γραφεται

$$\cosh c/\cot\beta = (e^{c-\Delta(\beta)}e^{c+\Delta(\beta)}+1)/(e^{c+\Delta(\beta)}-e^{c-\Delta(\beta)}) = \cosh c/(\sinh\Delta(\beta)),$$

που αληθευει, αφου κατα την ΑΣ-2, sinh(Δ(β))=cotβ. Αναλογα προκυπτει η 5.2 απο την 4.4 και οι υπολοιπες απ αυτες τις δυο και τριγωνομετρικες ταυτοτητες.

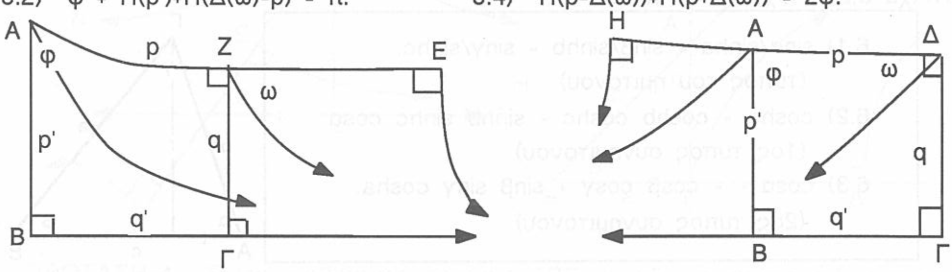
ΠΡ-6: Προκυπτουν απο τις 5.1-5.6, εφαρμοζοντας τις στα δυο ορθογωνια που σχηματιζονται φερνοντας το υψος απο μια κορυφη.

ΠΡ-7: Θα μπορουσε ν αποδειχθη χωριζοντας το οξυγωνιο σε δυο ορθογωνια. Καλυτερη ομως ειναι η αποδειξη με την βοηθεια των επομενων προτασεων, που εξεταζουν τους αναλογους των 4.1-4.5 τυπων, για οξυγωνια, καθως και την σχεση των τελευταιων με τα ορθογωνια τριγωνα.

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 Για το οξυγωνιο με οξεια γωνια φ, απεναντι πλευρες q,q' και προσκειμενες p,p', ισχυουν οι σχεσεις (οπου ω = π/2 - Π(q)):

8.1) φ = Π(p')+Π(p+Δ(ω)). 8.3) Π(p-Δ(ω))-Π(p+Δ(ω)) = 2Π(p').

8.2) φ + Π(p')+Π(Δ(ω)-p) = π. 8.4) Π(p-Δ(ω))+Π(p+Δ(ω)) = 2φ.



Στα σχηματα παραπανω, παρε ΖΕ=Δ(ω), στο πρωτο και ΗΔ=Δ(ω), στο δευτερο. Για την πρωτη, διαβασε τις γωνιες στο Α. Για την δευτερη διαβασε τις γωνιες επισης στο Α. Οι δυο τελευταιες προκυπτουν απο τις πρωτες και την συμμετρια της Π : Π(-x) = π - Π(x).

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι σ ενα οξυγωνιο, οπως προηγουμενως, ισχυει

Π(p'+Δ(φ))+Π(Δ(ω)-q') = π/2.

(Παρε ΑΒ'=Δ(φ) στην προεκταση προς τα πανω της ΒΑ, ΓΘ=Δ(ω) στην ΓΒ προς τη μερια του Β, στο δευτερο σχημα. Διαβασε γωνιες στο Β.)

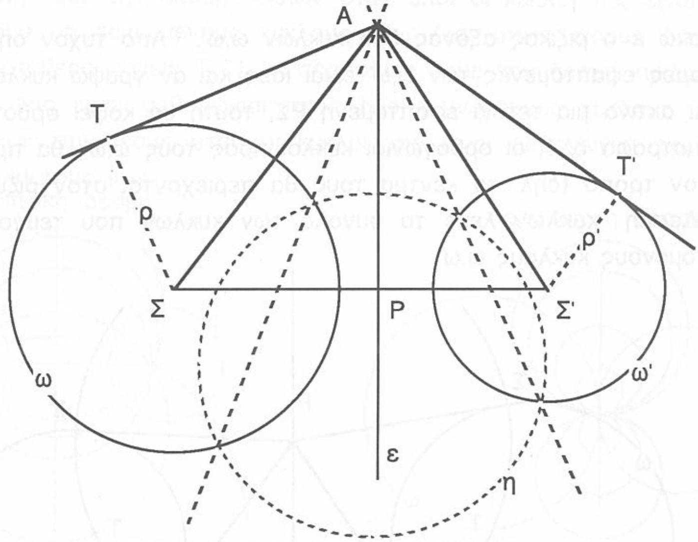
ΑΣΚΗΣΗ-8 Σε ορθογωνιο τριγωνο με οξειες γωνιες α,β και υποτεινουσα c, αντιστοιχει οξυγωνιο με τα στοιχεια p=c, q=Δ(π/2-β), p'=Δ(α), q'=a και φ=Π(b). Και αντιστροφα, σε οξυγωνιο με τα στοιχεια p,q,p',q',φ αντιστοιχει ορθογωνιο τριγωνο με τα στοιχεια a=q', b=Δ(φ), c=p, α=Π(p'), β=π/2-Π(q).

ΑΣΚΗΣΗ-9 Αποδειξε, με την βοηθεια της ΑΣ-8, τις ισοτητες της ΠΡ-7.

Εστι που νεων ξυνεσις και γεροντων αξυνεσιη, χρονος γαρ ου διδασκει φρονειν, αλλ ωραιη τροφη και φυσις. Δημοκριτου 39.

14. ΔΕΣΜΕΣ ΚΥΚΛΩΝ

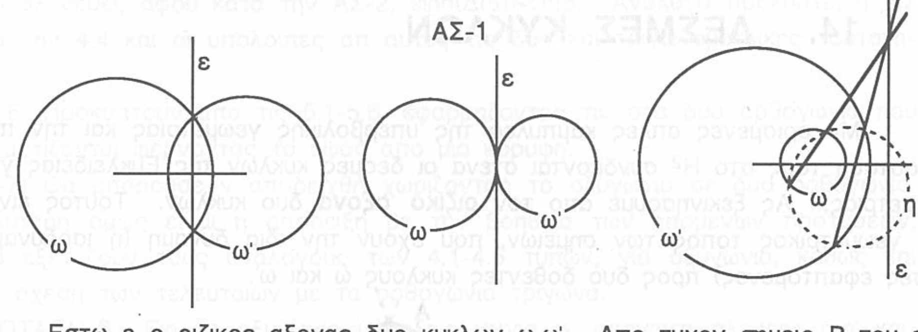
Με ορισμενες απλες καμπυλες της υπερβολικης γεωμετριας και την παρασταση τους στο H^2 συνδεονται στενα οι δεσμες κυκλων της Ευκλειδειας γεωμετριας. Ας ξεκινησουμε απο τον **ριζικο αξονα** δυο κυκλων. Τουτος ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων, που εχουν την ιδια δυναμη (ή ισοδυναμα ισες εφαπτομενες) προς δυο δοθεντες κυκλους ω και ω'.



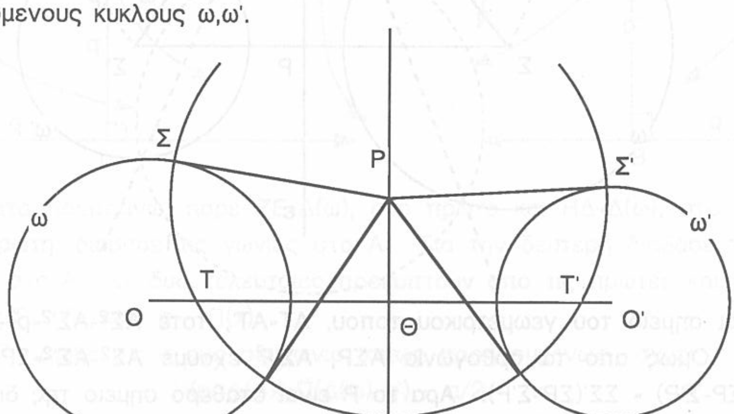
Αν Α ειναι σημειο του γεωμετρικου τοπου, ΑΤ=ΑΤ', τοτε $Α Σ^2 - ΑΣ'^2 = ρ^2 - ρ'^2$ ειναι σταθερο. Ομως απο τα ορθογωνια ΑΣΡ, ΑΣ'Ρ εχουμε $ΑΣ^2 - ΑΣ'^2 = ΣΡ^2 - Σ'Ρ^2$ = (ΣΡ+Σ'Ρ)(ΣΡ-Σ'Ρ) = ΣΣ'(ΣΡ-Σ'Ρ). Αρα το Ρ ειναι σταθερο σημειο της διακεντρου των κυκλων ω,ω' και ο ριζικος αξονας συμπιπτει με την ευθεια ε την καθετη της ΣΣ' στο Ρ. Πρακτικα, τον ριζικο αξονα τον βρισκουμε με ενα βοηθητικο κυκλο η που τεμνει τους ω,ω'. Το σημειο τομης των κοινων χορδων ειναι πανω στον ριζικο αξονα των ω,ω' (ΠΡ-ΙΙΙ-36, §4).

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι: α) Αν οι κυκλοι ω,ω' τεμνονται, τοτε ο ριζικος τους αξονας συμπιπτει με την κοινη χορδη. β) Αν οι κυκλοι ω,ω' εφαπτονται, τοτε ο ριζικος τους αξονας συμπιπτει με την κοινη εφαπτομενη τους. γ) Αν οι κυκλοι ω,ω' περιεχονται ο ενας στον αλλο, τοτε ο ριζικος αξονας ειναι ευθεια καθετη στην διακεντρο τους, που κατασκευαζεται με βοηθητικο κυκλο, οπως και προηγουμενως.

ΑΣ-1



Εστω ε ο ριζικος αξονας δυο κυκλων ω,ω'. Απο τυχον σημειο Ρ του ε, οι τεσσαρες εφαπτομενες των ω,ω' ειναι ισες και αν γραψω κυκλο α με κεντρο το Ρ και ακτινα μια τετοια εφαπτομενη ΡΣ, τουτη θα κοψει ορθογωνια τους ω, ω'. Αντιστροφα ολοι οι ορθογωνιοι κυκλοι προς τους ω,ω', θα προκυπτουν κατ αυτον τον τροπο (δηλ. τα κεντρα τους θα περιεχονται στον ριζικο αξονα των ω,ω'). **Δεσμη κυκλων** λεμε το συνολο των κυκλων που τεμνουν ορθογωνια δυο δεδομενους κυκλους ω,ω'.



ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι ολοι οι κυκλοι οι ορθογωνιοι προς δυο μη τεμνομενους κυκλους ω,ω' περνουν απο δυο σταθερα σημεια Τ,Τ' της διακεντρου των ΟΟ'. (Κατα την ΑΣ-7,§10 καθε κυκλος που τεμνει ορθογωνια τους ω,ω' θα παραμενει αναλλοιωτος κατα την αντιστροφη που εναλλασσει τους ω,ω'. Τα Τ,Τ' ειναι αντιστροφα μεταξυ τους ως προς αυτη την αντιστροφη και συμμετρικα ως προς τον ριζικο αξονα ε των ω,ω'.)

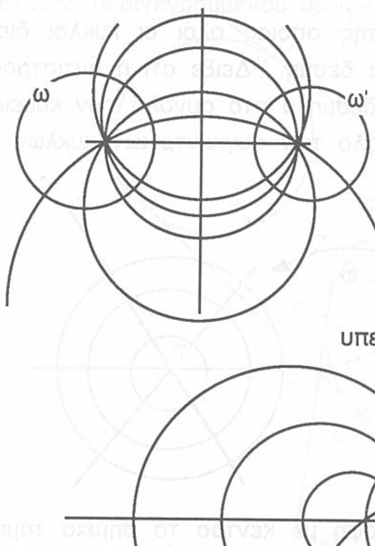
ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι ολοι οι κυκλοι οι ορθογωνιοι προς δυο δοθεντες ω,ω' εχουν, ανα δυο, κοινο ριζικο αξονα, την διακεντρο ΟΟ' των ω,ω'.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι ολοι οι κυκλοι οι διερχομενοι απο τα σημεια Τ,Τ', στο προηγουμενο σχημα, ειναι ορθογωνιοι στους ω,ω'. (Τα Τ,Τ' ειναι αντιστροφα ως προς την αντιστροφη που εναλλασσει τους ω,ω', αρα οι κυκλοι που διερχονται απο τα Τ,Τ' ειναι αναλλοιωτοι ως προς αυτη την αντιστροφη και τεμνουν τους ω,ω' υπο ισες γωνιες. Οτι αυτες οι γωνιες ειναι ορθες προκυπτει απο την ιδιοτητα των Ο,Ο': $ΟΣ^2$=(ΟΤ)(ΟΤ') και $Ο'Σ'^2$=(Ο'Τ')(Ο'Τ).)

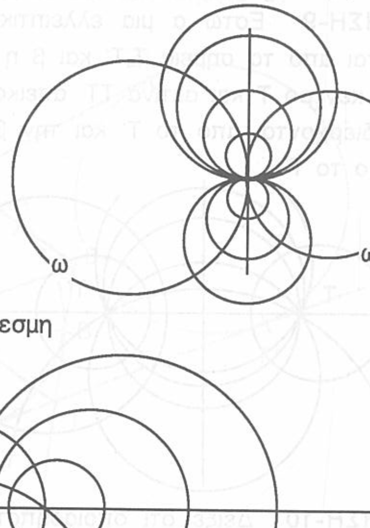
ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι η δεσμη κυκλων μπορει να ορισθει σαν ενα συνολο κυκλων που εχουν ανα δυο τον ιδιο ριζικο αξονα.

Ελλειπτικη λεμε την δεσμη κυκλων οταν ολοι οι κυκλοι της ειναι ορθογωνιοι προς δυο μη τεμνομενους κυκλους ω,ω' (και οπως ειδαμε διερχονται ολοι απο δυο σταθερα σημεια Τ,Τ'). **Υπερβολικη** λεμε την δεσμη κυκλων οταν ολοι οι κυκλοι της ειναι ορθογωνιοι προς δυο τεμνομενους κυκλους. Τελος **παραβολικη** λεμε την δεσμη οταν οι κυκλοι της ειναι ορθογωνιοι προς δυο εφαπτομενους κυκλους ω,ω'.

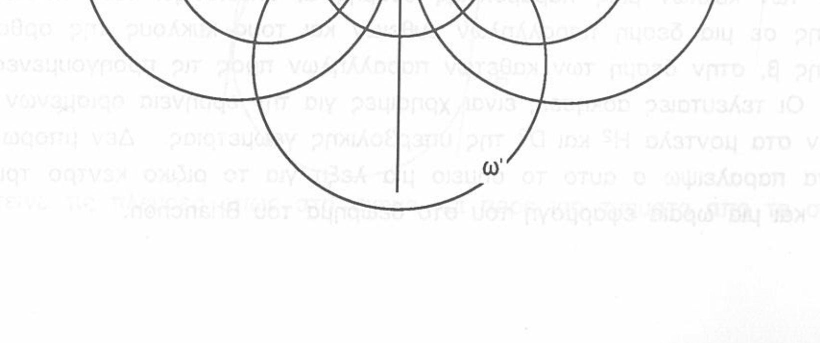
ελλειπτικη δεσμη



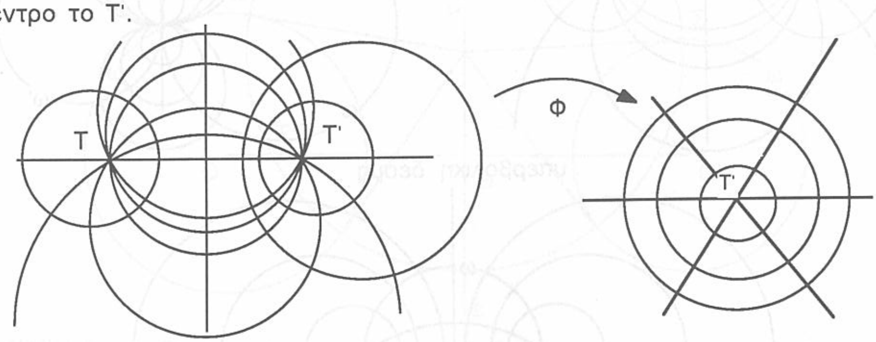
παραβολικη δεσμη



υπερβολικη δεσμη



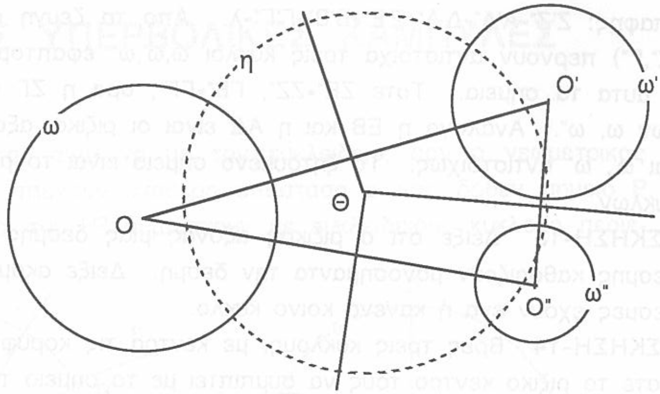
Καθε δεσμη κυκλων α ειναι φυσιολογικα συνδεδεμενη με την **ορθογωνια** προς αυτην δεσμη κυκλων α' που αποτελειται απο ολους τους κυκλους τους ορθογωνιους προς δυο κυκλους της δεσμης α.
Οπως ειδαμε προηγουμενως, μια δεσμη κυκλων χαρακτηριζεται απο ενα κοινο ριζικο αξονα για ολα τα ζευγη κυκλων της, τον οποιο ονομαζουμε **ριζικο αξονα της δεσμης**.
ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι αν κυκλος η ειναι ορθογωνιος προς δυο κυκλους ω,ω' μιας δεσμης α, τοτε ειναι ορθογωνιος και προς ολους τους κυκλους της δεσμης α. (Χρησιμοποιησε τον ριζικο αξονα της δεσμης.)
ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι οι δεσμες α,α' ειναι ορθογωνιες, τοτε ακριβως, οταν ο ριζικος αξονας της μιας συμπιπτει με την διακεντρο ολων των ζευγων κυκλων της αλλης.
ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι η ορθογωνια δεσμη μιας ελλειπτικης ειναι υπερβολικη και αντιστροφα. Δειξε οτι η ορθογωνια δεσμη μιας παραβολικης ειναι παλι παραβολικη.
ΑΣΚΗΣΗ-9 Εστω α μια ελλειπτικη δεσμη της οποιας ολοι οι κυκλοι διερχονται απο τα σημεια Τ,Τ' και β η ορθογωνια δεσμη. Δειξε οτι η αντιστροφη Φ με κεντρο Τ και ακτινα ΤΤ' απεικονιζει την δεσμη α στο συνολο των ευθειων που διερχονται απο το Τ' και την β στο συνολο των συγκεντρικων κυκλων με κεντρο το Τ'.



ΑΣΚΗΣΗ-10 Δειξε οτι οποιαδηποτε αντιστροφη με κεντρο το σημειο τομης ολων των κυκλων μιας παραβολικης δεσμης α, απεικονιζει τους κυκλους της δεσμης σε μια δεσμη παραλληλων ευθειων και τους κυκλους της ορθογωνιας δεσμης β, στην δεσμη των καθετων παραλληλων προς τις προηγουμενες.

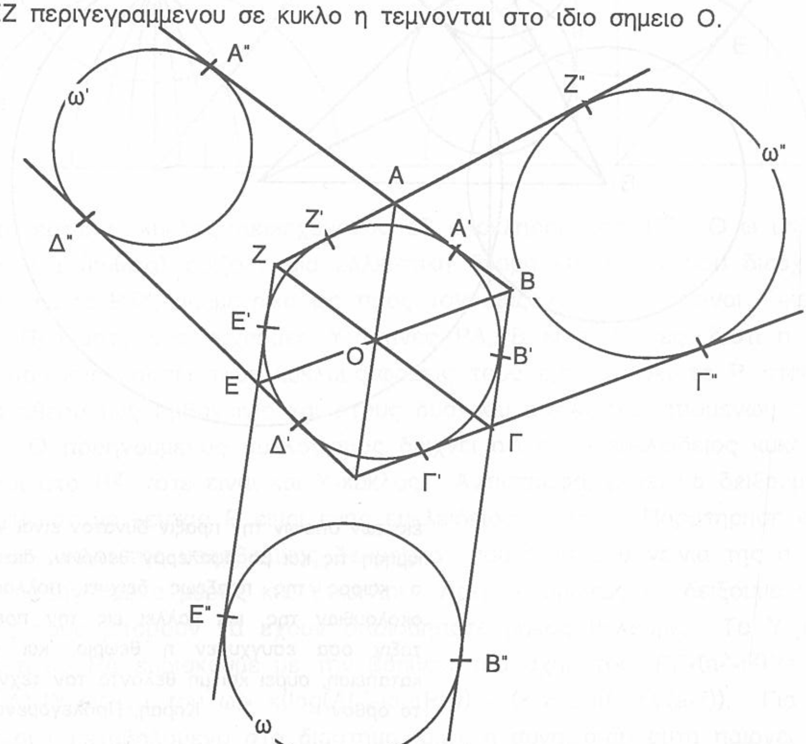
Οι τελευταιες ασκησεις ειναι χρησιμες για την ερμηνεια ορισμενων φαινομενων στα μοντελα H^2 και D^2 της υπερβολικης γεωμετριας. Δεν μπορω ωστοσο να παραλειψω σ αυτο το σημειο μια λεξη για το ριζικο κεντρο τριων κυκλων και μια ωραια εφαρμογη του στο θεωρημα του Brianchon.

Τρεις κυκλοι ω,ω', ω", οριζουν ανα δυο τρεις ριζικους αξονες. Οταν οι δυο εξ αυτων τεμνονται, τοτε και ο τριτος διερχεται απο το σημειο τομης των Θ, που λεγεται **ριζικο κεντρο** των τριων κυκλων.



ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι υπαρχει κυκλος η, ορθογωνιος προς τρεις δοθεντες ω, ω', ω", τοτε και μονον, οταν υπαρχει το ριζικο κεντρο των τριων κυκλων.

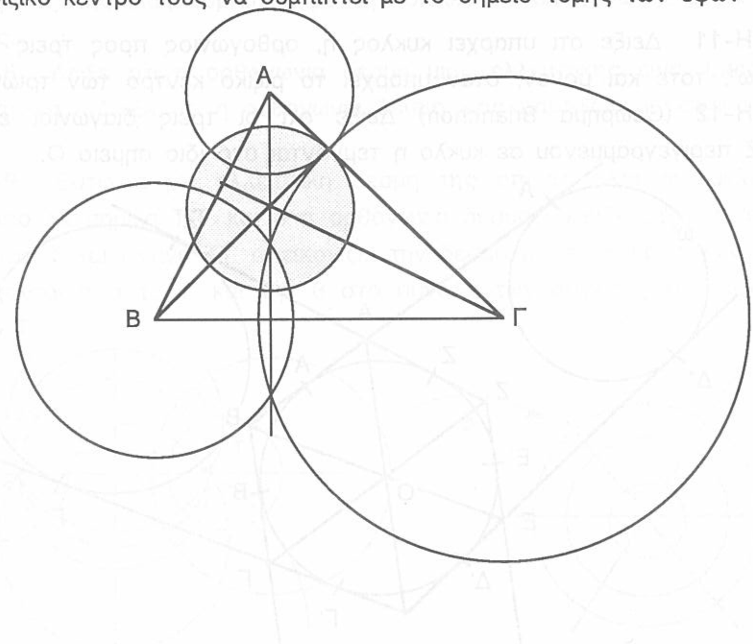
ΑΣΚΗΣΗ-12 (Θεωρημα Brianchon) Δειξε οτι οι τρεις διαγωνιοι εξαγωνου ΑΒΓΔΕΖ περιγεγραμμενου σε κυκλο η τεμνονται στο ιδιο σημειο Ο.



Προεκτεινε τις πλευρες οπως στο σχημα και παρε ισα τμηματα απο τα σημεια επαφης: Ζ'Ζ"=Α'Α"=Δ'Δ"=Ε'Ε"=Β'Β"=Γ'Γ"=λ. Απο τα ζευγη σημειων (Ε",Β"), (Δ",Α"), (Ζ",Γ") περνουν αντιστοιχα τρεις κυκλοι ω,ω',ω" εφαπτομενοι των προεκτασεων σ αυτα τα σημεια. Τοτε ΖΕ"=ΖΖ", ΓΒ"=ΓΓ", αρα η ΖΓ ειναι ο ριζικος αξονας των ω, ω". Αναλογα η ΕΒ και η ΑΔ ειναι οι ριζικοι αξονες των κυκλων ω, ω' και ω', ω" αντιστοιχως. Το ζητουμενο σημειο ειναι το ριζικο κεντρο των τριων κυκλων.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι ο ριζικος αξονας μιας δεσμης και ενας κυκλος της δεσμης καθοριζουν μονοσημαντα την δεσμη. Δειξε ακομη οτι δυο διαφορετικες δεσμες εχουν ενα ή κανενα κοινο κυκλο.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Βρες τρεις κυκλους, με κεντρα τις κορυφες τριγωνου ΑΒΓ, ετσι ωστε το ριζικο κεντρο τους να συμπιπτει με το σημειο τομης των υψων του.

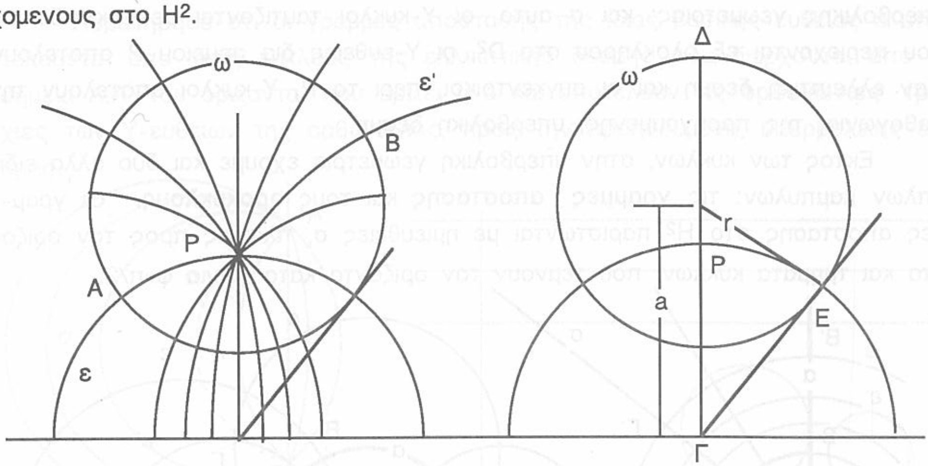


εις των οποιων την πραξιν δυνατον ειναι να ευδοκιμηση τις και με σφαλεραν θεωριαν, διοτι αυτος ο καιρος της πραξεως δειχνει πολλακις την ακολουθιαν της, και βαλλει εις την πρεπουσαν ταξιν οσα εσυγχυσεν η θεωρια, και αν δεν καταπειση, συρει και μη θελοντα τον τεχνιτην εις το ορθον. Κοραη, Προλεγομενα Β 398

15. ΑΠΛΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Ο **Υ-κυκλος** οριζεται, αναλογα με τον ευκλειδειο, σαν ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που απεχουν σταθερη αποσταση ρ απο δοθεν σημειο Ρ.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Οι Υ-κυκλοι του H^2 συμπιπτουν με ευκλειδειους κυκλους περιεχομενους στο H^2.



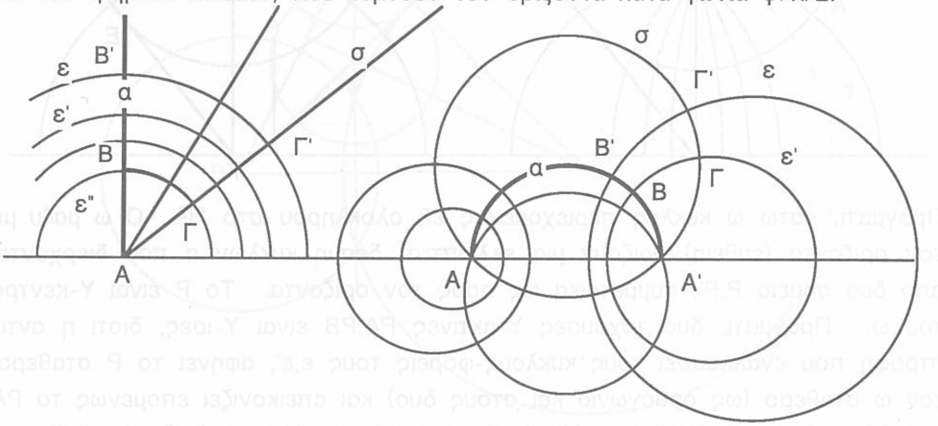
Πραγματι, εστω ω κυκλος περιεχομενος εξ ολοκληρου στο H^2. Ο ω μαζυ με τον οριζοντα (ευθεια) οριζουν μια ελλειπτικη δεσμη κυκλων α που διερχονται απο δυο σημεια Ρ,Ρ', συμμετρικα ως προς τον οριζοντα. Το Ρ ειναι Υ-κεντρο του ω. Πραγματι, δυο τυχουσες Υ-ακτινες ΡΑ,ΡΒ ειναι Υ-ισες, διοτι η αντιστροφη που εναλλασσει τους κυκλους-φορεις τους ε,ε', αφηνει το Ρ σταθερο, τον ω σταθερο (ως ορθογωνιο και στους δυο) και απεικονιζει επομενως το ΡΑ στο ΡΒ. Ο προηγουμενος συλλογισμος δειχνει οτι αν ο ευκλειδειος κυκλος ω περιεχεται στο H^2, τοτε ειναι και Υ-κυκλος. Αντιστροφα, μενει να δειξουμε οτι καθε Υ-κυκλος με κεντρο Ρ ειναι ενας ευκλειδειος κυκλος. Παρατηρησε οτι οι ευκλειδειοι κυκλοι της υπερβολικης δεσμης α', που ειναι ορθογωνια της α, ειναι κατα το προηγουμενο μερος και Υ-κυκλοι. Αρκει επομενως να δειξουμε οτι οι Υ-ακτινες τους μπορουν να εχουν οποιοδηποτε μηκος θελουμε. Το Υ-μηκος της Υ-ακτινας ΡΔ ευρισκουμε με την βοηθεια του σχηματος: $Ρ Γ=(a^2-r^2)^{1/2}$, $ΔΓ= a+r$, $d(Ρ,Δ)=$(Υ-ακτινα του ω)$=$ $k(\log(ΔΓ)-\log(ΡΓ))$ $=$ $(k/2)\log((a+r)/(a-r))$. Για σταθερο a και r μεταβαλομενο στο διαστημα (0,a), η συναρτηση αυτη παιρνει ολες τις θετικες πραγματικες τιμες, πραγμα που ολοκληρωνει την αποδειξη μας.

Σημειωσε, στην προηγουμενη αποδειξη, οτι οι Υ-ακτινες απο το σημειο Ρ ταυτιζονται με τους κυκλους (ακριβεστερα ημικυκλια) μιας ελλειπτικης δεσμης και οι Υ-συγκεντρικοι κυκλοι, με κεντρο το Ρ, ταυτιζονται με τους κυκλους της ορθογωνιας, της προηγουμενης, δεσμης κυκλων.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι δυο Υ-κυκλοι με ισες ακτινες ειναι Υ-ισοι. Ερμηνευσε το σχημα της σελιδας 69.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Αποδειξε το αναλογο της προτασης-1 για το μοντελο D^2 της υπερβολικης γεωμετριας: και σ αυτο, οι Υ-κυκλοι ταυτιζονται με ευκλειδειους που περιεχονται εξ ολοκληρου στο D^2, οι Υ-ευθειες δια σημειου Ρ αποτελουν μιαν ελλειπτικη δεσμη και οι συγκεντρικοι, περι το Ρ, Υ-κυκλοι αποτελουν την ορθογωνια, της προηγουμενης, υπερβολικη δεσμη.

Εκτος των κυκλων, στην υπερβολικη γεωμετρια εχουμε και δυο αλλα ειδη απλων καμπυλων: τις **γραμμες αποστασης** και τους **ροκυκλους**. Οι γραμμες αποστασης στο H^2 παριστωνται με ημιευθειες σ, πλαγιες προς τον οριζοντα και τμηματα κυκλων, που τεμνουν τον οριζοντα κατα γωνια $\varphi \neq \pi/2$.



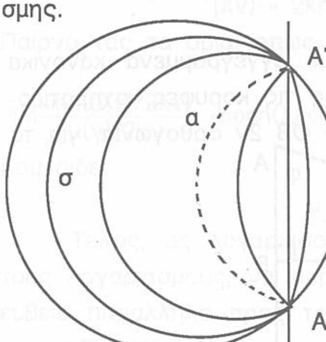
ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Οι γραμμες αποστασης σ ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων του H^2, τα οποια απεχουν σταθερη αποσταση λ απο Υ-ευθεια α του H^2.

Πραγματι, τουτο ειναι προφανες, οταν η σ ειναι ημιευθεια πλαγια προς τον οριζοντα, στο σημειο Α. Οι ομοιοθεσιες με κεντρο το Α ειναι Υ-ισομετριες και επομενως το Υ-μηκος των ευθυγραμμων τμηματων ΒΓ=Β'Γ' ειναι σταθερο καθως το Γ κινηται στην σ. Η αλλη περιπτωση, των τμηματων κυκλων πλαγιων προς τον οριζοντα, αναγεται με μια αντιστροφη (Υ-ισομετρια) στην προηγουμενη. Τουτη η αντιστροφη εξασφαλιζεται απο την ΑΣ-9, §14 και στελνει την υπερβολικη δεσμη των ευθειων ε,ε' σε μια δεσμη συγκεντρικων κυκλων και την ορθογωνια της προηγουμενης, ελλειπτικη δεσμη κυκλων, στη δεσμη των ακτινων των προηγουμενων συγκεντρικων κυκλων.

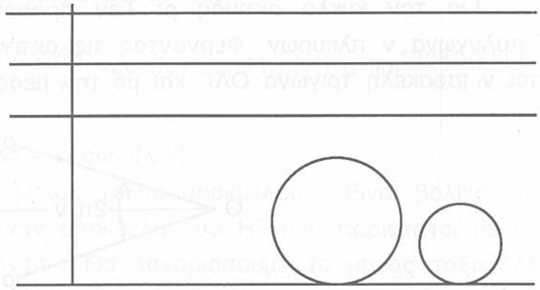
Σημειωσε οτι η αποσταση απο την **βασικη** ευθεια α καθοριζεται απο την γωνια $\varphi = \angle B A \Gamma$, συμφωνα με τον τυπο $\lambda = d(B,\Gamma) = k\log\tan(\pi/4 + \varphi/2)$, που συναγεται αμεσως απο τον τυπο (8), §12. Μ αυτη την παρατηρηση αποδεικνυεται:

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι γραμμες αποστασης που χαρακτηριζονται απο την ιδια αποσταση λ, απο την βασικη ευθεια τους, ειναι Υ-ισες. (Χρησιμοποιησε αντιστροφη και το γεγονος οτι αντιστροφες διατηρουν τις γωνιες.)

Παρατηρησε οτι οι γραμμες αποστασης της ιδιας βασικης ευθειας α αποτελουνται απο τους κυκλους της ελλειπτικης δεσμης που διερχονται απο τα σημεια Α,Α' του οριζοντα, που οριζει η α και αποτελουν τις **ορθογωνιες τροχιες** των Υ-ευθειων της ορθογωνιας, προς την προηγουμενη, υπερβολικης δεσμης.



ΑΣ-4



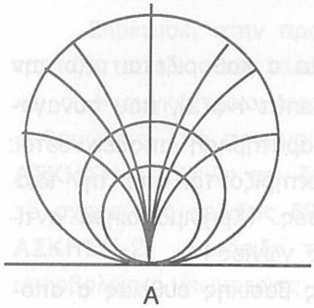
ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι στο μοντελο D^2 οι γραμμες αποστασης της βασικης ευθειας α, ταυτιζονται με (τα τοξα τους στο D^2) τους κυκλους της ελλειπτικης δεσμης, που εχουν κοινα σημεια τα Α,Α', σημεια του οριζοντα της α.

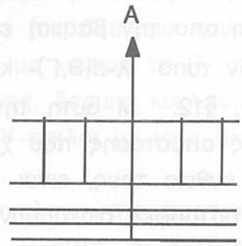
Οι οροκυκλοι στο H^2 ταυτιζονται με κυκλους που εφαπτονται του οριζοντα και ευθειες παραλληλες προς αυτον.

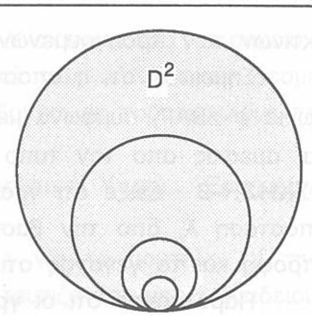
ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι μια αντιστροφη με κεντρο το σημειο επαφης του οροκυκλου με τον οριζοντα, απεικονιζει τον οροκυκλο σε μια ευθεια παραλληλη προς τον οριζοντα. Συμπερανε οτι οι οροκυκλοι που διερχονται απο το σημειο Α του οριζοντα, συμπιπτουν με τις καθετες τροχιες της δεσμης των εγγυτατων παραλληλων, που διερχονται απο το Α.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι δυο οροκυκλοι που διερχονται απο το σημειο Α του οριζοντα, αποτεμνουν ισα Υ-ευθυγραμμα τμηματα στις εγγυτατες παραλληλους που διερχονται απο το Α. (Με μια αντιστροφη, αναγαγε στην περιπτωση της προτυπης δεσμης εγγυτατων παραλληλων.)

ΑΣΚΗΣΗ-7 Βρες τους οροκυκλους του μοντελου D^2.

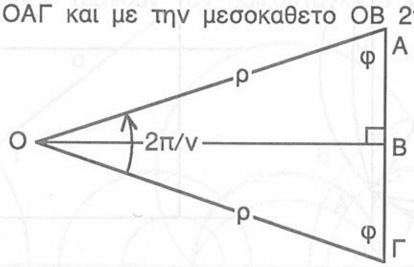






Ερχομαι τωρα στην εξεταση του μηκους τοξου των τριων αυτων καμπυλων. Για τον υπολογισμο, προσεγγιζω τα τοξα με εγγεγραμμενες τεθλασμενες γραμμες, μιμουμενος την προσεγγιστικη μεθοδο υπολογισμου μηκους του ευκλειδειου κυκλου.

Για τον κυκλο ακτινας ρ: Τον προσεγγιζω με εγγεγραμμενα κανονικα Υ-πολυγωνα ν πλευρων. Φερνοντας τις ακτινες προς τις κορυφες, σχηματιζονται ν ισοσκελη τριγωνα ΟΑΓ και με την μεσοκαθετο ΟΒ 2ν ορθογωνια, για τα



οποια εχουμε (5.2, §13): $\sinh(d(A,B)/k) = \sin(\pi/\nu)\,\sinh(\rho/k)$, οπου $d(A,B)$, ρ, τα Υ-μηκη των ΑΒ, ΟΑ. Συνεπως το μηκος $\mu(\nu)$ της περιμετρου του εγγεγραμμενου ν-γωνου, θα ειναι

$$\mu(\nu) = 2k\nu\,\mathrm{arcsinh}(\sin(\pi/\nu)\,\sinh(\rho/k)) \Leftrightarrow \sinh(\mu(\nu)/2k\nu) = \sin(\pi/\nu)\,\sinh(\rho/k).$$

Διαιρωντας με $\mu(\nu)/2k\nu$ και παιρνοντας τα ορια, εχουμε

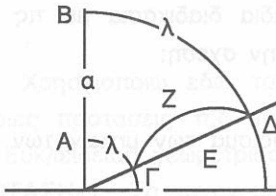
$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\sinh(\mu(\nu)/2k\nu)}{\mu(\nu)/2k\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \sinh(\rho/k)\,\frac{\sin(\pi/\nu)}{\mu(\nu)/2k\nu} \Leftrightarrow$$

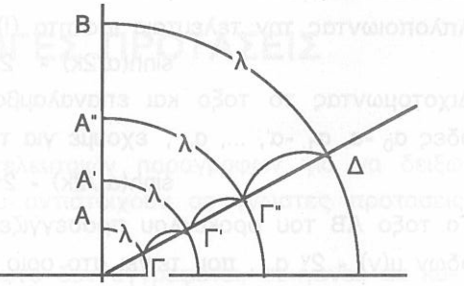
$$1 = \sinh(\rho/k)\,\lim(1/\mu(\nu))\,2k\pi\,\lim(\sin(\pi/\nu)/(\pi/\nu)) \Leftrightarrow$$

$$\mu = \lim\mu(\nu) = 2k\pi\,\sinh(\rho/k). \qquad (1)$$

Προχωρω στο μηκος τοξου γραμμης αποστασης. Ενα τετοιο τοξο ΓΔ, οριζεται απο το αντιστοιχο τμημα α της βασικης ευθειας και την αποσταση λ απ αυτην. Προκυπτει το S-τραπεζιο ΑΒΔΓ, για το οποιο η ΠΡ-7, §13 διδει:

$$\sinh(d(\Gamma,\Delta)/2k) = \cosh(\lambda/k)\,\sinh(\alpha/2k).$$





Αν χωρισουμε το AB σε ν ισα τμηματα μηκους α/ν και προσεγγισουμε το τοξο της γραμμης αποστασης με την αντιστοιχη Y-τεθλασμενη γραμμη, θα εχουμε για το μηκος της τεθλασμενης γραμμης το μηκος

$$\mu(\nu) = 2kn\ \mathrm{arcsinh}(\cosh(\lambda/k)\ \sinh(\alpha/2\nu k)).$$

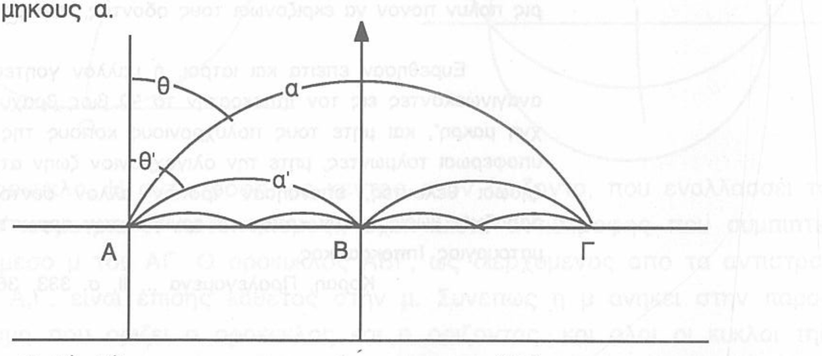
Παιρνοντας τα ορια, οπως και προηγουμενως εχουμε:

$$\lim\frac{\sinh(\mu(\nu)/2k\nu)}{\mu(\nu)/2k\nu} = \cosh(\lambda/k)\ \lim\frac{\sinh(\alpha/2\nu k)}{\mu(\nu)/2k\nu} = \cos(\lambda/k)\ \lim(1/\mu(\nu))\ \alpha\ \lim\frac{\sinh(\alpha/2\nu k)}{\alpha/2\nu k},$$

που διδει

$$\mu = \lim\mu(\nu) = \alpha\cosh(\lambda/k). \qquad (2)$$

Τελος, ας λογαριασουμε το μηκος τοξου οροκυκλου. Ειναι βολικο, για τους λογαριασμους, να παρουμε εναν οροκυκλο του H^2 που παρισταται με μια ευθεια παραλληλο προς τον οριζοντα. Θα λογαριασουμε το μηκος τοξου AB με χορδη μηκους α.



Στο σχημα, θ=Π(α/2) και για το ισοσκελες τριγωνο ΑΒΓ εχουμε

$$\angle A = \Pi(\alpha'/2) - \Pi(\alpha/2) = \angle\Gamma, \quad \angle B = 2\Pi(\alpha'/2).$$

Αρα, απο τον τυπο του συνημιτονου (6.2, §13), θα εχουμε

$$\cos\angle B = \cos^2\Pi(\alpha'/2) - \sin^2\Pi(\alpha'/2) =$$
$$=\tanh^2(\alpha'/2k) - \cosh^{-2}(\alpha'/2k) =$$
$$= (\cosh^2(\alpha'/k) - \cosh(\alpha/k))/\sinh^2(\alpha'/k).$$

Απλοποιωντας την τελευταια ισοτητα (!), παιρνουμε την σχεση μεταξυ των α,α':

$$\sinh(\alpha/2k) = 2\sinh(\alpha'/2k).$$

Διχοτομωντας το τοξο και επαναλαμβανοντας την ιδια διαδικασια με τις χορδες $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha'$, ..., α_ν, εχουμε για τα μηκη τους την σχεση:

$$\sinh(\alpha_\nu/2k) = 2^{-\nu}\sinh(\alpha/2k). \qquad (3)$$

Το τοξο ΑΒ του οροκυκλου προσεγγιζεται με το αθροισμα των μηκων των χορδων $\mu(\nu) = 2^\nu \alpha_\nu$, που τεινει στο οριο

$$\mu = \lim\mu(\nu) = \lim(\,2k\,2^\nu(\alpha_\nu/2k)\,\sinh(\alpha_\nu/2k)/\sinh(\alpha_\nu/2k)) = 2k\lim(2^\nu\sinh(\alpha_\nu/2k) =$$

$$= 2k\,\sinh(\alpha/2k). \qquad (4)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Το μηκος τοξου (επικεντρου γωνιας) ω ενος Υ-κυκλου ακτινας ρ, ειναι $\omega k\sinh(\rho/k)$. Το μηκος τοξου γραμμης αποστασης λ (απο την βασικη της ευθεια) που υποτεινει χορδη μηκους α, ισουται με $\alpha\cos(\lambda/k)$. Το μηκος τοξου οροκυκλου με χορδη μηκους α, ειναι $2k\sinh(\alpha/2k)$.

απαραλλακτα καθως δειχνουσι την σημερον ορμαθιας μακρας οδοντων, εις αποδειξιν της τεχνης των, οι οδοντοϊατροι. Καθως ομως ουτοι, αφου βασανισωσι πολλων στοματα, μανθανουν τελος παντων, εαν ηναι φυσει παρατηρηται, να θεραπευωσιν, ή καν χωρις πολυν πονον να εκριζονωσι τους οδοντας, παρομοια ...

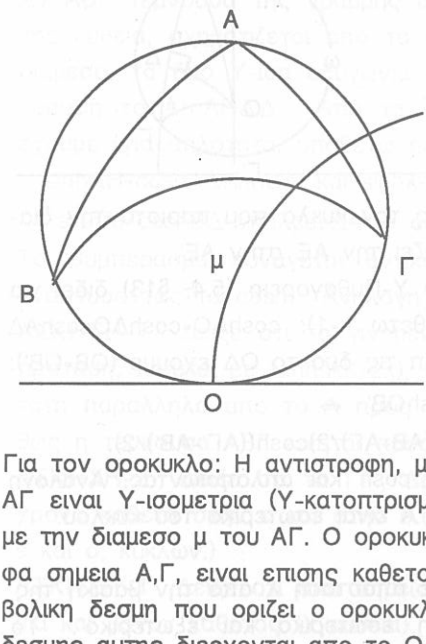
Ευρεθησαν επειτα και ιατροι, ή μαλλον γοητες, οι οποιοι αναγινωσκοντες εις τον Ιπποκρατην το "Ο βιος βραχυς, η δε τεχνη μακρη", και μητε τους πολυχρονιους κοπους της τεχνης να υποφερωσι τολμωντες, μητε την ολιγοχρονιον ζωην ατρυφητον να ζησωσι θελοντες, επενοησαν τροπον αλλον συντομωτερον ν αρπαζωσι χωρις πολυν κοπον τα αργυρια των αρρωστων με θαυματουργιας Ιπποκρατικας.

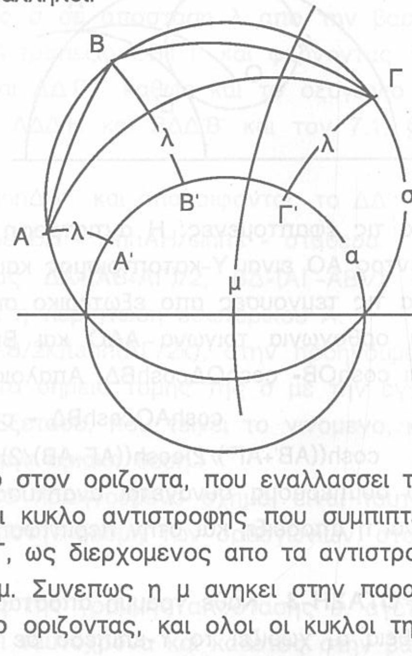
Κοραη, Προλεγομενα ... ΙΙ, σ. 333, 361.

16. ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Χρησιμοποιω εδω το υλικο των τελευταιων παραγραφων για να δειξω καποιες προτασεις της υπερβολικης που αντιστοιχουν σε γνωστες προτασεις της Ευκλειδειας γεωμετριας.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Το τυχον υπερβολικο τριγωνο δεν εγγραφεται, εν γενει, σε κυκλο, εγγραφεται ομως σε μια απο τις τρεις καμπυλες: κυκλο, οροκυκλο ή γραμμη αποστασης. Επισης, στην πρωτη περιπτωση, οι μεσοκαθετοι των πλευρων του τριγωνου διερχονται ολες απο ενα σημειο του H^2, στην δευτερη περιπτωση οι μεσοκαθετοι διερχονται ολες απο ενα σημειο του οριζοντα και στην τριτη περιπτωση οι μεσοκαθετοι ειναι υπερπαραλληλοι.



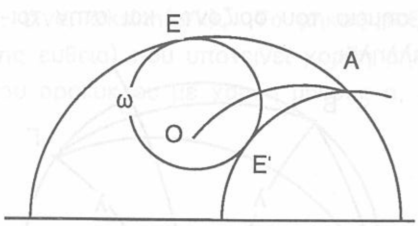


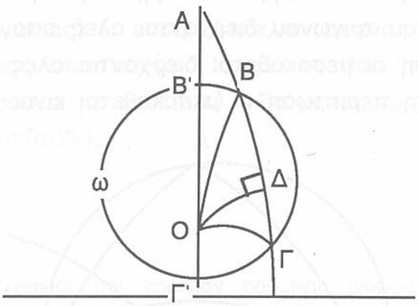
Για τον οροκυκλο: Η αντιστροφη, με κεντρο στον οριζοντα, που εναλλασσει τα ΑΓ ειναι Υ-ισομετρια (Υ-κατοπτρισμος), εχει κυκλο αντιστροφης που συμπιπτει με την διαμεσο μ του ΑΓ. Ο οροκυκλος ΑΒΓ, ως διερχομενος απο τα αντιστροφα σημεια Α,Γ, ειναι επισης καθετος στην μ. Συνεπως η μ ανηκει στην παραβολικη δεσμη που οριζει ο οροκυκλος και ο οριζοντας, και ολοι οι κυκλοι της δεσμης αυτης διερχονται απο το Ο.

Για τη γραμμη αποστασης: Φερε καθετους απο τις κορυφες του τριγωνου στην βασικη ευθεια α, της γραμμης αποστασης σ. Σχηματιζονται τα S-τραπεζια ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β', ΓΑΑ'Γ', για τα οποια γνωριζουμε (ΠΡ-3, §13) οτι οι μεσοκαθετοι των ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ ειναι ταυτοχρονα και μεσοκαθετοι των Α'Β',Β'Γ' και Γ'Α' αντιστοιχως. Τουτες οι μεσοκαθετες ανηκουν, συνεπως, σε μια υπερβολικη δεσμη κυκλων και δεν τεμνονται μεταξυ τους.

Η προταση φανερωνει οτι το ρολο των κυκλων της Ευκλειδειας, αναλαμβανουν στην υπερβολικη καμπυλες τριων ειδων, με διαφορετικες γεωμετρικες ιδιοτητες. Καποιες αναλογιες φανερωνουν και οι επομενες προτασεις:

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Ευθεια και κυκλος εχουν το πολυ δυο κοινα σημεια. Απο ενα σημειο εκτος κυκλου αγονται δυο ισες εφαπτομενες προς αυτον. Αν μια ευθεια δια του σημειου Α, τεμνει τον κυκλο στα σημεια Β,Γ, τοτε το γινομενο tanh(ΑΒ/2k)tanh(ΑΓ/2k) ειναι σταθερο και αν το Α ειναι στο εξωτερικο του κυκλου τουτο ισουται με $\tanh^2$(ΑΕ/2k), οπου ΑΕ εφαπτομενη του κυκλου.





Για τις εφαπτομενες: Η αντιστροφη ως προς τον κυκλο που παριστα την διακεντρο ΑΟ ειναι Υ-κατοπτρισμος και απεικονιζει την ΑΕ στην ΑΕ'.

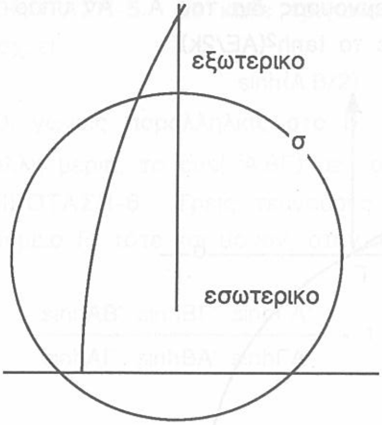
Για τις τεμνουσες απο εξωτερικο σημειο: Το Υ-Πυθαγορειο (5.4, §13) διδει για τα ορθογωνια τριγωνα ΑΔΟ και ΒΟΔ (υποθετω k=1): coshΑΟ=coshΔΟcoshΑΔ και coshΟΒ= coshΟΔcoshΒΔ. Απαλοιφοντας απ τις δυο το ΟΔ εχουμε (ΟΒ=ΟΒ'):

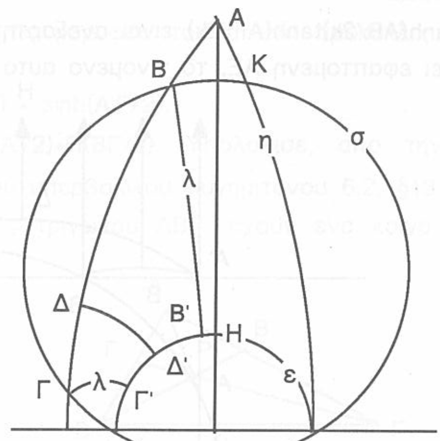
$$\cosh\mathrm{AO}\cosh\mathrm{B\Delta} = \cosh\mathrm{A\Delta}\cosh\mathrm{OB'} \Leftrightarrow$$

$$\cosh((\mathrm{AB'}+\mathrm{A\Gamma'})/2)\cosh((\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AB})/2) = \cosh((\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma})/2)\cosh((\mathrm{A\Gamma'}-\mathrm{AB'})/2).$$

Το συμπερασμα συναγεται αναπτυσοντας τα cosh και απλοποιωντας. Αναλογη ειναι η αποδειξη και στην περιπτωση που το Α ειναι εσωτερικο του κυκλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Καθε γραμμη αποστασης σ, σε αποσταση λ απο την βασικη της ευθεια α, χωριζει το Υ-επιπεδο σε δυο μερη "εσωτερικο" και "εξωτερικο". Το εσωτερικο σημειο χαρακτηριζεται απο την μη-υπαρξη εφαπτομενης προς την σ. Το εξωτερικο απο την υπαρξη εφαπτομενης. Καθε ευθεια δια σημειου Α, τεμνει την σ, το πολυ, σε δυο σημεια. Αν Β,Γ τα σημεια τομης, της σ με την τεμνουσα δια του Α, τοτε το γινομενο tanh(ΑΒ/2k)tanh(ΑΓ/2k) ειναι σταθερο και ισουται με $\tanh^2$(ΑΕ/2k), αν ΑΕ η εφαπτομενη της σ απο το Α.





Αν ΑΒΓ τεμνουσα της γραμμης αποστασης σ σε αποσταση λ απο την βασικη της ευθεια, σχηματιζεται απο τα Β,Γ το S-τραπεζιο ΒΒ'Γ'Γ και φερνοντας την διαμεσο, τα δυο Υ-ισα οξυγωνια ΒΒ'Δ'Δ και ΔΔ'Γ'Γ καθως και το οξυγωνιο με κορυφη το Α: ΑΗΔ'Δ. Απο τα οξυγωνια ΑΔΔ'Η και ΒΔΔ'Β' και τον 7.1, §13 εχουμε (για απλοτητα, υποθετω παλι k=1):

$\sinh ΑΗ = \cosh ΑΔ \sinh ΔΔ'$ και $\sinh λ = \cosh ΒΔ \sinh ΔΔ'$ και απαλοιφοντας το ΔΔ':

$\sinh ΑΗ \cosh ΒΔ = \sinh λ \cos ΔΑ \Rightarrow \cosh ΔΑ/\cosh ΒΔ = \sinh ΑΗ/\sinh λ =$ σταθερα.

Το συμπερασμα συναγεται αντικαθιστωντας ΔΑ=(ΑΒ+ΑΓ)/2, ΒΔ=(ΑΓ-ΑΒ)/2 και αναπτυσοντας τα cosh. Αναλογη ειναι και η περιπτωση εσωτερικου Α.

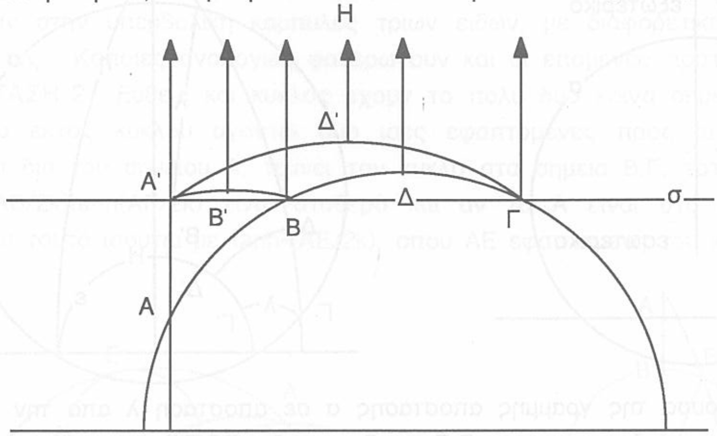
ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι το γινομενο $\tanh(ΑΒ/2k)\tanh(ΑΓ/2k)$, στην προηγουμενη προταση, ισουται με $\tanh(ΑΚ/2k)$, οπου Κ το σημειο τομης της σ με την εγγυτατη παραλληλο απο το Α προς την ε. (Εξετασε, που τεινει το γινομενο, καθως η τεμνουσα ΑΒΓ κινηται προς αυτην την οριακη θεση.)

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι τα ΓΓ', ΔΔ',ΒΒ', στο προηγουμενο σχημα, ειναι ταυτοχρονα καθετα στην ε και στην σ.(Ανηκουν στην δεσμη των ορθογωνιων, στους ε και σ, κυκλων.)

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι απο σημειο Α εκτος της γραμμης αποστασης σ, αγεται μια και μονον καθετος (Υ-ευθεια), που ειναι ταυτοχρονα και καθετος στην βασικη ευθεια ε, της γραμμης αποστασης.

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Καθε οροκυκλος χωριζει το Υ-επιπεδο σε δυο τμηματα "εσωτερικο και "εξωτερικο". Το εσωτερικο σημειο Α χαρακτηριζεται απο την μη-υπαρξη εφαπτομενης απο το Α προς τον οροκυκλο. Το εξωτερικο απο την υπαρξη τετοιας εφαπτομενης. Καθε ευθεια δια του Α μπορει να τεμνει τον οροκυκλο σε κανενα, ενα ή δυο σημεια Β,Γ. Στην τελευταια περιπτωση, το γινομενο

$\tanh(AB/2k)\tanh(A\Gamma/2k)$ ειναι ανεξαρτητος της τεμνουσας δια του Α. Αν υπαρχει εφαπτομενη ΑΕ, το γινομενο αυτο ισουται με το $\tanh^2(AE/2k)$.



Στο σχημα: σ ο οροκυκλος, Η το σημειο του στον οριζοντα. Β'Η, ΔΗ, Δ'Γ οι μεσοκαθετες των αντιστοιχων τμηματων Α'Β, ΒΓ, Α'Γ. Θα δειξω οτι το γινομενο που εξεταζω ισουται με $\tanh(AA'/2k)$. Για ευκολια, υποθετω k=1. Υπολογιζω το ΑΑ' συναρτησει των ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ και ΒΔ. Απο τον τυπο του ημιτονου για το τριγωνο ΑΑ'Γ εχουμε

$$\frac{\sinh AA'}{\sinh A\Gamma} = \frac{\sin\angle A'\Gamma A}{\sin\angle AA'\Gamma} = \frac{\sin(\angle\Delta\Gamma H-\angle\Delta'\Gamma H)}{\sin\angle\Delta'\Gamma H} = \sin\angle\Delta\Gamma H\cot\angle\Delta'\Gamma H-\cos\angle\Delta\Gamma H =$$

$$(\text{ΑΣ-2, §13}) = \cosh^{-1}\Delta\Gamma\sinh\Delta'\Gamma-\tanh\Delta\Gamma. \qquad (1)$$

Απο το ιδιο τριγωνο ΑΑ'Γ εχουμε επισης

$$\frac{\sinh A'\Gamma}{\sinh A\Gamma} = \frac{\sin\angle A'A\Gamma}{\sin\angle AA'\Gamma} = \frac{\sin\Pi(A\Delta)}{\sin\Pi(\Gamma\Delta')} = \frac{\cosh\Gamma\Delta'}{\cosh A\Delta} \text{ (που επειδη } \Gamma\Delta'=A'\Gamma/2) \Rightarrow$$

$$\sinh\Gamma\Delta' = \frac{\sinh A\Gamma}{2\cosh A\Delta}.$$

Αντικαθιστωντας τουτη στην (1), παιρνουμε

$$\sinh AA' = \frac{\sinh A\Gamma(\sinh A\Gamma-2\sinh\Delta\Gamma\cosh A\Delta)}{2\cosh\Delta\Gamma\cosh A\Delta}.$$

Αντικαθιστωντας σ αυτον τον τυπο ΔΓ=(ΑΓ-ΑΒ)/2, ΑΔ=(ΑΒ+ΑΓ)/2 και λογαριαζοντας λιγο ακομη (!) βρισκουμε το ζητουμενο.

Δυστυχως, στην υπερβολικη γεωμετρια, αποδειξεις απλων προτασεων δεν εχουν την κομψοτητα της Ευκλειδειας. Παρεμβαλονται παντου οι υπερβολικες τριγωνομετρικες συναρτησεις και απαιτουνται εκτεταμενοι λογαριασμοι. Με την ευκαιρια του προηγουμενου σχηματος, ας δουμε και την επομενη ιδιοτητα τριγωνων που εγγραφονται σε οροκυκλους:

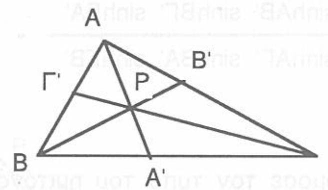
ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Σε καθε τριγωνο Α'ΒΓ με τις κορυφες του σ ενα οροκυκλο, ισχυει

$$\sinh(A'B/2) + \sinh(B\Gamma/2) = \sinh(A'\Gamma/2).$$

Οι γωνιες παραλληλιας στο Β: ∠Α'ΒΓ=Π(ΒΑ'/2)+Π(ΒΓ/2). Υπολογισε, απο την αλλη μερια, το cos(∠Α'ΒΓ) με τον τυπο του υπερβολικου συνημιτονου 6.2, §13.

ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Τρεις τεμνουσες ΑΑ',ΒΒ',ΓΓ', τριγωνου ΑΒΓ, εχουν ενα κοινο σημειο Ρ, τοτε και μονον, οταν ισχυει:

$$\frac{\sinh AB' \ \sinh B\Gamma' \ \sinh \Gamma A'}{\sinh A\Gamma' \ \sinh BA' \ \sinh \Gamma A'} = 1 .$$



Εφαρμοσε τον τυπο του ημιτονου στα τριγωνα:

ΑΓ'Ρ, ΑΒ'Ρ : sinhΑΓ'/sinhΑΡ=sin∠ΑΡΓ'/sin∠ΑΓ'Ρ, sinhΑΒ'/sinhΑΡ=sin∠ΑΡΒ'/sin∠ΑΒ'Ρ αναλογα στα ζευγη που προκυπτουν με κυκλικη εναλλαγη των γραμματων ΑΒΓ. Απο τις σχεσεις που προκυπτουν απαλειψε πρωτα τα ΑΡ,ΒΡ,ΓΡ και κατοπιν τα ημιτονα των γωνιων προσεχοντας ισες και παραπληρωματικες γωνιες. Παρατηρησε τις αναλογιες της προτασης με το θεωρημα του Ceva (ΠΡ-7, §5). Για το αντιστροφο πρεπει να υποθεσεις οτι δυο τουλαχιστον των τεμνουσων, τεμνονται μεταξυ τους σε σημειο Ρ και να δειξεις οτι η σχεση συνεπαγεται την διελευση και της τριτης απο το Ρ.

ΠΡΟΤΑΣΗ-7 Οι διαμεσοι ενος υπερβολικου τριγωνου διερχονται απο ενα κοινο σημειο. (Εφαρμοσε την ΠΡ-6.)

Οπως σημειωνει ο Ο. Perron στο αξιολογο βιβλιο του (*), αφου το θεωρημα τομης των διαμεσων ισχυει και στις δυο γεωμετριες, υπερβολικη και Ευκλειδεια, ανηκει στην περιοχη της απολυτης γεωμετριας και θα επρεπε να υπαρχει αποδειξη του χωρις την χρηση του αξιωματος παραλληλιας. Κατι τετοιο ομως δεν εχει πεσει μεχρι τωρα στην αντιληψη μου.

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 Τρεις τεμνουσες ΑΑ', ΒΒ',ΓΓ' τριγωνου οπως προηγουμενως διερχονται απο κοινο σημειο Ρ, τοτε και μονον οταν ισχυει η σχεση

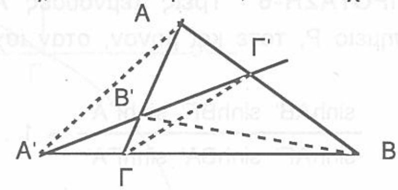
$$\frac{\sin\angle ABB' \ \sin\angle B\Gamma\Gamma' \ \sin\angle\Gamma AA'}{\sin\angle A'AB \ \sin\angle B'B\Gamma \ \sin\angle\Gamma'\Gamma A} = 1 .$$

Για την αποδειξη εφαρμοσε τον τυπο του ημιτονου στα τριγωνα ΑΡΒ, ΒΡΓ και ΓΡΑ: sinhΒΡ/sinhΑΡ=sin∠Α'ΑΒ/sin∠ΑΒΒ' και αναλογες σχεσεις που προκυπτουν με κυκλικη εναλλαγη των γραμματων Α,Β,Γ. Πολλαπλασιασε τις σχεσεις που

(*) O. Perron: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Teubner, 1962 προκυπτουν. Η ιδια ακριβως συνθηκη ισχυει και στην Ευκλειδεια γεωμετρια (θεωρημα του Carnot) και αποδεικνυεται με τον ιδιο ακριβως τροπο. Για το αντιστροφο ισχυει η ιδια παρατηρηση που εκανα και στην ΠΡ-6. Ισχυει και το αντιστοιχο θεωρημα του Μενελαου:

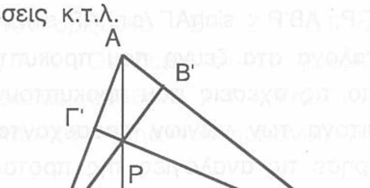
ΠΡΟΤΑΣΗ-9 Τα σημεια Α',Β',Γ' περιεχομενα αντιστοιχα στις πλευρες ΒΓ,ΓΑ και ΑΒ του τριγωνου ΑΒΓ, ευρισκονται επ ευθειας, τοτε και μονον, οταν ισχυει:

$$\frac{\sinh AB' \, \sinh B\Gamma' \, \sinh \Gamma A'}{\sinh A\Gamma' \, \sinh BA' \, \sinh \Gamma B'} = 1 .$$



Εφαρμοσε τον τυπο του ημιτονου στο ΑΒ'Γ': $\sinh AB'/\sinh A\Gamma' = \sin\angle A\Gamma'B'/\sin\angle AB'\Gamma'$, αναλογα και στα τριγωνα που προκυπτουν με κυκλικη εναλλαγη των γραμματων ΑΒΓ πολλαπλασιασε τις προκυπτουσες σχεσεις κ.τ.λ.

ΠΡΟΤΑΣΗ-10 Σε τυχον οξυγωνιο τριγωνο ΑΒΓ, τα υψη ΑΑ',ΒΒ' και ΓΓ' τεμνονται σ ενα σημειο ρ.



Εφαρμοσε τον 5.5 §13 στα τριγωνα ΑΑ'Β και ΑΑ'Γ:

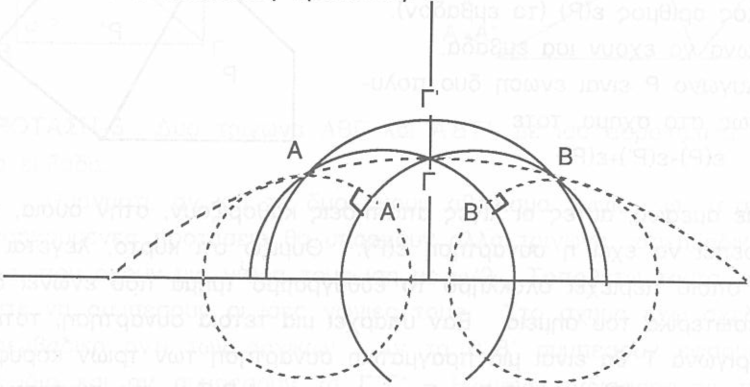
$\tan\angle B = \tanh AA'/\sinh BA'$, $\tan\angle\Gamma = \tanh AA'/\sinh\Gamma A'$ και αναλογα

$\tan\angle\Gamma = \tanh BB'/\sinh\Gamma B'$, $\tan\angle A = \tanh BB/\sinh AB'$,

$\tan\angle A = \tanh\Gamma\Gamma'/\sinh A\Gamma'$, $\tan\angle B = \tanh\Gamma\Gamma'/\sinh B\Gamma'$.

Πολλαπλασιασε κατα στηλες, εξισωσε και εφαρμοσε την ΠΡ-6.
Για αμβλυγωνια τριγωνα ισχυει η προταση εφοσον δυο εκ των υψων τεμνονται. Με την ιδια αποδειξη, δειχνουμε τοτε οτι και το τριτο υψος θα διερχεται απο το σημειο τομης των (εκτος του τριγωνου). Υπαρχουν ωστοσο υπερβολικα τριγωνα (αμβλυγωνια) των οποιων τα υψη δεν τεμνονται (δες το σχημα παρακατω). Σημειωσε οτι και για την ΠΡ-10 θα επρεπε να υπαρχει αποδειξη στα πλαισια της απολυτης γεωμετριας, χωρις την χρηση του αξιωματος παραλληλιας.

Γυρνω τωρα πισω στην §3, στις ΠΡ-5 εως ΠΡ-14, εκτος της ΠΡ-12. Τουτες μπορουν να αντικαταστησουν το αξιωμα παραλληλιας της Ευκλειδειας γεωμετριας. Οτι το Ευκλειδειο αξιωμα παραλληλιας, συνεπαγεται αυτες τις προτασεις, ειναι ευκολο και θα πρεπει ο αναγνωστης να το εχει διαπιστωσει απο την μελετη της §3. Το αντιστροφο, με τις γνωσεις που αποκτησαμε απο την υπερβολικη, αποδεικνυεται πλεον ευκολα με "εις ατοπον απαγωγη". Πραγματι, αν λ.χ. ισχυε η ΠΡ-13 και οχι το Ευκλειδειο αξιωμα παραλληλιας, τοτε θα ισχυε το αξιωμα παραλληλιας της υπερβολικης και θα μπορουσαμε να βρουμε τριγωνα με οσο μικρες γωνιες θελουμε. Τουτο αντιφασκει στην υποθεση μας, αρα το Ευκλειδειο αξιωμα πρεπει να ισχυει. Αναλογα αποδεικνυονται και οι υπολοιπες προτασεις.



Στο παραπανω σχημα, το τριγωνο ΑΒΓ εχει τις κορυφες του πανω σε μια γραμμη αποστασης και τα υψη του δεν τεμνονται. Φαινεται να ισχυει το ιδιο και για ολα τα τριγωνα με κορυφες σε μια γραμμη αποστασης και περιεχομενα στο εσωτερικο της.

> Αγαμαι δε του Διογενους, ος τον εν Λακεδαιμονι ξενον ορων παρασκευαζομενον εις εορτην τινα και φιλοτιμουμενον, "ανηρ δ ειπεν, "αγαθος ου πασαν ημεραν εορτην ηγειται;" και πανυ γε λαμπραν, ει σωφρονουμεν. ιερον μεν γαρ αγιωτατον ο κοσμος εστι και θεοπρεπεστατον, εις δε τουτον ο ανθρωπος εισαγεται δια της γενεσεως ου χειροκμητων ουδ ακινητων αγαλματων θεατης, αλλ οια νους θειος αισθητα μιμηματα νοητων, φησιν ο Πλατων, εμφυτον αρχην ζωης εχοντα και κινησεως εφηνεν, ηλιον και σεληνην και αστρα και ποταμους νεον υδωρ εξιεντας αει και γην φυτοις τε και ζωοις τροφας αναπεμπουσαν. ων τον βιον μυησιν οντα και τελετην τελειοτατην ευθυμιας δει μεστον ειναι και γηθους, ουχ ωσπερ οι πολλοι Κρονια και Διασια και Παναθηναια και τοιαυτας αλλας ημερας περιμενουσιν, ιν ησθωσι και αναπνευσωσιν, ωνητου γελωτος μιμοις και ορχησταις μισθους τελεσαντες. ειτ εκει μεν ευφημοι καθημεθα κοσμιως, ουδεις γαρ οδυρεται μυουμενος ουδε θρηνει Πυθια θεωμενος ή πινων εν Κρονιοις, ας δ ο θεος ημιν εορτας χορηγει και μυσταγωγει καταισχυνουσιν, εν οδυρμοις τα πολλα και βαρυθυμιαις και μεριμναις επιπονοις διατριβοντες.
>
> Πλουταρχου, ηθικα 477 C

17. ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΕΜΒΑΔΟΝ

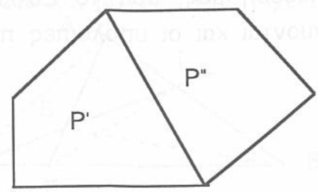
Ειναι φυσιολογικο να απαιτησουμε απο το εμβαδον τις εξης ιδιοτητες:

α) Σε καθε κυρτο πολυγωνο P να αντιστοιχει ενας θετικος αριθμος ε(P) (το εμβαδον).

β) Ισα πολυγωνα να εχουν ισα εμβαδα.

γ) Αν το πολυγωνο P ειναι ενωση δυο πολυγωνων οπως στο σχημα, τοτε

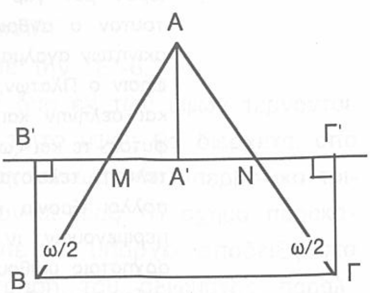
ε(P)=ε(P')+ε(P")



Οπως θα δουμε αμεσως, αυτες οι λιγες απαιτησεις καθοριζουν, στην ουσια, την μορφη που πρεπει να εχει η συναρτηση ε(P). Θυμιζω οτι κυρτο, λεγεται το πολυγωνο, το οποιο περιεχει ολοκληρο το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει δυο οποιαδηποτε εσωτερικα του σημεια. Εαν υπαρχει μια τετοια συναρτηση, τοτε η τιμη της για τριγωνα T θα ειναι μια πραγματικη συναρτηση των τριων κορυφων Α,Β,Γ του τριγωνου : ε(T) = Φ(Α,Β,Γ). Γραφοντας τα Α,Β,Γ με τις συντεταγμενες τους, παιρνουμε μεσω της Φ μια συναρτηση εξη μεταβλητων και εχει νοημα να απαιτησουμε την συνεχεια αυτης της συναρτησης. Τουτο σημαινει οτι μετατοπιζοντας κατα μικρο διαστημα μια ή περισσοτερες κορυφες του τριγωνου, απαιτουμε το εμβαδον να μεταβαλλεται κατα μικρη ποσοτητα.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Ολα τα τριγωνα με την ιδια βαση ΒΓ και το ιδιο αθροισμα γωνιων α+β+γ=ω, εχουν το ιδιο εμβαδον Ε, που ειναι ισο με το εμβαδον του S-τραπεζιου με βαση το ΒΓ και οξεια γωνια ω/2.

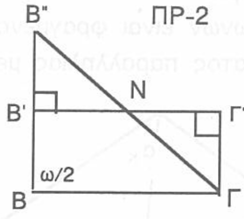
Παρε τα μεσα Μ,Ν των πλευρων ΑΒ,ΑΓ, αντιστοιχως, και φερε καθετους απο τις κορυφες ΑΑ',ΒΒ',ΓΓ'. Τα τριγωνα ΑΑ'Μ και ΜΒΒ' ειναι ισα. Το ιδιο και τα ΑΑ'Ν κα ΝΓΓ'. Το εμβαδον λοιπον του ΑΒΓ ειναι ισο με το του S τραπεζιου ΒΒ'Γ'Γ, του οποιου οι γωνιες στο Β και Γ ειναι ισες με ω/2.

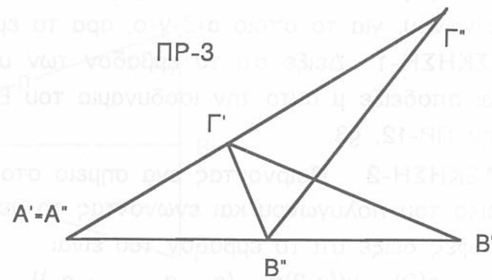


ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Απ ολα τα τριγωνα με αθροισμα γωνιων α+β+γ=ω και βαση ΒΓ υπαρχει ενα που εχει μια γωνια του ιση με ω/2.

Πραγματι, στο προηγουμενο S-τραπεζιο προεκτεινε την ΒΒ' στο διπλασιο μηκος

ΒΒ"=2ΒΒ'. Τα τριγωνα Β"ΕΝ, ΝΓΓ' ειναι ισα, το Β"ΒΓ εχει αθροισμα γωνιων ω και γωνια $\angle B = \omega/2$.





ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Δυο τριγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ', με ισα αθροισματα γωνιων, εχουν ισα εμβαδα.

Πραγματι, αν και τα δυο εχουν αθροισμα γωνιων ω, τοτε κατα τις δυο προηγουμενες προτασεις θα υπαρχουν αλλα τριγωνα, ισοεμβαδικα προς τα αρχικα, που εχουν μια γωνια τους ιση με ω/2. Τοποθετω τουτα τα τριγωνα, ετσι ωστε να συμπεσουν οι ισες γωνιες τους. Στο σχημα εχω σχεδιασει τουτα τα ισοεμβαδικα αντι των αρχικων. Αν τα Β',Β" συμπεσουν εφαρμοζω την ΠΡ-1. Το ιδιο και αν συμπεσουν τα Γ',Γ". Η μονη ενδιαφερουσα περιπτωση ειναι αυτη του σχηματος. Τοτε ομως τα Β"Γ'Γ" και Β"Γ'Β' εχουν ισο αθροισμα γωνιων και κοινη βαση, αρα κατα την ΠΡ-1 και ισα εμβαδα. Τα Α'Β'Γ' και Α"Β"Γ" ομως εχουν εμβαδον που ειναι αθροισμα του κοινου και στα δυο Α'Β"Γ' και των Β"Β'Γ' και Α'Β"Γ" αντιστοιχως. Αρα εχουν κι αυτα ισα εμβαδα.

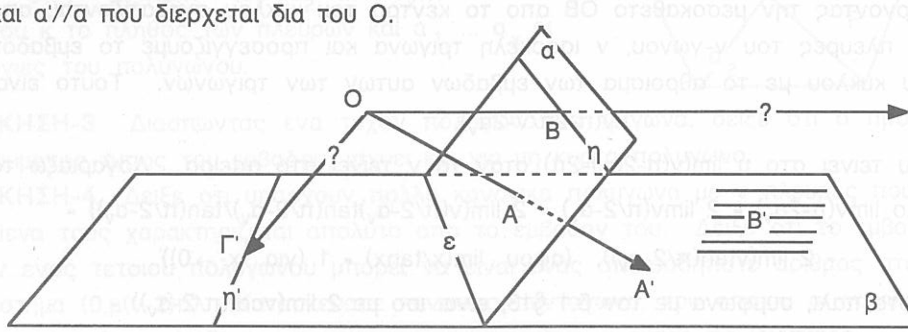
Απο τις τρεις προηγουμενες προτασεις συμπεραινουμε οτι το εμβαδον ενος υπερβολικου τριγωνου ειναι μια συναρτηση του αθροισματος $\alpha+\beta+\gamma=\omega$ των γωνιων του. $\varepsilon(AB\Gamma) = f(\alpha+\beta+\gamma) = g(\delta)$, οπου εθεσα $\delta = \pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, που λεγεται **υπεροχη** του τριγωνου. Οπως φαινεται αμεσως απο το παρακατω σχημα, η υπεροχη συμπεριφερεται προσθετικα:

$$\delta = \delta_1 + ... + \delta_\nu$$

Παιρνοντας $\delta_1=\delta_2=...=\delta_\nu=\delta$, εχουμε $g(\nu\delta) = \nu g(\delta)$. Επισης $g(\delta) = g(p\delta/p) = pg(\delta/p)$. Αρα για καθε ρητο $\nu = p/q$ θα ισχυει επισης $g(\nu\delta) = \nu g(\delta)$. Απο την υποτεθησα συνεχεια της Φ επεται η συνεχεια της g και προσεγγιζοντας τους αρρητους με ρητους, αποδεικνυουμε (οπως καναμε και για το Υ-μηκος) οτι $g(\delta) = \mu\delta$, οπου μ σταθερα. Αποδειξαμε λοιπον την:

18. ΤΟ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ας υποθεσουμε οτι προβαλουμε ακτινικα απο σημειο Ο, το επιπεδο α, πανω στο επιπεδο β. Το τυχον σημειο Α του α απεικονιζεται στο Α' του β. Υπαρχουν ωστοσο καποια σημεια του α που δεν μπορουμε να τα προβαλουμε στο β. Ειναι τα σημεια της ευθειας η: τομης των επιπεδων α και β'//β που διερχεται απο το Ο. Αναλογα υπαρχουν σημεια του β που δεν ειναι προβολες κανενος σημειου του α. Ειναι τα σημεια της ευθειας η': τομης των επιπεδων β και α'//α που διερχεται δια του Ο.



Για να αρουμε την δυσκολια πρεπει να ξεχασουμε την συγκεκριμενη εικονα του επιπεδου και να το θεωρησουμε απλα σαν ενα συνολο σημειων το οποιο μπορουμε να ενωσουμε με ενα αλλο συνολο. Το **προβολικο επιπεδο** προκυπτει ετσι ακριβως, θεωρωντας την συνολοθεωρητικη ενωση του επιπεδου με μια "κατ εκδοχην ευθεια". Τα σημεια της κατ εκδοχην ευθειας (τα κατ εκδοχην σημεια) μπορουμε να τα φαντασθουμε οτι ταυτιζονται με τις διαφορες διευθυνσεις του επιπεδου. Ετσι στο σχημα, το Β' ειναι ενα κατ εκδοχην σημειο του β και παριστα μια ορισμενη διευθυνση παραλληλων ευθειων του επιπεδου β. Το β μαζυ με τα κατ εκδοχην σημεια του συμβολιζω με β*. Με τα α*,β* αντι των α,β αιρουμε τις αδυναμιες της προβολης και την κανουμε μια αμφιμονοσημαντη απεικονιση του α* στο β*. Ετσι λ.χ. το Β στο σχημα απεικονιζεται στο κατ εκδοχην σημειο Β' του β* και γενικωτερα ολοκληρη η η απεικονιζεται στην κατ εκδοχην ευθεια του β*. Αναλογα και η κατ εκδοχην ευθεια του α* απεικονιζεται στην η' του β*.

Ευθεια του προβολικου επιπεδου α* λεμε το συνολο η* που αποτελειται απο τα σημεια μιας ευθειας η του α, συν το κατ εκδοχην σημειο $\overline{\eta}$, που οριζει η ιδια η διευθυνση της η. Εχοντας ορισει τα σημεια και τις ευθειες του προβολικου επιπεδου, μπορουμε να προχωρησουμε σε σχηματα και ιδιοτητες τους, να ψαξουμε για αξιωματα και να διαπιστωσουμε οτι προκυπτει μια νεα γεωμετρια, η οποια διαφερει απο την Ευκλειδεια σε περισσοτερα του ενος αξιωματα. Τουτη η γεωμετρια λεγεται **προβολικη γεωμετρια** και μελετα σχηματα του προβολικου επιπεδου βρισκοντας ιδιοτητες τους, που παραμενουν αμεταβλητες ως προς απεικονισεις, οπως αυτη της ακτινικης προβολης απο το σημειο O.

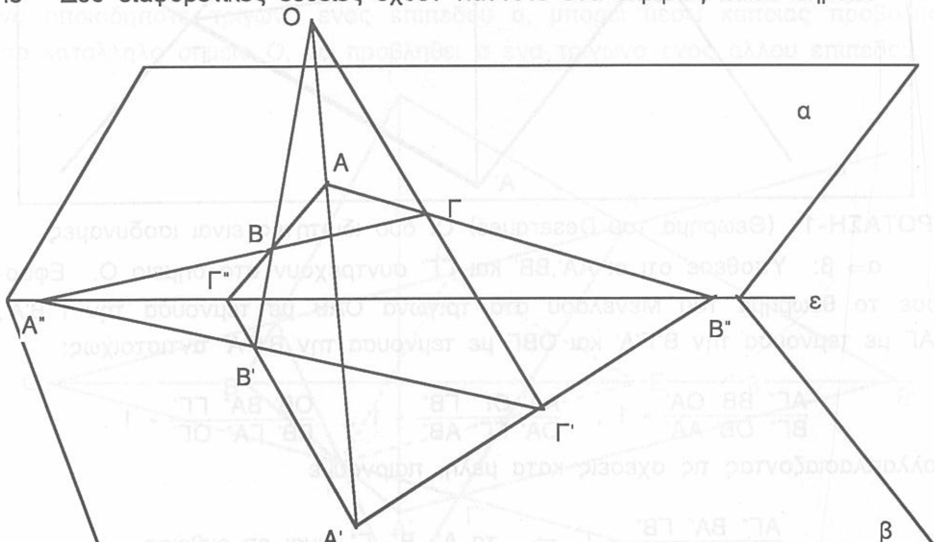
Εργαζομενοι μεσα στο προβολικο επιπεδο, δεν κανουμε διακριση μεταξυ σημειων και κατ εκδοχην σημειων. Τουτη η διακριση ειναι τεχνητη και την καναμε στην αρχη, για να ορισουμε ενα μοντελο προβολικου επιπεδου ξεκινωντας απο το Ευκλειδειο επιπεδο. Αντι για το μοντελο θα μπορουσαμε να ξεκινησουμε με αξιωματα και να διαπιστωσουμε κατοπιν οτι το μοντελο μας τα ικανοποιει. Τουτος ο δρομος ειναι ωστοσο πιο χρονοβορος, αν θελει κανεις να προχωρησει σε καποια ουσιαστικα αποτελεσματα και να παρει μια γευση των μεθοδων αυτης της γεωμετριας. Οι παρακατω ασκησεις και προτασεις περιγραφουν αξιωματα του προβολικου επιπεδου.

ΑΣΚΗΣΗ-1 (Αξιωματα συμπτωσης) Δειξε οτι

1.1 Απο δυο σημεια του προβολικου επιπεδου διερχεται μια ακριβως προβολικη ευθεια.

1.2 Καθε ευθεια περιεχει τρια τουλαχιστον σημεια. Υπαρχουν τρια σημεια μη περιεχομενα σε ευθεια.

1.3 Δυο διαφορετικες ευθειες εχουν παντοτε ενα ακριβως κοινο σημειο.

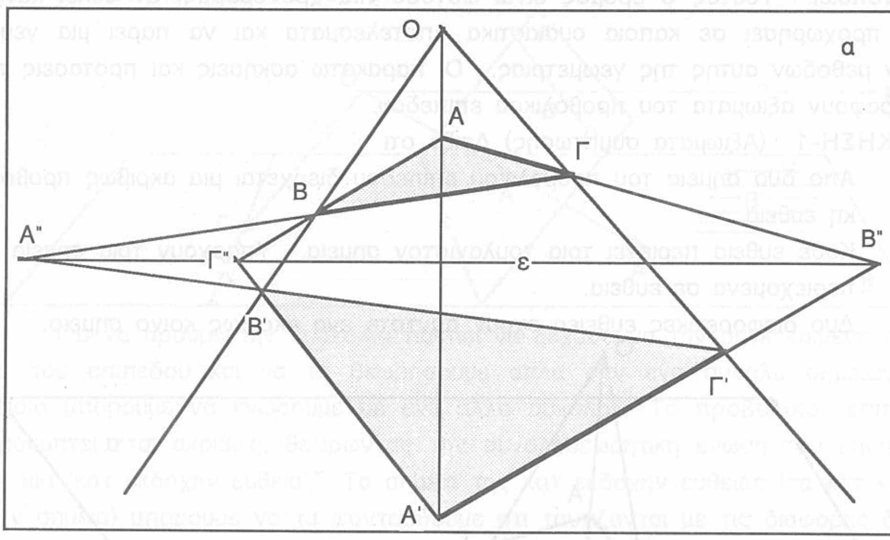


Το σχημα παριστα την προβολη τριγωνου ΑΒΓ του κεκλιμενου επιπεδου α, στο τριγωνο Α'Β'Γ' του επιπεδου β. Τα κοινα σημεια Α" των ευθειων ΒΓ,Β'Γ'

Β" των ΑΓ,Α'Γ' και Γ" των ευθειων ΑΒ,Α'Β', πρεπει να βρισκονται πανω στην ευθεια ε, που ειναι η τομη των επιπεδων α, β (ενα απ αυτα μπορει να ειναι το κατ εκδοχην σημειο της ε). Δυο τετοια τριγωνα λεγονται προοπτικα. Ας στρεψω το α περι την ε, ωστε να συμπεσει με το οριζοντιο επιπεδο β. Τα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' θα εξακολουθουν, κατα τη στροφη, να παραμενουν προοπτικα, μονο που το Ο θα μετατοπιζεται μεχρι να βρεθη τελικα στο οριζοντιο επιπεδο β. Δυο προοπτικα τριγωνα στο ιδιο επιπεδο, χαρακτηριζονται λοιπον απο το οτι:

α) Οι ευθειες που ενωνουν αντιστοιχες κορυφες, συντρεχουν σ ενα σημειο Ο.

β) Οι αντιστοιχες πλευρες τους τεμνονται σε σημεια κειμενα επ ευθειας ε.



ΠΡΟΤΑΣΗ-1 (Θεωρημα του Desarques) Οι δυο ιδιοτητες ειναι ισοδυναμες.

α⇒ β: Υποθεσε οτι οι ΑΑ',ΒΒ' και ΓΓ' συντρεχουν στο σημειο Ο. Εφαρμοσε το θεωρημα του Μενελαου στα τριγωνα ΟΑΒ με τεμνουσα την Γ"Β'Α', ΟΑΓ με τεμνουσα την Β"Γ'Α' και ΟΒΓ με τεμνουσα την Β'Γ'Α" αντιστοιχως:

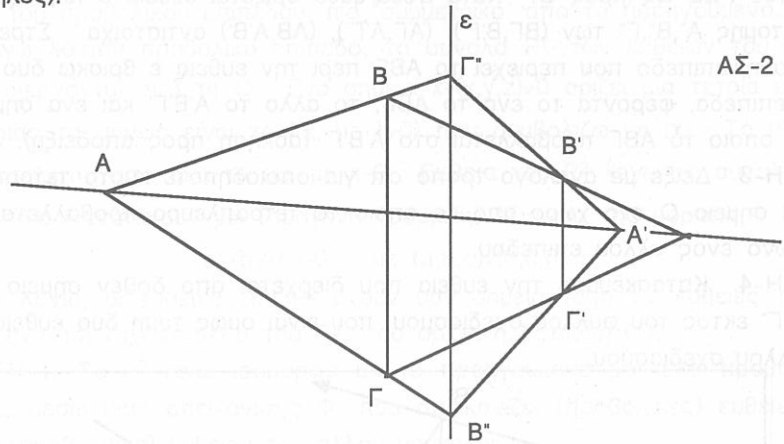
$$\frac{ΑΓ"}{ΒΓ"}\frac{ΒΒ'}{ΟΒ'}\frac{ΟΑ'}{ΑΑ'} = 1\ ,\quad \frac{ΑΑ'}{ΟΑ'}\frac{ΟΓ'}{ΓΓ'}\frac{ΓΒ"}{ΑΒ"} = 1\ ,\quad \frac{ΟΒ'}{ΒΒ'}\frac{ΒΑ"}{ΓΑ"}\frac{ΓΓ'}{ΟΓ'} = 1\ .$$

Πολλαπλασιαζοντας τις σχεσεις κατα μελη, παιρνουμε

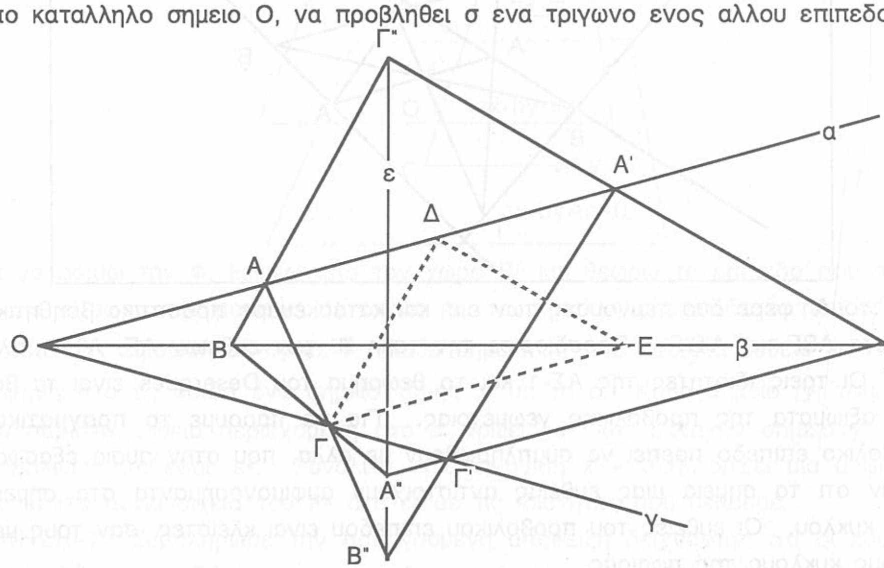
$$\frac{ΑΓ"}{ΒΓ"}\frac{ΒΑ"}{ΓΑ"}\frac{ΓΒ"}{ΑΒ"} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{τα Α", Β", Γ" ειναι επ ευθειας.}$$

β⇒ α: Υποθεσε οτι τα Α", Β", Γ" ανηκουν στην ιδια ευθεια ε. Τοτε τα τριγωνα Γ"ΒΒ' και Β"ΓΓ' ειναι προοπτικα ως προς Α", αρα κατα το προηγουμενο μερος τα Ο, Α, Α' περιεχονται στην ιδια ευθεια.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το θεωρημα του Desarques ισχυει και στην περιπτωση που το Α" ειναι κατ εκδοχην σημειο της ε (με αλλα λογια οι ΒΓ και Β'Γ' ειναι παραλληλες).



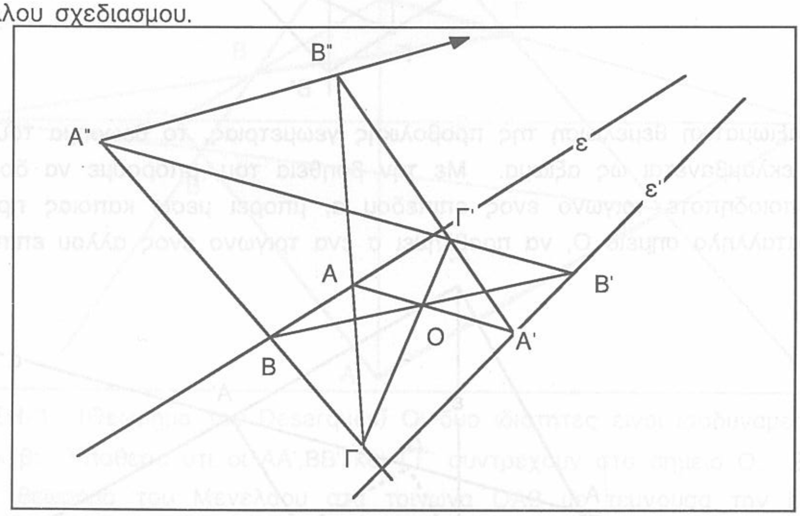
Στην αξιωματικη θεμελιωση της προβολικης γεωμετριας, το θεωρημα του Desarques εκλαμβανεται ως αξιωμα. Με την βοηθεια του, μπορουμε να δουμε οτι ενα οποιοδηποτε τριγωνο ενος επιπεδου α, μπορει μεσω καποιας προβολης απο καταλληλο σημειο Ο, να προβληθει σ ενα τριγωνο ενος αλλου επιπεδου.



Εστω λ.χ. οτι ζητω προβολη, απεικονιζουσα το ΑΒΓ στο Α'Β'Γ', στο προηγουμενο σχημα. Σε μια οποιαδηποτε κορυφη, λ.χ. το Γ κατασκευαζω το ΓΔΕ, ομοιο του Α'Β'Γ' και βρισκω τις ευθειες α,β,γ που τεμνονται στο Ο. Τοποθετω κατοπιν το Α'Β'Γ' ετσι ωστε να εχει κορυφες πανω στις α,β,γ και να ειναι ομοιοθετο του ΓΔΕ ως προς Ο. Κατα Desarques οριζεται ευθεια ε περιεχουσα τα σημεια τομης Α",Β",Γ" των (ΒΓ,Β'Γ'), (ΑΓ,Α'Γ'), (ΑΒ,Α'Β') αντιστοιχα. Στρεφοντας τωρα το ημιεπιπεδο που περιεχει το ΑΒΓ περι την ευθεια ε βρισκω δυο διαφορετικα επιπεδα, φεροντα το ενα το ΑΒΓ, το αλλο το Α'Β'Γ' και ενα σημειο Ο', απο το οποιο το ΑΒΓ προβαλλεται στο Α'Β'Γ' (ασκηση προς αποδειξη).

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε με αναλογο τροπο οτι για οποιοδηποτε κυρτο τετραπλευρο, υπαρχει σημειο Ο στο χωρο απο το οποιο το τετραπλευρο προβαλλεται σ ενα τετραγωνο ενος αλλου επιπεδου.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Κατασκευασε την ευθεια που διερχεται απο δοθεν σημειο Α" και σημειο Γ" εκτος του φυλλου σχεδιασμου, που ειναι ομως τομη δυο ευθειων ε, ε' του φυλλου σχεδιασμου.



(Απο το Α" φερε δυο τεμνουσες των ε,ε' και κατασκευασε προοπτικα βοηθητικα τριγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Προσδιορισε την τομη Β" των ευθειων ΑΓ, Α'Γ' κ.τ.λ.)

Οι τρεις ιδιοτητες της ΑΣ-1 και το θεωρημα του Desarques ειναι τα βασικα αξιωματα της προβολικης γεωμετριας. Για να παρουμε το **πραγματικο** προβολικο επιπεδο πρεπει να συμπληρωθουν με αλλα, που στην ουσια εξασφαλιζουν οτι τα σημεια μιας ευθειας αντιστοιχουν αμφιμονοσημαντα στα σημεια ενος κυκλου. Οι ευθειες του προβολικου επιπεδου ειναι κλειστες, σαν τους μεγιστους κυκλους της σφαιρας.

19. ΔΙΠΛΟΣ ΛΟΓΟΣ

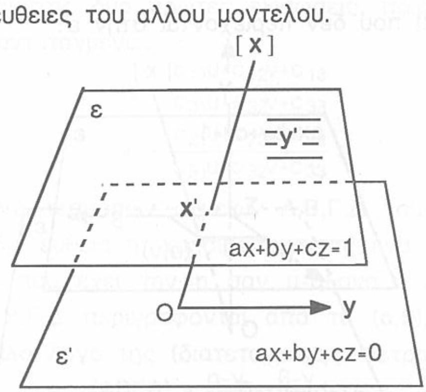
Πριν προχωρησω στην διερευνηση του διπλου λογου εξεταζω ενα αλλο μοντελο του προβολικου επιπεδου, πιο "συμμετρικο" απο το προηγουμενο.

Λεγω λοιπον προβολικο επιπεδο, το συνολο P^2, των ευθειων του χωρου R^3, που διερχονται απο το O. Ενα σημειο $x=(x,y,z)\neq 0$ οριζει μια τετοια ευθεια, (της οποιας τα σημεια ειναι τα $\lambda\mathbf{x}$, με $\lambda\neq 0$) που συμβολιζω με $[\mathbf{x}]$. Το P^2 λοιπον, αποτελειται απο ολα τα $[x]$, με $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. **Ευθεια** του P^2 λεγω το συνολο των $[x]$, τα οποια ικανοποιουν μια (ομογένη γραμμικη) εξισωση της μορφης

$$ax+by+cz=0\ ,\quad \text{με } (a,b,c)\neq(0,0,0) \qquad (1)$$

Με αλλα λογια, οι ευθειες του P^2 εχουν σαν σημεια τους τις ευθειες του R^3 που περιεχονται στο επιπεδο του R^3, που οριζει η εξισωση (1).

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Το P^2 ειναι ισομορφο με το προηγουμενο μοντελο προβολικου επιπεδου, μεσω μιας απεικονισης Φ, που απεικονιζει (προβολικες) ευθειες του ενος σε (προβολικες) ευθειες του αλλου μοντελου.



Για να ορισω την Φ, ξεκινω απο τον χωρο R^3 και θεωρω το επιπεδο που οριζει μια εξισωση της μορφης (1) καθως και το παραλληλο επιπεδο ε, που οριζεται απο την εξισωση $ax+by+cz=1$. Καθε σημειο $[\mathbf{x}]$ που παριστα ευθεια μη περιεχομενη στο ε', οριζει ενα σημειο τομης x' με το ε. Καθε σημειο $[y]$ του P^2, που παριστα ευθεια περιεχομενη στο ε' οριζει το κατ εκδοχην σημειο y' του προβολικου επιπεδου ε*. Συνολικα, η απεικονιση $x' = \Phi(x)$, οριζει μια αμφιμονοσημαντο αντιστοιχεια του P^2 στο ε* με τις ιδιοτητες που θελουμε.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Συμπληρωσε την προηγουμενη αποδειξη δειχνοντας οτι οι ευθειες του P^2 απεικονιζονται μεσω της Φ σε ευθειες του ε*. Σημειωσε οτι η ευθεια του P^2, που παριστα η (1) απεικονιζεται στην κατ εκδοχην ευθεια του ε*.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το συνολο τών ευθειων του P^2 αποτελει εναν αλλο προβολικο χωρο P'^2, του οποιου τα σημεια, οπως και στο P^2, περιγραφονται απο ευθειες [**a**] με $\mathbf{a}=(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Η ιδιοτητα "το σημειο [**x**] ανηκει στην ευθεια [**a**]" εκφραζεται με την (1) που ειναι συμμετρικη ως προς **x** και **a**. Ο P'^2 λεγεται **δυικος** του P^2 και ικανοποιει τα ιδια αξιωματα που ισχυουν για τον προβολικο χωρο P^2. Συμπεραινουμε, οτι καθε θεωρημα της προβολικης γεωμετριας, στο οποιο εναλλασσουμε τις λεξεις **σημειο** και **ευθεια**, διδει παλι ενα θεωρημα της προβολικης γεωμετριας. Π.χ. "καθε ζευγος διαφορετικων ευθειων οριζει ενα σημειο" $\leftrightarrow$ "καθε ζευγος διαφορετικων σημειων οριζει μια ευθεια". Τουτο οδηγει στη λεγομενη **αρχη της δυϊκοτητας** της προβολικης γεωμετριας (δεν επιμενω).

Παρε, οπως και προηγουμενως, ευθεια ε' $(ax+by+cz=0)$ του P^2. Το τυχον [**x**] που δεν ανηκει στην ε, οριζει ενα ακριβως σημειο του επιπεδου (του R^3)

$$ax+by+cz = 1 . \tag{2}$$

Διαλεγοντας δυο αξονες α,β αυτου του επιπεδου, τεμνομενους στο τυχον σημειο του Σ, μπορουμε να ορισουμε συντεταγμενες στο υποσυνολο του P^2, που αποτελειται απο τα [**x**] που δεν περιεχονται στην ε'.

Μια απεικονιση Φ: P^2-ε' $\rightarrow R^2$, $\Phi([\mathbf{x}]) = (u,v)$, που οριζεται μ αυτον τον τροπο, ονομαζουμε **προβολικες συντεταγμενες** του P^2. Προφανως η Φ εξαρταται απο την επιλογη του ε', του Σ, των α,β, καθως και των μοναδιαιων διανυσματων πανω στους αξονες. Συμπληρωνοντας τους α,β με τον αξονα γ των Ο,Σ και παιρνοντας το ΟΣ σαν μοναδιαιο, οριζουμε για καθε τετοιο συστημα προβολικων συντεταγμενων ενα αντιστοιχο συστημα συντεταγμενων (u,v,w) του R^3, διαφορετικο εν γενει του συνηθισμενου καρτεσιανου συστηματος και συνδεομενο με το τελευταιο μεσω μιας αντιστρεψιμης μητρας Α. Το (u,v,w) λεγεται **αντιστοιχο συστημα ομογενων συντεταγμενων** του P^2. Η μητρα Α συνδεει τις (u,v,w) με τις καρτεσιανες συντεταγμενες, μεσω των τυπων

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w \\ a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w \\ a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Σημειωσε οτι στο νεο συστημα συντεταγμενων το επιπεδο (2) διδεται απο την εξισωση $w = 1$. Ας επαναλαβω την διαδικασια ξεκινωντας απο καποιο αλλο επιπεδο ζ', περνοντας στο παραλληλο ζ, το συστημα συντεταγμενων Φ', το αντιστοιχο συστημα ομογενων (u',v',w') και την μητρα συνδεσης A' με το συνηθισμενο συστημα συντεταγμενων. Εαν (u,v) και (u',v') παριστουν το ιδιο [**X**] στα δυο διαφορετικα συστηματα προβολικων συντεταγμενων, τοτε θα πρεπει για καποιο $\lambda\neq 0$, να ισχυει

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda A' \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ οπου } C = A'^{-1}A.$$

Η τελευταια λυνεται ως προς λ και διδει

$$\lambda = c_{31}u+c_{32}v+c_{33}.$$

Αντικαθιστωντας τουτη στις δυο πρωτες εξισωσεις, παιρνουμε τις σχεσεις αλλαγης προβολικων συντεταγμενων:

$$u' = \frac{c_{11}u+c_{12}v+c_{13}}{c_{31}u+c_{32}v+c_{33}}, \qquad v' = \frac{c_{21}u+c_{22}v+c_{23}}{c_{31}u+c_{32}v+c_{33}}. \qquad (4)$$

Οριζω τον **διπλο λογο** τεσσαρων σημειων Α,Β,Γ,Δ του προβολικου επιπεδου, περιεχομενων στην ιδια ευθεια η, χρησιμοποιωντας ενα ειδικο συστημα προβολικων συντεταγμενων που εχει την η σαν u-αξονα. Σ ενα τετοιο συστημα συντεταγμενων τα Α,Β,Γ,Δ περιγραφονται απο τα (α,0), (β,0), (γ,0) και (δ,0). Οριζω λοιπον τον διπλο λογο της (διατεταγμενης) τετραδας:

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta} : \frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}. \qquad (5)$$

Η διαδικασια ορισμου εξαρταται φυσικα απο το συστημα προβολικων συντεταγμενων που επιλεγουμε. Ως προς καποιο αλλο συστημα, θα εχουμε και διαφορετικες συντεταγμενες (α',0), (β',0), (γ',0) και (δ',0). Ομως τα δυο συστηματα συνδεονται μεσω των τυπων (4) , ειδικα δε ο πρωτος εξ αυτων για $v = 0$, διδει τη σχεση μεταξυ των πρωτων συντεταγμενων, που ειναι της μορφης:

$$u' = \frac{pu+q}{ru+s}. \qquad (6)$$

Εχουμε λοιπον $\alpha'-\gamma' = (p\alpha+q)/(r\alpha+s)-(p\gamma+q)/(r\gamma+s) = ((ps-rq)(\alpha-\gamma))/((r\alpha+s)(r\gamma+s))$. Λογαριαζοντας αναλογα και τις αλλες διαφορες και απλοποιωντας, βρισκουμε οτι

$$\frac{\alpha'-\gamma'}{\alpha'-\delta'} : \frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\delta'} = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta} : \frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}$$

και ο αριθμος (ΑΒΓΔ) ειναι ο ιδιος, οποιο προβολικο συστημα συντεταγμενων και να χρησιμοποιησουμε. Εχουμε εδω κατι αναλογο με την αποσταση δυο σημειων (u,v) και (u',v') του Ευκλειδειου επιπεδου, που σε ορθογωνιο συστημα συντεταγμενων διδεται απο τον τυπο

$$d = \sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}.$$

Οποιο ομως διαφορετικο συστημα ορθογωνιων συντεταγμενων και να χρησιμοποιησουμε, παλι τον ιδιο αριθμο d θα βρουμε. Ειναι, οπως λεμε, η d μια αριθμητικη αναλλοιωτος του Ευκλειδειου επιπεδου. Με αλλα λογια μια συναρτηση f(A,B) δυο σημειων του επιπεδου, που η τιμη της παραμενει σταθερα αν υποβαλλουμε τα A,B σε μια ισομετρια Φ του Ευκλειδειου επιπεδου:

$$f(\Phi(A),\Phi(B)) = f(A,B), \text{ για καθε ισομετρια } \Phi \text{ του Ευκλειδειου επιπεδου.}$$

Στο P^2 εχουμε μια διαφορετικη "γεωμετρια". Αντι για ισομετριες εχουμε τις λεγομενες **προβολικοτητες** που χαρακτηριζονται σαν αμφιμονοσημαντες απεικονισεις του P^2 στον εαυτο του, που στελνουν ευθειες σε ευθειες. Στα πλαισια αυτης της γεωμετριας, μας ενδιαφερουν ιδιοτητες που δεν μεταβαλλονται, οταν υποβαλλουμε τα σχηματα σε προβολικοτητες. Ο διπλος λογος μπορει να θεωρηθη σαν μια συναρτηση τεσσαρων μεταβλητων του P^2

$$f(A,B,\Gamma,\Delta) = (AB\Gamma\Delta)$$

και μπορουμε να δουμε αμεσως οτι τουτη η συναρτηση ειναι αριθμητικη αναλλοιωτος του προβολικου επιπεδου.

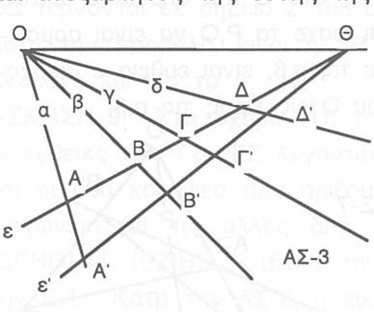
Πραγματι, ας δεχθουμε προς στιγμην αναποδεικτα οτι οι προβολικοτητες του P^2 περιγραφονται σε ομογενεις συντεταγμενες μεσω αντιστρεψιμων μητρων A που οριζουν απεικονισεις F_A: $P^2 \to P^2$ με $F_A([X]) = [AX]$. Τουτες στελνουν προβολικες ευθειες σε προβολικες ευθειες και συνεπως την ευθεια η που περιεχει τα τεσσερα σημεια A,B,Γ,Δ σε μια ευθεια η' που περιεχει τα αντιστοιχα σημεια A',B',Γ',Δ'. Χρησιμοποιωντας τις η και η' σαν πρωτους αξονες δυο αντιστοιχων συστηματων προβολικων συντεταγμενων και την περιγραφη της προβολικοτητας μεσω της μητρας A, θα εχουμε για τις αντιστοιχες προβολικες συντεταγμενες:

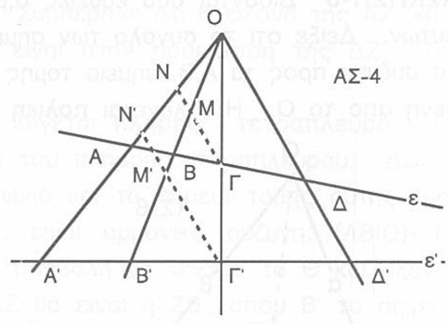
$$\lambda\begin{pmatrix}u'\\v'\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}.$$

Τουτες οριζουν, για τις πρωτες συντεταγμενες, ενα μετασχηματισμο της μορφης (6) και οπως ειδαμε ο διπλος λογος παραμενει αναλλοιωτος ως προς τετοιους μετασχηματισμους. Σημειωνω οτι τοσο η αποσταση στην Ευκλειδεια γεωμετρια, οσο και ο διπλος λογος στην προβολικη, μπορει ν αποδειχθει οτι ειναι, στην ουσια, οι μοναδικες αντιστοιχες αριθμητικες αναλλοιωτοι των δυο γεωμετριων.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι αν δοθουν τρια σημεια Α,Β,Γ ευθειας α και οι αντιστοιχες εικονες τους Α',Β',Γ' στην ευθεια Φ(α)=α', οπου Φ μια προβολικοτητα, τοτε η εικονα Δ'=Φ(Δ) ενος οποιουδηποτε σημειου της α, ειναι μονοσημαντα καθορισμενη. Συμπερανε οτι αν η Φ εχει τρια σταθερα σημεια πανω στην α, τοτε η α παραμενει σταθερα, σημειο προς σημειο. ((ΑΒΓΔ)=(Α'Β'Γ'Δ') και η θεση του Δ ειναι μονοσημαντα καθορισμενη απο τον διπλο λογο (ΑΒΓΔ).)

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι ο διπλος λογος (ΑΒΓΔ) των σημειων τομης ευθειας ε με δεσμη τεσσαρων ευθειων α,β,γ,δ δια του σημειου Ο, ειναι παντοτε ο ιδιος και ανεξαρτητος της θεσης της ε.





(Παρε προβολικες συντεταγμενες, ετσι ωστε οι ε,ε' καθως και οι α,β,γ,δ να γινονται παραλληλες. Κατ εξοχην ευθεια η ΟΘ.)

ΑΣΚΗΣΗ-4 Αποδειξε την προηγουμενη προταση με τα μεσα της Ευκλειδειας γεωμετριας. (ΑΓ/ΑΔ=ΝΓ/ΟΔ, ΒΓ/ΒΔ=ΜΓ/ΟΔ$\Rightarrow$ (ΑΓ/ΑΔ): (ΒΓ/ΒΔ) = ΝΓ/ΜΓ κ.τ.λ.)

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι ο διπλος λογος τεσσαρων διαφορετικων σημειων μιας προβολικης ευθειας, δεν μπορει να παρει τις τιμες 0 και 1. Ακομη, αν ειναι λ=(ΑΒΓΔ), δειξε οτι αλλαζοντας την σειρα των Α,Β,Γ,Δ, παιρνουμε συνολικα 6 διαφορετικες τιμες για τους αντιστοιχους διπλους λογους:

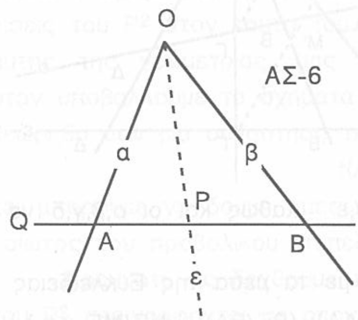
$$(ΑΒΓΔ) = \lambda$$
$$(ΒΓΑΔ) = (\lambda-1)/\lambda$$
$$(ΓΑΒΔ) = 1/(1-\lambda)$$
$$(ΒΑΓΔ) = 1/\lambda$$
$$(ΓΒΑΔ) = \lambda/(\lambda-1)$$
$$(ΑΓΒΔ) = 1-\lambda$$

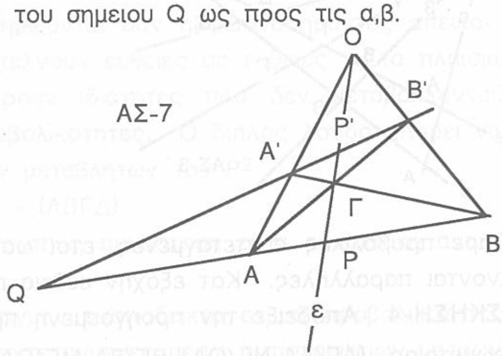
Δειξε ακομη οτι κυκλικες μεταθεσεις των γραμματων αφηνουν τους αντιστοιχους διπλους λογους αμεταβλητους.

Αξιζει τον κοπο να παρατηρησουμε εδω, οτι η ΑΣ-3 διδει την δυνατοτητα να ορισουμε τον διπλο λογο τεσσαρων ευθειων α,β,γ,δ διερχομενων απο σημειο O. Πραγματι, τεμνοντας τις ευθειες α,β,γ,δ με ευθεια ε, κατα τα σημεια Α,Β,Γ,Δ οριζουμε το διπλο λογο των τεσσαρων ευθειων (αβγδ)=(ΑΒΓΔ). Κατα την ΑΣ-3, τουτος ο αριθμος ειναι ανεξαρτητος της τεμνουσας ε και εκφραζει μια ιδιοτητα της τετραδας των ευθειων α,β,γ,δ. Σημειωσε οτι εχουμε μια εκδηλωση της αρχης της δυϊκοτητας: "για καθε τετραδα σημειων της ιδιας ευθειας οριζεται ενας αριθμος (διπλος λογος των τεσσαρων σημειων)" $\leftrightarrow$ "για καθε τετραδα ευθειων διερχομενων απο κοινο σημειο οριζεται ενας αριθμος (διπλος λογος των τεσσαρων ευθειων)".

Τα σημεια Α,Β της ευθειας α, λεγονται **αρμονικα συζυγη** προς τα P,Q της ιδιας ευθειας, οταν (ABPQ) = -1.

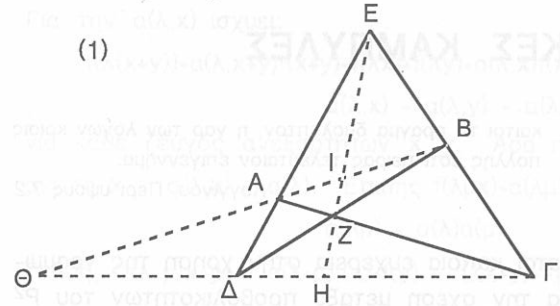
ΑΣΚΗΣΗ-6 Διδονται δυο ευθειες α,β τεμνομενες στο O και σημειο Q εκτος αυτων. Δειξε οτι το συνολο των σημειων P ετσι ωστε τα P,Q να ειναι αρμονικα συζυγη προς τα Α,Β, σημεια τομης της PQ με τις α,β, ειναι ευθεια ε διερχομενη απο το O. Η ε λεγεται **πολικη** του σημειου Q ώς προς τις α,β.

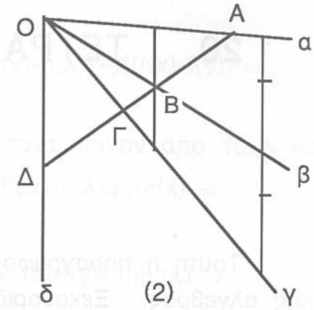




Απο την κεντρικη προβολη ενος επιπεδου σ ενα αλλο, απο σημειο του χωρου (σχημα σελ. 111), προκυπτει μια απεικονιση Φ του προβολικου επιπεδου στον εαυτο του, που λεγεται **αρμονικη προβολη** και οριζεται ως εξης: Υπαρχουν μια ευθεια ε και σημειο Q εκτος αυτης, που παραμενουν σταθερα κατα την Φ (Το Q αντιστοιχει στο κεντρο προβολης O και η ευθεια ε στην τομη των προβαλλομενων επιπεδων, μετα την κατακλιση του επιπεδου α στο β (σχημα σελ. 112)). Επιπλεον, σε καθε σημειο Α, η Φ αντιστοιχει το Β, επι της ευθειας των Q,A, ετσι ωστε τα A,B,Q και το σημειο τομης P, της ε με την QA να ικανοποιουν (ABPQ) = -1. Το Q λεγεται **κεντρο** και η ε **αξονας** της Φ.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι η προηγουμενη αρμονικη προβολη ειναι μια προβολικοτητα του προβολικου επιπεδου στον εαυτο του, με την εννοια οτι απεικονιζει καθε ευθεια του προβολικου επιπεδου σε μια ευθεια. (Καθε ευθεια OA απεικονιζεται στην πολικη OB, των OA και ε, ώς προς το σημειο Q.)





ΑΣΚΗΣΗ-8 Στο σχημα (1): εστω οτι ΕΒΓ ειναι η εικονα της ευθειας ΕΑΔ ως προς την αρμονικη προβολη με κεντρο Θ και αξονα ΕΗ. Δειξε οτι οι ΑΓ και ΒΔ τεμνονται σε σημειο Ζ του αξονα ΕΗ. Συμπερανε οτι η εικονα της ΑΖ, κατ αυτη την προβολη, ειναι η ΖΒ και το Β ειναι στην προεκταση της ΔΖ. Το αναλογο και για το Γ.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Στο σχημα (1): το ΑΒΓΔΕΖ λεγεται **πληρες τετραπλευρο** και οι ευθειες ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λεγονται **διαγωνιοι** του πληρους τετραπλευρου. Δειξε οτι οι δυο κορυφες που οριζουν μια διαγωνιο και τα σημεια τομης αυτης της διαγωνιου με τις αλλες δυο διαγωνιους, ειναι αρμονικα συζυγη: (ΑΒ|Θ)=-1, (ΔΓΗΘ)=-1, (ΕΖΙΗ)=-1. (Παρε την αρμονικη προβολη με κεντρο το Θ και αξονα την ΕΗ. Κατα την ΑΣ-8, η εικονα του ΑΖ θα ειναι η ΖΒ', οπου Β' το σημειο τομης της προεκτασης της ΔΖ με την ΘΑ. Τοτε Β'=Β και αναλογα Γ'=Γ, οποτε το ΑΒΓΔΕΖ παραμενει αναλλοιωτο κατα την αρμονικη προβολη κ.τ.λ.)

Διπλο λογο τεσσαρων σημειων ευθειας μπορουμε να ορισουμε και στην Ευκλειδεια γεωμετρια (ΑΒΓΔ) = (ΑΓ/ΑΔ): (ΒΓ/ΒΔ). Χρησιμοποιωντας κατοπιν την ΑΣ-4 αποδεικνυουμε οτι ο διπλος λογος τεσσαρων σημειων τομης ευθειας ε με τις α,β,γ,δ που διερχονται απο το σημειο Ο, ειναι ανεξαρτητος της τεμνουσας ε και οριζει τον διπλο λογο (αβγδ) των τεσσαρων ευθειων. Ειδικα οι ευθειες α,β,γ,δ δια του Ο, λεμε οτι αποτελουν αρμονικη δεσμη, οταν (αβγδ)=-1. Και παλι με την βοηθεια της ΑΣ-4 αποδεικνυεται οτι οι α,β,γ,δ αποτελουν αρμονικη δεσμη, τοτε και μονον, οταν σε καθε παραλληλο προς την δ, η γ διχοτομει το τμημα μεταξυ των α,β. Η παρατηρηση αυτη διδει ενα γεωμετρικο τροπο αμεσης κατασκευης του σημειου Α, ετσι ωστε (ΑΒΓΔ)=-1, οταν δοθουν τα Β,Γ και Δ (Σχημα (2)).

ουτω μετ αρετης και διαιτα πασα και βιος αλυπος εστι και επιτερπης, η δε κακια και τα λαμπρα φαινομενα και πολυτελη και σεμνα μιγνυμενη λυπηρα και ναυτιωδη και δυσπροσδεκτα παρεχει τοις κεκτημενοις. Πλουταρχου, ηθικα 100 D

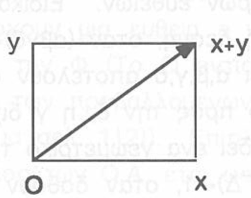
20. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

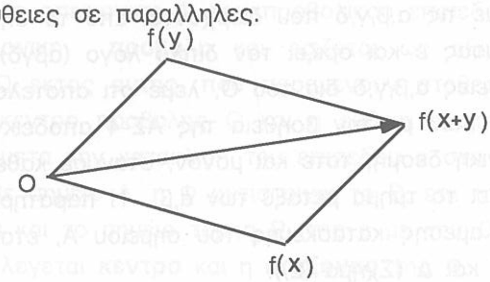
καιτοι το πραγμα δυσληπτον, η γαρ των λογων κρισις
πολλης εστι πειρας τελευταιον επιγεννημα.
Λογγινου, Περι υψους 7.2

Τουτη η παραγραφος χρειαζεται καποια ευχερεια στην χρηση της γραμμικης αλγεβρας. Ξεκαθαριζω πρωτα την σχεση μεταξυ προβολικοτητων του P^2 και γραμμικων απεικονισεων του R^3 στον εαυτο του.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Καθε προβολικοτητα Φ του P^2, δηλαδη καθε αμφιμονοσημαντη απεικονιση του P^2 στον εαυτο του που διατηρει τις ευθειες, ειναι της μορφης $\Phi([x]) = [Ax]$, οπου A αμφιμονοσημαντη γραμμικη απεικονιση του R^3 στον εαυτο του.

Κατ αρχην βλεπουμε ευκολα οτι καθε απεικονιση της μορφης $\Phi([x])=[Ax]$, οπου A αντιστρεψιμη γραμμικη απεικονιση του R^3 στον εαυτο του, οριζει μια προβολικοτητα. Το σημειο $\Sigma=[0,0,1]$ του P^2 δεν περιεχεται στην ευθεια ε του P^2 που οριζεται απο την εξισωση z=0. Αρα το $T=\Phi(\Sigma)$ δεν περιεχεται στην ευθεια $\varepsilon'=\Phi(\varepsilon)$. Απο την ασκηση που ακολουθει, προκυπτει οτι μπορουμε να βρουμε προβολικοτητα Ψ, της μορφης $\Psi([x]) = [Bx]$, ετσι ωστε $\Psi(\varepsilon')=\varepsilon$ και $\Psi(T) = \Sigma$. Τοτε η $X=\Psi\circ\Phi$ ειναι προβολικοτητα που αφηνει το Σ σταθερο και την ευθεια ε αναλλοιωτο. Τουτο σημαινει οτι η Φ απεικονιζει σημεια της μορφης $[x,y,1]$ σε σημεια της ιδιας μορφης $[x',y',1]$ και η απεικονιση $(x',y')=f(x,y)$, ειναι μια αντιστρεψιμη $f : R^2 \rightarrow R^2$ που αφηνει το (0,0) σταθερο και στελνει ευθειες σε ευθειες και συνεπως παραλληλες ευθειες σε παραλληλες.





Απο την τελευταια παρατηρηση επεται αμεσως οτι $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για δυο οποιαδηποτε ανεξαρτητα διανυσματα του R^2. Επισης, απο την διατηρηση των ευθειων δια του (0,0) εχουμε και την

$$f(\lambda x) = \alpha(\lambda,x)f(x), \text{ για καθε } \lambda\in R \text{ και καθε } x\in R^3.$$

Για την $\alpha(\lambda,x)$ ισχυει:

$$f(\lambda(x+y))=\alpha(\lambda,x+y)f(x+y)=f(\lambda x)+f(\lambda y)=\alpha(\lambda,x)f(x)+\alpha(\lambda,y)f(y)=\alpha(\lambda,x+y)(f(x)+f(y)) \Rightarrow$$
$$\alpha(\lambda,x) = \alpha(\lambda,y) = \alpha(\lambda,x+y),$$

για καθε ζευγος ανεξαρτητων x, y. Αρα η α εξαρταται μονον απο το λ και οχι το x : $\alpha(\lambda,x) = \alpha(\lambda)$. Επισης $f(\lambda\mu x)=\alpha(\lambda\mu)f(x)=\alpha(\lambda)f(\mu x)=\alpha(\lambda)\alpha(\mu)f(x) \Rightarrow$

$$\alpha(\lambda\mu) = \alpha(\lambda)\alpha(\mu). \qquad (*)$$

Τελος, $f((\lambda+\mu)x+y) = \alpha(\lambda+\mu)f(x)+f(y) = f(\lambda x+y)+f(\mu x) = \alpha(\lambda)f(x)+f(y)+\alpha(\mu)f(x) \Rightarrow$

$$\alpha(\lambda+\mu) = \alpha(\lambda)+\alpha(\mu). \qquad (**)$$

Οι (*) και (**) συνεπαγονται οτι η α: $R \to R$ ειναι αυτομορφισμος του R, αρα ειναι η ταυτοτικη. (Οι δυο ιδιοτητες συνεπαγονται αμεσως οτι η α ειναι η ταυτοτικη στους ρητους. Ταυτιζοντας κατοπιν τα σημεια του R με κλασσεις ισοδυναμιας ακολουθιων Cauchy ρητων αριθμων, δειχνουμε οτι η α ειναι παντου η ταυτοτικη.) Τουτο συνεπαγεται οτι η f ειναι γραμμικη απεικονιση του R^2 στον εαυτο του και συνεπως η $X([x,y,1]) = [f(x,y),1]$ ειναι της μορφης $X([x])=[\Gamma(x)]$ για μια καταλληλη γραμμικη απεικονιση Γ: $R^3 \to R^3$. Τοτε $\Phi = (\Psi^{-1})\circ X$ ειναι της μορφης $\Phi([x]) = [Ax]$, με $A=(B^{-1})\circ\Gamma$ (ΑΣ-2).

ΑΣΚΗΣΗ-1 Εστω $\Sigma=[0,0,1]$, $T=[u,v,w]$ σημεια του P^2 και ε,ε' ευθειες που οριζονται απο τις εξισωσεις $z=0$ και $ax+by+cz=0$ αντιστοιχως και $au+bv+cw \neq 0$. Δειξε οτι υπαρχει γραμμικη απεικονιση A, ετσι ωστε η $\Phi([x])=[Ax]$ να απεικονιζει το T στο Σ και την ε' στην ε.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι δυο γραμμικες αντιστρεψιμες απεικονισεις A,B οριζουν την ιδια προβολικοτητα $[Ax] = [Bx]$, τοτε και μονον, οταν $B=\lambda A$ με $\lambda \neq 0$. Δειξε ακομη, οτι για τις προβολικοτητες $\Phi([x])=[Ax]$, $\Psi([x])=[x]$ ισχυει $(\Phi\circ\Psi)([x]) = [ABx]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 (Θεμελιωδες θεωρημα της προβολικης γεωμετριας) Καθε προβολικοτητα Φ: $P^2 \to P^2$ καθοριζεται πληρως απο τεσσερα, ανα τρια μη κειμενα επ ευθειας, σημεια Α,Β,Γ,Δ και τις εικονες τους Φ(Α),Φ(Β),Φ(Γ),Φ(Δ). Μια προβολικοτητα που εχει τεσσερα τετοια σημεια σταθερα, ειναι η ταυτοτικη.

Πραγματι, μετα την ΠΡ-1 αρκει να δειξουμε οτι οι τεσσερεις εξισωσεις

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \ i = 1,2,3,4,$$

για δοθεντα x_i, y_i και ζητουμενα λ_i, A οριζουν μονοσημαντα την A εκτος απο μια πολλαπλασιαστικη σταθερα λ. Πραγματι, τα τρια πρωτα διανυσματα και οι εικονες τους αποτελουν δυο βασεις, και για αυθαιρετα λ_i, $i=1,2,3$ οι 3 πρωτες εξισωσεις οριζουν μια γραμμικη απεικονιση $A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ εξαρτωμενη απο τα λ_i γραμμικα. Η τελευταια εξισωση

$$A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)x_4 = \lambda_4 y_4 ,$$

διδει συστημα ταξης 3 ως προς τα λ_i που εχει λυσεις της μορφης

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta) ,$$

με καποιες σταθερες α,β,γ,δ. Αντικαταστησε στην Α τις τιμες των λ_i .

Η ομαδα των προβολικοτητων του P^2 ειναι η λεγομενη γραμμικη προβολικη ομαδα PGL(3,R), της οποιας τα στοιχεια ειναι κλασσεις ισοδυναμιας αντιστρεψιμων μητρων [A] , ως προς την σχεση ισοδυναμιας $[A] = [B] \Leftrightarrow B=\lambda A$, με $\lambda \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι η προβολικη ευθεια ε που διερχεται απο τα σημεια $A=[\mathbf{a}]$ και $B=[\boldsymbol{\beta}]$ του P^2, αποτελειται απο τα σημεια $[\lambda\mathbf{a}+\mu\boldsymbol{\beta}]$ με $\lambda+\mu=1$.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι τα σημεια $\Gamma=[\lambda\mathbf{a}+\mu\boldsymbol{\beta}]$ και $\Delta=[\lambda'\mathbf{a}+\mu'\boldsymbol{\beta}]$ της προηγουμενης ευθειας εχουν διπλο λογο $(AB\Gamma\Delta) = (\mu/\mu'):(\lambda/\lambda') = (\mu/\lambda):(\mu'/\lambda')$.

Οι τετραγωνικες καμπυλες στο P^2 οριζονται με την βοηθεια **συμμετρικων διγραμμικων μορφων** $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ του R^3. Τουτες ειναι απεικονισεις της μορφης

$$\Phi: R^3 \times R^3 \to R, \text{ με τις ιδιοτητες}$$

α) $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, για σταθερο y, ειναι γραμμικη ως προς **x**.

β) $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y},\mathbf{x})$ για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$.

Ενα υποσυνολο Σ του P^2 λεγεται **τετραγωνικη καμπυλη**, οταν τα σημεια του [x] χαρακτηριζονται απο την εξισωση

$$\Phi(x,x) = 0, \qquad (1)$$

για καποια διγραμμικη μορφη Φ. Σε ομογενεις συντεταγμενες $x = (x,y,z)$, η προηγουμενη εξισωση ισοδυναμει με μια εξισωση της μορφης

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx = 0 . \qquad (2)$$

Η συμμετρικη μητρα

$$A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$$

παριστα την Φ ως προς αυτο το συστημα συντεταγμενων και εχουμε

$$\Phi(x,y) = x^t A\, x , \qquad (3)$$

οπου το γινομενο δεξια ειναι πολλαπλασιασμος μητρων.

Αν υποβαλλουμε την καμπυλη Σ που οριζεται απο την διγραμμικη Φ σε μια προβολικοτητα $F([x]) = [Bx]$, οπου B γραμμικη απεικονιση, τοτε η Σ μετασχηματιζεται στην Σ', η οποια ικανοποιει την εξισωση $\Phi(F^{-1}(x),F^{-1}(x))=0$. Παιρνοντας $\Gamma=B^{-1}$, η προηγουμενη σχεση γραφεται με την βοηθεια της μητρας $A' = \Gamma^t A \Gamma$

$$x^t\, A'\, x = 0.$$

Τουτο μας οδηγει να ορισουμε δυο τετραγωνικες καμπυλες **προβολικα ισοδυναμες**, οταν οι μητρες τους A, A' ως προς ομογενες συστημα συντεταγμενων συνδεονται με την σχεση

$$\lambda A' = \Gamma^t A \Gamma, \tag{4}$$

οπου Γ αντιστρεψιμη μητρα και $\lambda \neq 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Καθε τετραγωνικη καμπυλη ειναι προβολικα ισοδυναμη με μια των επομενων :

α) $x^2=0$, μια διπλη ευθεια.

β) $x^2-y^2 = 0$, δυο ευθειες.

γ) $x^2+y^2-z^2 = 0$, κυκλος σε προβολικες συντεταγμενες (z=1).

(Τις περιπτωσεις $\Phi=0$, $x^2+y^2=0$, $x^2+y^2+z^2=0$, τις θεωρω τετριμμενες. Οι μητρες που αντιστοιχουν στις τρεις περιπτωσεις ειναι

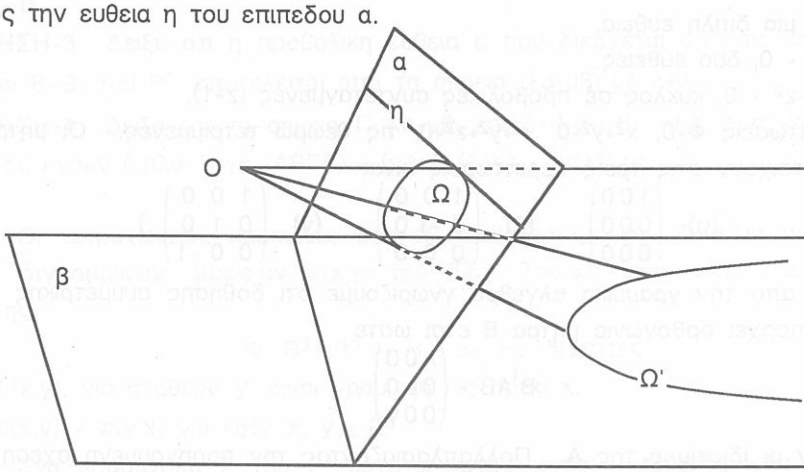
$$(\alpha)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad (\beta)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad (\gamma)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.)$$

Πραγματι, απο την γραμμικη αλγεβρα γνωριζουμε οτι δοθησης συμμετρικης μητρας A, υπαρχει ορθογωνια μητρα B ετσι ωστε

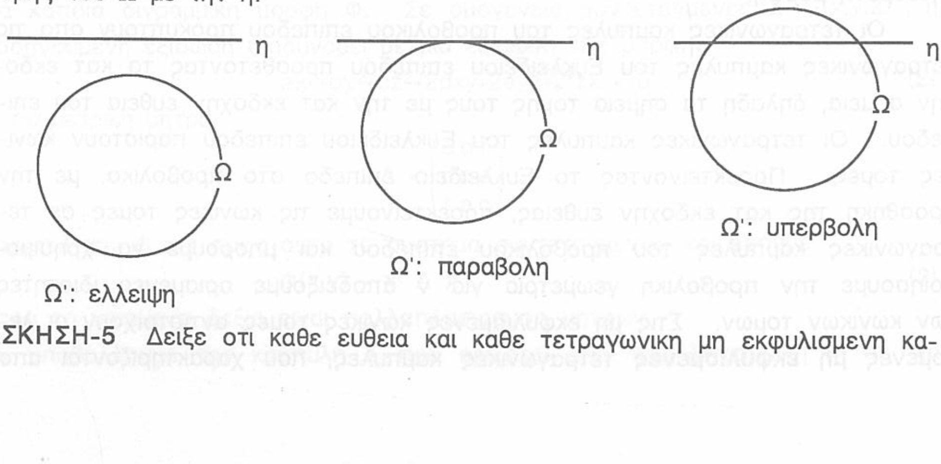
$$B^t A B = \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\nu\end{pmatrix},$$

οπου λ,μ,ν οι ιδιοτιμες της A. Πολλαπλασιαζοντας την προηγουμενη σχεση με καταλληλη διαγωνια μητρα Δ και μητρα S, που προκυπτει απο μεταθεση των στηλων της μοναδιαιας I, βρισκουμε οτι η $S^t\Delta^t B^t A B \Delta S = (B\Delta S)^t A (B\Delta S)$ εχει την ζητουμενη μορφη.

Οι τετραγωνικες καμπυλες του προβολικου επιπεδου προκυπτουν απο τις τετραγωνικες καμπυλες του Ευκλειδειου επιπεδου προσθετοντας τα κατ εκδοχην σημεια, δηλαδη τα σημεια τομης τους με την κατ εκδοχην ευθεια του επιπεδου. Οι τετραγωνικες καμπυλες του Ευκλειδειου επιπεδου παριστουν κωνικες τομες. Προεκτεινοντας το Ευκλειδειο επιπεδο στο προβολικο, με την προσθηκη της κατ εκδοχην ευθειας, προεκτεινουμε τις κωνικες τομες σε τετραγωνικες καμπυλες του προβολικου επιπεδου και μπορουμε να χρησιμοποιησουμε την προβολικη γεωμετρια για ν αποδειξουμε ορισμενες ιδιοτητες των κωνικων τομων. Στις μη εκφυλισμενες κωνικες τομες αντιστοιχουν οι λεγομενες **μη εκφυλισμενες** τετραγωνικες καμπυλες, που χαρακτηριζονται απο την ιδιοτητα $detA \neq 0$ ή το οτι αναγονται στην περιπτωση γ της προτασης 3. Ενω στην Ευκλειδεια γεωμετρια οι διαφορες κωνικες τομες ειναι μη ισομετρικες και χωριζονται σε τρεις κατηγοριες: ελλειψεις, παραβολες, υπερβολες, στην προβολικη ολες οι μη εκφυλισμενες ειναι προβολικα ισοδυναμες. Τουτο οφειλεται στο οτι οι Ευκλειδειες ισομετριες μπορουν να προεκταθουν σε προβολικοτητες που διατηρουν αναλλοιωτο την κατ εκδοχην ευθεια που προσθετουμε. Ετσι το πληθος των σημειων τομης της κωνικης τομης μ αυτην την ευθεια διατηρηται αναλλοιωτο. Γενικωτερες προβολικοτητες δεν κανουν διακριση μεταξυ ευθειων και κατ εκδοχην ευθειων και απεικονιζουν κυκλους σε ελλειψεις, παραβολες ή υπερβολες. Το επομενο σχημα, της κεντρικης προβολης απο το σημειο Ο, δειχνει πως εξαρταται η εικονα ενος κυκλου απο την θεση του ως προς την ευθεια η του επιπεδου α.



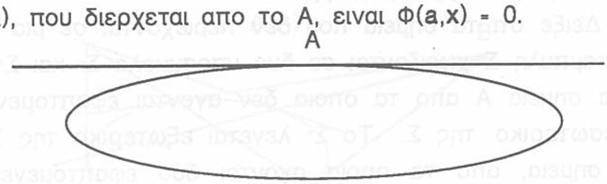
Η η απεικονιζεται στην κατ εκδοχην ευθεια του β και η εικονα Ω' του κυκλου Ω τεμνει την κατ εκδοχην ευθεια του β σε τοσα σημεια οσα ακριβως τα σημεια τομης του Ω με την η:



ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι καθε ευθεια και καθε τετραγωνικη μη εκφυλισμενη καμπυλη εχουν ενα, δυο ή κανενα κοινα σημεια. Συμπερανε οτι μια τετοια τετραγωνικη καμπυλη δεν μπορει να περιεχει μια ολοκληρη ευθεια.

Ευθειες που εχουν ενα ακριβως κοινο σημειο με μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη λεγονται **εφαπτομενες** της καμπυλης.

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Απο καθε σημειο μιας μη εκφυλισμενης καμπυλης αγεται μια και μονον εφαπτομενη προς αυτην. Αν η καμπυλη οριζεται απο την διγραμμικη μορφη Φ και $A=[\mathbf{a}]$ ειναι σημειο της καμπυλης ($\Leftrightarrow \Phi(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$), τοτε η εξισωση της εφαπτομενης ε(Α), που διερχεται απο το Α, ειναι $\Phi(\mathbf{a},\mathbf{x}) = 0$.



Κατ αρχην η ευθεια ε, που οριζει η εξισωση $\Phi(\mathbf{a},\mathbf{x})=0$, περιεχει το σημειο Α, αφου $\Phi(\mathbf{a},\mathbf{a})=0$. Η ε δεν μπορει να περιεχει αλλο σημειο $B=[\mathbf{b}]$ της καμπυλης, διοτι τοτε θα ειχαμε ταυτοχρονα $\Phi(\mathbf{b},\mathbf{b})=\Phi(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$, αρα και $\Phi(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=0$, για καθε λ και μ. Με αλλα λογια η ευθεια που οριζουν τα Α,Β θα περιεχοταν στην μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη, κατι που αντιφασκει στην ΑΣ-5. Η εξισωση $\Phi(\mathbf{a},\mathbf{x})=0$ περιγραφει λοιπον μια εφαπτομενη της καμπυλης στο Α. Αν $\varepsilon' =[\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}]$ ηταν μια αλλη εφαπτομενη της καμπυλης, τοτε για να ειναι το Α μοναδικο σημειο τομης της ε' με την καμπυλη, θα επρεπε η $\Phi(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=0$, να εχει μοναδικη λυση την: $\mu=0$ και λ=αυθαιρετο. Ομως η εξισωση

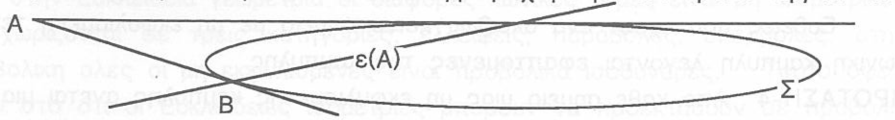
$$\Phi(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow 2\lambda\mu\Phi(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mu^2\Phi(\mathbf{b},\mathbf{b}) = 0$$

εχει μοναδικη λυση της παραπανω μορφης, τοτε και μονον, οταν $\Phi(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ και $\Phi(\mathbf{b},\mathbf{b})\neq 0$. Τουτο σημαινει ομως οτι η ε' ταυτιζεται με την ε.

Την ευθεια ε(Α), που οριζεται απο την εξισωση $\Phi(a,\mathbf{x})=0$, μπορουμε να ορισουμε και γενικωτερα για ενα τυχον σημειο Α που δεν ανηκει κατ αναγκη στην τετραγωνικη καμπυλη. Η ε(Α) λεγεται **πολικη** του Α ως προς την εν λογω τετραγωνικη καμπυλη. Η ΠΡ-4 λεει οτι η πολικη ε(Α) συμπιπτει με την εφαπτομενη στο Α, οταν το Α περιεχεται στην καμπυλη. Η επομενη προταση εξεταζει μια περιπτωση στην οποια το Α δεν περιεχεται στην καμπυλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Εστω Σ μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη οριζομενη μεσω της διγραμμικης μορφης $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Εαν απο το σημειο $A=[\mathbf{a}]$ αγεται εφαπτομενη η προς την Σ, τοτε το σημειο επαφης Β, της η με την Σ, θα περιεχεται στην πολικη ε(Α), του Α ως προς Σ.

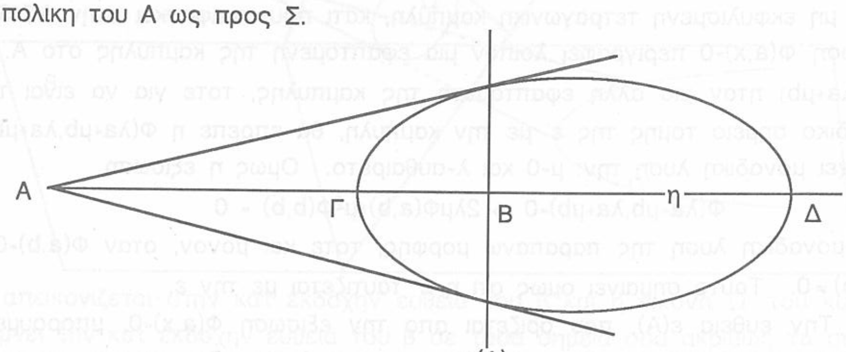
Πραγματι, αν $B=[\mathbf{b}]$ το σημειο επαφης, η ευθεια $\eta=[\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}]$ εχει μοναδικο κοινο σημειο με την Σ το Β, τοτε και μονον, οταν η $Φ(λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b},λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b})=0$ εχει μοναδικη λυση την $λ=0$ και $μ$=αυθαιρετο. Η αποδειξη προχωρα με τον τροπο της ΠΡ-4.



Με την ΠΡ-5 εχουμε ενα γεωμετρικο τροπο κατασκευης της πολικης μιας μη εκφυλισμενης τετραγωνικης καμπυλης.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι τα σημεια που δεν περιεχονται σε μια μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη Σ χωριζονται σε δυο υποσυνολα $Σ^-$ και $Σ^+$. Το $Σ^-$ αποτελειται απο τα σημεια Α απο τα οποια δεν αγονται εφαπτομενες προς την Σ και λεγεται **εσωτερικο** της Σ. Το $Σ^+$ λεγεται **εξωτερικο** της Σ και αποτελειται απο τα σημεια, απο τα οποια αγονται δυο εφαπτομενες προς την Σ. (Αναγαγε με μια προβολικοτητα στην (γ), ΠΡ-3)

ΠΡΟΤΑΣΗ-6 Εστω Σ μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη που οριζεται απο την διγραμμικη $Φ(\mathbf{x},\mathbf{y})$ και $A=[\mathbf{a}]$ σημειο μη περιεχομενο στην Σ. Η Σ παραμενει αναλλοιωτη ως προς την αρμονικη προβολη με κεντρο το Α και αξονα την ε(Α), πολικη του Α ως προς Σ.



Εστω $B=[\mathbf{b}]$ το σημειο τομης μιας τεμνουσας η, δια του Α, και της πολικης ε(Α). Τα σημεια τομης της η με την Σ ειναι $Γ=[λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b}]$ και $Δ=[λ'\mathbf{a}+μ'\mathbf{b}]$ για καταλληλα $λ,μ,λ',μ'$. Δοθησης της $Φ(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$, τα λ,μ ικανοποιουν την εξισωση:

$$Φ(λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b},λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow λ^2Φ(\mathbf{a},\mathbf{a})+μ^2Φ(\mathbf{b},\mathbf{b})=0.$$

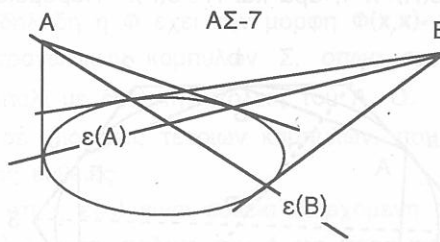
Την ιδια εξισωση ικανοποιουν και τα λ',μ'. Συναγεται οτι $(μ/λ):(μ'/λ')=-1$, που συμφωνα με την ΑΣ-4 σημαινει $(ΑΒΓΔ)=-1$. Τουτο ακριβως σημαινει οτι η Σ ειναι αναλλοιωτη ως προς την αναφερθησα αρμονικη προβολη.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω Σ μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη και Α,Β σημεια του προβολικου επιπεδου με ε(Α), ε(Β) αντιστοιχες πολικες ως προς Σ. Δειξε οτι

$A \in \varepsilon(B) \Leftrightarrow B \in \varepsilon(A)$. (Συμμετρικοτητα της $\Phi(a,b)=0$)

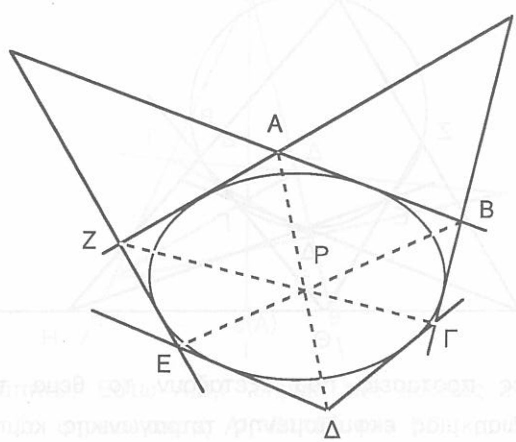
ΑΣΚΗΣΗ-8 Δοθησης της Σ, οπως προηγουμενως, δειξε οτι καθε ευθεια η του προβολικου επιπεδου, ειναι πολικη ενος ακριβως σημειου B του P^2.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι οι πολικες ε(A) ενος σημειου A, ως προς την τετραγωνικη μη εκφυλισμενη καμπυλη Σ, κινουμενου πανω στην ευθεια η, διερχονται ολες απο κοινο σημειο B που εχει πολικη την η. (Εφαρμογη των ΑΣ-7,8)



ΑΣΚΗΣΗ-10 Εστω Σ μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη. Δειξε οτι τρια σημεια A,B,Γ ειναι συνευθειακα, τοτε και μονον, οταν οι πολικες τους ως προς Σ, ε(A),ε(B),ε(Γ), διερχονται απο το ιδιο σημειο.

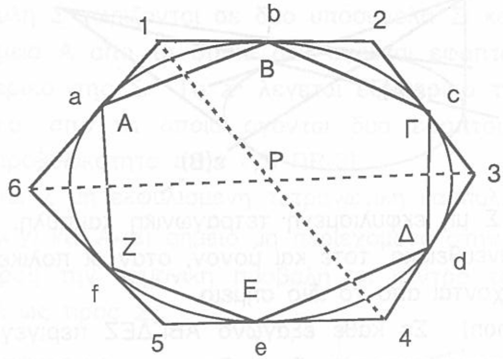
ΠΡΟΤΑΣΗ-7 (Brianchon) Σε καθε εξαγωνο ΑΒΓΔΕΖ περιγεγραμμενο σε τετραγωνικη μη εκφυλισμενη καμπυλη Σ οι διαγωνιοι ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ διερχονται απο κοινο σημειο P.

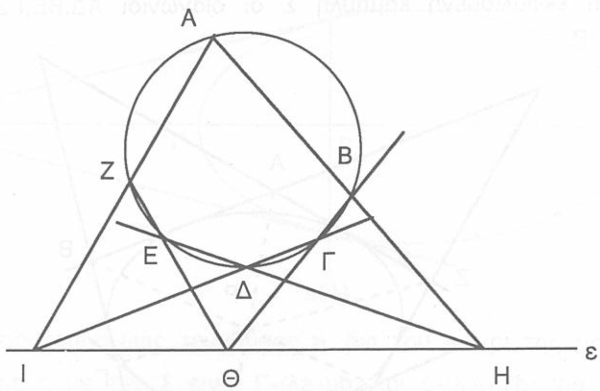


Η αποδειξη αναγεται στην αντιστοιχη για ευκλειδειο κυκλο (ΑΣ-12, §14) μεσω μιας προβολικοτητας, που απεικονιζει την καμπυλη σε ενα κυκλο (γ, ΠΡ-3).

ΠΡΟΤΑΣΗ-8 (Pascal) Για καθε εξαγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμενο σε μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη Σ τα σημεια τομης των απεναντι πλευρων $H=AB\cap\Delta E$, $\Theta=B\Gamma\cap EZ$, $I=\Gamma\Delta\cap ZA$ περιεχονται σε ευθεια ε.

Στο σχημα: abcdef οι πλευρες του πολικου του δοθεντος εξαγωνου. Κατα την ΠΡ-7, οι ευθειες που ενωνουν τις απεναντι κορυφες 14, 25, 36 διερχονται ολες απο σημειο P. Εστω ε=ε(P) η πολικη του P ως προς Σ. Εφαρμοζω την ΑΣ-7. Η 1P4 περιεχει το 1, πολο της AB, αρα και η AB θα περιεχει το H' πολο της 1P4. Ομοιως και η ΕΔ θα περιεχει τον πολο της 1P4. Αρα ο πολος H' της 1P4 θα ειναι το σημειο τομης της AB με την ΔΕ, αρα θα συμπιπτει με το H. Το P ∈ ε(H)=1P4, αρα και H ∈ ε(P). Παρομοια και τα Θ,Ι περιεχονται στην ε=ε(P).



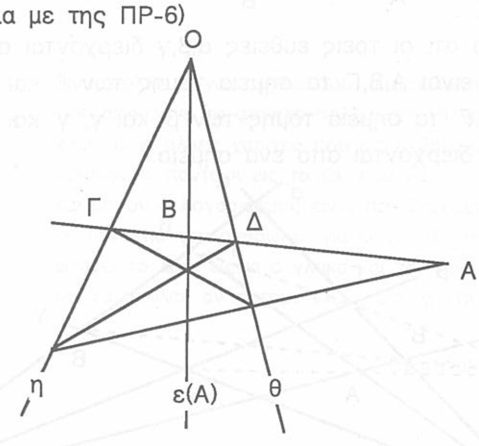


Τελειωνω με μερικες προτασεις που εξεταζουν το θεμα της πολικοτητας A→ε(A) στην περιπτωση μιας **εκφυλισμενης** τετραγωνικης καμπυλης. Εννοω, μ αυτον τον ορο, τετραγωνικες καμπυλες που αναγονται με καταλληλη προβολικοτητα σε μια απο τις περιπτωσεις α,β της ΠΡ-3. Σημειωσε οτι στην περιπτωση α για ολα τα σημεια [**a**] της ευθειας x=0, η εξισωση Φ(**a**,**x**)=0, ικανοποιειται απ ολα τα σημεια [**x**] του P^2. Στην περιπτωση β, για καθε σημειο A=[**a**] διαφορετικο απο το [0,0,1] (σημειο τομης των δυο ευθειων x-y=0, x+y=0, στις οποιες αναλυεται η τετραγωνικη καμπυλη) οριζεται η αντιστοιχη ευθεια Φ(**a**,x)=0 που εχει αναλογες ιδιοτητες με εκεινες της πολικης ε(Α) ως προς μη εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι καθε συστημα δυο ευθειων η,θ τεμνομενων στο σημειο Ο, απεικονιζεται με μια καταλληλη προβολικοτητα στην εκφυλισμενη τετραγωνικη καμπυλη της μορφης β της ΠΡ-3. Οι τετραγωνικες αυτες καμπυλες χαρακτηριζονται απο το οτι οι εξισωση τους Φ(**x**,**x**)=0, διασπαται σε γινομενο δυο εξισωσεων ευθειων, δηλαδη η Φ εχει την μορφη Φ(**x**,**x**)= (ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z). Στην περιπτωση τετραγωνικων καμπυλων Σ, οπως αυτες της προηγουμενης ασκησης, συμβολιζω παλι με ε(Α) την πολικη του Α$\neq$Ο. Ολες οι επομενες ασκησεις αναφερονται σε ιδιοτητες τετοιων καμπυλων, που γεωμετρικα παριστωνται με δυο τεμνομενες ευθειες.

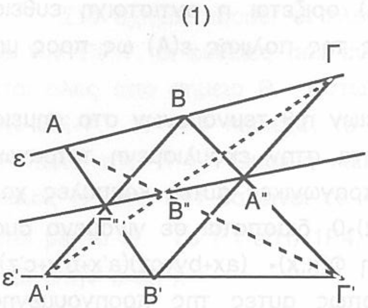
ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι η ε(Α) ειναι ευθεια διερχομενη απο το Ο, σημειο τομης των η,θ. Η ε(Α) λεγεται **πολικη** του Α ως προς τις η και θ.

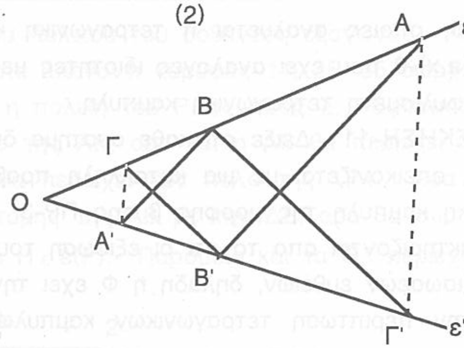
ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι η αρμονικη προβολη με αξονα την ε(Α) και κεντρο την Α, εναλλασσει τις η,θ. Συμπερανε οτι η ε(Α) ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων Β ετσι ωστε (ΑΒΓΔ)=-1, οπου Γ,Δ τα σημεια τομης της ΑΒ με τις η και θ. (Αποδειξη ιδια με της ΠΡ-6)



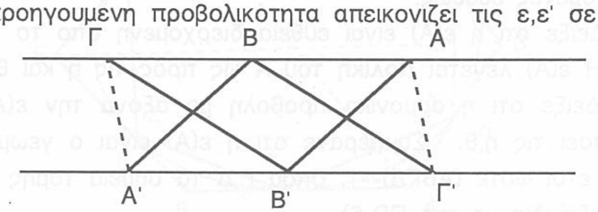
ΠΡΟΤΑΣΗ-9 (Παππου) Εστω Α,Β,Γ σημεια της ευθειας ε και Α',Β',Γ' σημεια της ευθειας ε'. Τα σημεια τομης Α", Β", Γ" των ΒΓ' και Β'Γ, ΓΑ' και Γ'Α, ΑΒ' και Α'Β αντιστοιχως περιεχονται σε ευθεια.

Με μια προβολικοτητα στελνω την ευθεια των Α",Γ" στην κατ εκδοχην ευθεια, οποτε το σχημα (1) απεικονιζεται στο (2) (εαν η Α"Γ" δεν περιεχει την τομη των ε,ε'). Οι ΑΒ',Α'Β και ΒΓ',Β'Γ απεικονιζονται σε παραλληλες και αρκει να

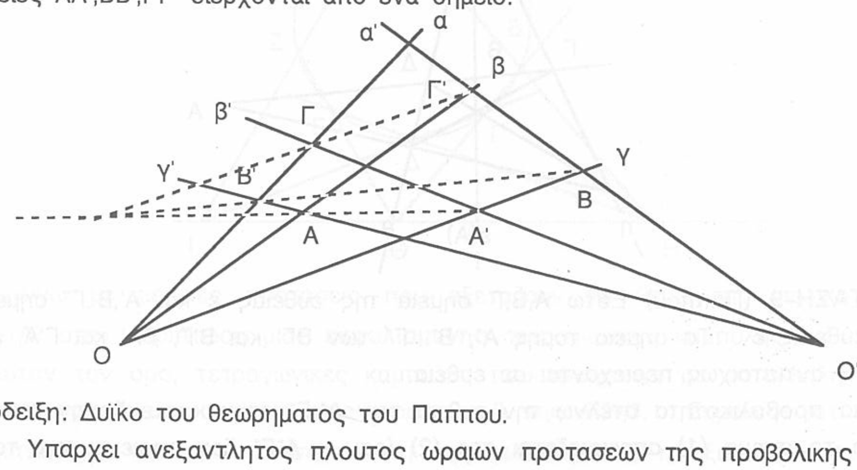




δειξω οτι και οι ΑΓ',Α'Γ ειναι παραλληλες, πραγμα ευκολο. Η περιπτωση στην οποια οι ε,ε' τεμνονται πανω στην Α"Γ" ειναι ακομη ευκολωτερη. Σ αυτη την περιπτωση η προηγουμενη προβολικοτητα απεικονιζει τις ε,ε' σε παραλληλες.



ΑΣΚΗΣΗ-14 Εστω οτι οι τρεις ευθειες α,β,γ διερχονται απο το Ο και οι α',β', γ' απο το Ο'. Ας ειναι Α,Β,Γ τα σημεια τομης των β και γ', γ και α', α και β' αντιστοιχα και Α',Β',Γ' τα σημεια τομης των β' και γ, γ' και α, α' και β. Τοτε οι ευθειες ΑΑ',ΒΒ',ΓΓ' διερχονται απο ενα σημειο.



Αποδειξη: Δυϊκο του θεωρηματος του Παππου.

Υπαρχει ανεξαντλητος πλουτος ωραιων προτασεων της προβολικης που σχετιζονται με τα θεμελια της γεωμετριας και τα στοιχειωδη προβληματα της αλγεβρικης γεωμετριας. Η προβολικη γεωμετρια εξεταζει τα προβληματα συμπτωσης σημειων σε ευθειες ή τομες ευθειων και τετραγωνικων καμπυλων. Η **αλγεβρικη γεωμετρια** προχωρει στην ερευνα των σημειων τομης και ιδιοτητων συμπτωσης γενικωτερων καμπυλων απ τις ευθειες και τις τετραγωνικες καμπυλες, οπως λ.χ. οι κυβικες και γενικωτερα οι **αλγεβρικες** καμπυλες, που οριζονται, σε ομογενεις συντεταγμενες (x,y,z), απο ομογενη πολυωνυμα P(x,y,z), βαθμου n. Η θεωρια που προκυπτει ειναι τοσο πλουσια, που θα αξιζε να την μελετησουμε σε ενα ιδιαιτερο μαθημα.

ειναι πολλω λογιω πουλια που γλυκοκιλαδουσι,
που αφηνουνε το φαγητο πολλοι, να τα γροικουσι,
ετσι και κι αλλες χαριτες που εις ανθρωπο θωρουμε,
βρισκονται παντα κ εις τα ζα, που να το πω βαριουμαι,
και μονον ο λογαριασμος ειναι που διαχωριζει
το ζον απο τον ανθρωπο, για κεινο ολα τα ριζει:
φτανει το λαφι ως κι α γλακα και τα θερια μερωνει
και τα πουλια, αν πετουν ψηλα, στη γη τα χαμηλωνει.

Ερωτοκριτος Ι,1171

21. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ

> μαλλον δε αναγκαιον εστι μηδε της των παλαιων συγγραμματων κτησεως ολιγωρως εχειν, αλλα και τουτων ποιεισθαι συλλογην κατα το γεωργωδες. Τον γαρ αυτον τροπον οργανον της παιδειας η χρησις των βιβλιων εστι, και απο πηγης την επιστημην τηρειν συμβεβηκεν.
>
> Πλουταρχου, περι παιδων αγωγης 10.Β

Το υλικο ειναι πολυ πλουσιο. Θησαυρος ανεξαντλητος. Καθε παραγραφος των σημειωσεων θα μπορουσε ν αποτελεσει αντικειμενο ενος ή περισσοτερων αυτοδυναμων βιβλιων. Συχνα η συντομια μου εγγιζει τα ορια του επιτρεπτου (και καμμια φορα τα ξεπερνα).

§1 Εκτος απο την ανακαλυψη νεων προτασεων, το ερευνητικο ενδιαφερον, απο την εποχη του Ευκλειδη και επειτα, εστραφηκε στο προβλημα της ανεξαρτησιας του αξιωματος της παραλληλιας απο τα υπολοιπα αξιωματα. Σημερα η σχετικη ερευνα γινεται, σχεδον αποκλειστικα, στα θεμελια της Γεωμετριας. Σταθμο στην αναπτυξη αυτη απετελεσε το βιβλιο **(1)** του **Hilbert**, που ανεφρα στην σ. 2. Ασχοληται αυτος ο κλαδος με την ευρεση συστηματων αξιωματων, την ισοδυναμια των διαφορων συστηματων, την εξεταση της ανεξαρτησιας μιας προτασης απο ενα συνολο αλλων προτασεων. Αν συζητουσαμε τα αξιωματα διεξοδικωτερα, θα ειχαμε σαφεστερη αντιληψη της επαγωγικης δομης της γεωμετριας. Δεν θα εμενε ομως τοπος και χρονος να απολαυσουμε καποια ωραια και συνθετα σχηματα. Προτιμησα λοιπον να προειδοποιησω στην αρχη τον αναγνωστη και να προχωρησω σαν τον Ευκλειδη, αφηνοντας μερικα κενα. Θεωρω γνωστο λ.χ. οτι οι ευθειες εχουν απειρα σημεια, οι κυκλοι το ιδιο, οτι υπαρχουν ορθες γωνιες και ειναι ολες ισες μεταξυ τους, οτι οι ευθειες εκτεινονται στο απειρο και χωριζουν το επιπεδο σε δυο ξενα συνολα. Τουτα και αλλα παρομοια, που αποδεικνυονται απο τα 20 αξιωματα, πρεπει να τα πιστεψουμε σαν αποδεδειγμενα. Επισης πρεπει να προϋποθεσουμε καποιους στοιχειωδεις ορισμους: κυκλου, τριγωνου, πολυγωνου, εγγεγραμμενου σε κυκλο πολυγωνου, περιγεγραμμενου, διχοτομου γωνιας, διαμεσου τριγωνου, υψους τριγωνου κ.τ.λ. Τελος πρεπει να γνωριζουμε τη χρηση του κανονα και του διαβητη για τις στοιχειωδεις κατασκευες: του μεσου ευθυγραμμου τμηματος, της καθετου απο σημειο προς ευθειαν, της παραλληλου απο σημειο προς ευθειαν, της τοποθετησης τριγωνου πανω σε αλλο ισο προς αυτο, της κατασκευης κυκλου διερχομενου απο δυο σημεια ή εφαπτομενου ευθειας σε δοθεν σημειο της κ.τ.λ. Ενα αξιολογο βιβλιο στα ελληνικα, που εχει πολλες τομες με το υλικο των δικων μου 8 πρωτων παραγραφων ειναι το **(2)** του **Χ. Στραντζαλου, Η εξελιξη των Ευκλειδειων και των μη Ευκλειδειων γεωμετριων**. Εκδοσεις Καρδαμιτσα, Αθηνα, 1988.

§2 Οι προτασεις του Legendre αποτελουν κατα καποιο τροπο τα συνορα μεταξυ υπερβολικης και Ευκλειδειας γεωμετριας. Εχοντας διαπιστωσει ηδη τα υπολοιπα 19 αξιωματα και εξεταζοντας το αθροισμα των γωνιων ενος τυχοντος τριγωνου, μπορεις να αποφανθεις για την γεωμετρια του χωρου που ευρισκεσαι. Στην περιοχη της απολυτης γεωμετριας ανηκουν οι προτασεις τομης των διαμεσων τριγωνου και των υψων οξυγωνιου τριγωνου. Δεν γνωριζω οστοσο καποια αποδειξη που να μην κανει χρηση του αξιωματος των παραλληλων.

§3 Ειναι αξιοθαυμαστη η ιστορια, ο μακροχρονιος αγωνας και η λυση του προβληματος της εξαρτησης του αξιωματος απο τα υπολοιπα. Τι κρυβεται κατω απο ενα προβλημα! Μια ιδεα μπορει να παρει ο αναγνωστης απο το βιβλιο **(3)** του **C.E. Sjoestedt : Le axiome de paralleles de Euclides a Hilbert, Un probleme cardinal in le evolution del geometrie.** 1968 Interlingue Fundation, Upsala. Bokfoerlaget och Kultur, Stockholm, Svedia. Το βιβλιο αυτο ειναι απο πολλες αποψεις αξιολογο. Συγκεντρωνει κειμενα των πιο γνωστων μαθηματικων, που ασχοληθηκαν με το προβλημα. Διπλα στο πρωτοτυπο υπαρχει μεταφραση στην γλωσσα Interligue, που φιλοδοξουσε τοτε να καθιερωθει σαν διεθνης γλωσσα. Τα κειμενα ειναι εντυπωσιακα και εκτεινονται σε 700 περιπου σελιδες. Η Interligue ειναι, ομολογουμενως, ευκολη για οσους γνωριζουν καποια λατινογενη γλωσσα. Υπαρχουν στο τελος και δυο παραρτηματα: I. Un lingue international auxiliari non es un utopie. II. Interligue. Le lingue del paroles international. Οσοι προτιμουν πιο συμβατικες γλωσσες μπορουν να κυταξουν στο **(4) R. Bonola, Non euclidean geometry**, Dover, New York 1955. Τουτο εχει στο τελος του, μεταφρασμενες στα Αγγλικα, τις δυο θεμελιωδεις εργασιες των **J. Bolyai** και **N. Lobachevski.** Ενδιαφερον εχει επισης και το **(5)** του **B.A. Rosenfeld, A history of Non-Euclidean Geometry (evolution of the concept of a geometric space).** Studies in the history of mathematics and physical sciences v.12, Springer 1988.

§4 Τι να πω γι αυτην την παραγραφο; Ορισμενα μερη των στοιχειων του Ευκλειδη θα επρεπε να τα διδασκουμε στα σχολεια μας. Δυστυχως, εκτος της παλαιας και δυσευρετης εκδοσης **(6) Ε. Σταματη, Ευκλειδου Γεωμετρια,** εισαγωγη-αρχαιο κειμενο-μεταφρασις, Οργανισμος εκδοσεως διδακτικων βιβλιων, Αθηνα 1975, δεν υπαρχουν στην ελληνικη βιβλιογραφια νεωτερες εκδοσεις με σχολια και βιβλιογραφικες παραπομπες. Ο ογκος της βιβλιογραφιας καθιστα μια νεα εκδοση εργο ζωης, γι αυτον που θα το επιχειρηση. Η εκδοση που προτιμω και χρησιμοποιησα σε πολλα σημεια των σημειωσεων μου ειναι η Αγγλικη μεταφραση των στοιχειων, με πλουσια σχολια και παραπομπες, **(7)** του **T.L. Heath: Euclid, the Elements,** 3 τομοι, Dover, New York, 1956. Ισως θα επρεπε να συσταθει ενας οργανισμος που θα συγκεντρωσει το υλικο και θα επιχειρησει μια νεα σοβαρη εκδοση των Στοιχειων του Ευκλειδη. Θα ειναι κατι τετοιο μια ουσιαστικη συνεισφορα στην ανορθωση της, (ототоι) χαμαι ερριμμενης και υπο παντων καταπατουμενης παιδειας μας. Μεχρι να ολοκληρωθει ενα τετοιο θεαρεστο εργο, η πλεον εγκυρη εκδοση του αρχαιου κειμενου θα παραμενει η **(8)** του **I.L. Heiberg, H. Menge: Euclidis Opera Omnia,** Teubner, Leipzig 1883.

§5 Με πονο ψυχης περιοριζω το υλικο σε πεντε σελιδες. Υπαρχει τοσο μεγαλος πλουτος προτασεων, η μια ωραιοτερη απ την αλλη, που θα μπορουσε κανεις να γιομισει τομους ολοκληρους, οπως το καναν λ.χ. οι Ιησουΐτες στο **(9)** που ανεφερα στην σ. 62. Αλλη συλλογη τετοιων μαργαριταριων αποτελει η **(10) Mathematische Miniaturen,** του **H. Doerrie,** Dr. Martin Sandig HG, Wiesbaden 1969 (Sandig reprint verlag, Hans R. Wohlend, Am schraegen Weg 12, FL-9490 Valduz, Liechtenstein). Περιεχει τουτη 403 διαλεγμενες ασκησεις, εκ των οποιων 225 ειναι απο την γεωμετρια. Υπαρχουν πολλες ενοτητες προβληματων της Ευκλειδειας γεωμετριας που παρουσιαζουν ενδιαφερουσες εφαρμογες και αξιζουν μια ιδιαιτερη μελετη. Παρακατω λ.χ. εξεταζω τον μετασχηματισμο της αντιστροφης και τις δεσμες κυκλων. Αλλα ενδιαφεροντα θεματα περιεχονται στο εξαιρετικο βιβλιο **(11)** του **H.S.M. Coxeter, Introduction to geometry.** Wiley 1969. Μια πιο συνεπτυγμενη μορφη του προηγουμενου αποτελει το **(12)** των **H.S.M. Coxeter** και **S.L. Greitzer: Geometry revisited,** Math. Association of America 1975. Σχετικα προσφατα εκδοθηκε και μια διασκεδαστικη συλλογη εργασιων (λανθασμενων) που αποδεικνυουν την τριχοτομηση τυχουσης γωνιας και τον τετραγωνισμο του κυκλου. Ο συγγραφεας δεν αρκεστηκε μονο στην σταχυολογηση των μαργαριταριων, αλλα καταγραφει και συνεντευξεις και μονολογους των επιδοξων τριχοτομων: **(13) Underwood Dudley, A budget of trisections,** Springer Verlag 1987. Πολυ ενδιαφερον και το παραθεμα του Μαθηματικου και φιλοσοφου A. de Morgan στην σ. 115 αυτου του βιβλιου: "My opinion of mankind is founded upon the mournful fact that, so far as I can see, they find within themselves the means of believing in a thousand times as much as there is to believe in."

§6 Μια αλλη χρηση της αναλυτικης γεωμετριας. Στηριζομαι στο (1) που ανεφερα παραπανω και το δικο μου **(14)** που αναφερω στην σ. 37.

§7 Η αναλυτικη γεωμετρια ειναι στενα συνδεδεμενη με την γραμμικη αλγεβρα. Ενα βοηθημα στην τελευταια ισως ειναι απαραιτητο για την κατανοηση του θεματος. Ενα αξιολογο βιβλιο που ξεκινα με εποπτικο διανυσματικο λογισμο και εξεταζει μεταξυ αλλων και θεματα της αναλυτικης και προβολικης γεωμετριας ειναι το **(15)** του **Ν.Κ. Στεφανιδη: Εισαγωγη στη γεωμετρια,** εκδοσεις Ζητη, Θεσσαλονικη 1985. Πιο στοιχειωδες απο το προηγουμενο, αλλα καλογραμμενο και με πολλες ασκησεις ειναι και το **(16)** του **Ν.Σ. Πνευματικου: Διανυσματικη και αναλυτικη γεωμετρια,** Αθηνα 1981. Για πιο προχωρημενους ιδιαιτερο ενδιαφερον παρουσιαζει το **(17)** του **N. Kuiper: Linear algebra and geometry,** North Holland 1965.

§8 Το ποιημα του Καβαφη στην σ. 51 το θυμηθικα ψαχνοντας στο λεξικο για τον Απολλωνιο. Το ποιημα αφορα τον αλλο Απολλωνιο, τον Τυανεα, που εζησε τον πρωτο αιωνα μ.Χ. και η ζωη του παρουσιαζει ομοιοτητες με την ζωη του Χριστου. Για οσους δεν ελκονται απο την αρχαια σοφια, τα ποιηματα του Καβαφη προσφερουν την εναλλακτικη λυση, την χαρη και το βαθος της ελληνικης παραδοσης. Οσοι προτιμουν τις κωνικες τομες, απο τα ποιηματα, ας κυταξουν για περισσοτερα στα (15), (16), (17).

§9 Αδικα αγνοημενη αν και τοσο χρησιμη στους αστρονομους, τους οδοιπορους και τους θαλασσοπορους. Πολλες προτασεις της στερεομετριας μεταφραζονται σε ιδιοτητες σχηματων της σφαιρας. Τα αξιωματα της σφαιρικης γεωμετριας περιεχονται στο **(18) D. Gans: An introduction to non euclidean geometry,** Academic press 1973. Για οσους ενδιαφερονται για καθαρη στερεομετρια (γεωμετρια του τετραεδρου) υπαρχει η συστηματικη παρουσιαση **(19) N.A. Court: Modern pure solid geometry,** Chelsea publishing comp., New York 1964, καθως επισης και το **(20) Victor Thebault: Parmi les belles Figures de la geometrie,** Librairie Vuibert, 63 Boulevard Saint Germain, Paris 1953.

§10 Μια συντομη εισαγωγη στις ιδιοτητες και τις εφαρμογες της αντιστροφης που εχει αρκετα κοινα σημεια με τη δικη μου παρουσιαση ειναι αυτη του **(21) I.Y. Bakelmann: Inversions,** the University of Chicago press 1974. Ενδιαφερον γι αυτην και την επομενη παραγραφο παρουσιαζει και το **(22) A.S. Smogorzhenvsky: Lobachevskian geometry,** Mir publishers, Moskow 1982.

§11 Μια ιδεα για την βιβλιογραφια πανω στο θεμα δινει το **(23) D.M.Y. Sommerville: Bibliography of non-euclidean geometry,** Chelsea publishing company 1970. Περιεχει γυρω στις 4000 καταχωρησεις για εργασιες απο την εποχη του Ευκλειδη (οι παλαιοτερες ασχολουνται κυριως με το θεμα των παραλληλων) μεχρι το 1902. Για την μετεπειτα βιβλιογραφια και την ιστορια της υπερβολικης γεωμετριας πολυ χρησιμο ειναι το **(5)**. Απο την προσφατη βιβλιογραφια αναφερω το **(24) Werner Fenchel: Elementary geometry in hyperbolic space**, de Gruyter Studies in Mathematics, Nr. 11, Walter de Gruyter, Berlin 1989 και το **(25) Richard J. Trudeau: The noneuclidean revolution**, Birkhaeuser, Boston 1987.

§12 Τα **(26)** και **(27)** των H. Schwerdtfeger και Καραθεοδωρη αντιστοιχα, που ανεφερα στην σ. 77, δεινουν μιαν αμυδρη ιδεα των διασυνδεσεων μεταξυ θεωριας μιγαδικων συναρτησεων και της ομαδας των μετασχηματισμων του Moebius. Υπαρχει και αλλο ενα κλασικο μοντελο υπερβολικης γεωμετριας, αυτο του Klein. Μια περιγραφη με στοιχειωδη μεσα περιεχεται στο **(28) G. Buchmann: Nichteuklidische Elementargeometrie**, B.G. Teubner, Stuttgart 1975.

§13 Η γωνια παραλληλιας ειναι βασικο γεωμετρικο χαρακτηριστικο της υπερβολικης γεωμετριας. Στην Ευκλειδεια γεωμετρια η μοναδα μετρησης γωνιας μπορει να ορισθει ανεξαρτητα απο την μοναδα μετρησης μηκους. Στην υπερβολικη αυτο ειναι αδυνατον. Καθορισμος της μιας μοναδας μετρησης συνεπαγεται καθορισμο της αλλης, μεσω της σχεσης θ=Π(x), που συνδεει γωνιες και μηκη. Η υπαρξη και η μορφη της συναρτησης Π(x) εξασφαλιζεται απο τα αξιωματα. Μια τετοια αξιωματικη αναπτυξη ακολουθει το βιβλιο **(29)** του **O. Perron**, που αναφερω στην σ. 103. Η δικη μου αναπτυξη της υπερβολικης γεωμετριας στο μοντελο του ανω υπερεπιπεδου ειναι, κατα καποιο τροπο, παραλληλη της δικης του αξιωματικης αναπτυξης.

§14 Χρησιμο το πρωτο κεφαλαιο του (27) του Καραθεοδωρη για το γενικωτερο συσχετισμο δεσμων κυκλων και μετασχηματισμων του Moebius.

§§15,16,17 Επι πλεον προτασεις της υπερβολικης γεωμετριας: στα (24) και (29). Ιδιαιτερο ενδιαφερον παρουσιαζουν οι διακριτες υποομαδες της ομαδας ισομετριων του υπερβολικου επιπεδου, που τις απεφυγα με συνεπεια. Πολλες προτασεις της υπερβολικης που συνδεονται με τετοιες υποομαδες εξεταζονται στο ενδιαφερον βιβλιο **(30)** του **A. Beardon: The geometry of discrete groups**, Graduate texts in Mathematics, Springer 1988. Οι στενοι δεσμοι ομαδων και γεωμετριας θα μπορουσαν να αποτελεσουν αντικειμενο ενος αλλου μαθηματος, που προϋποθετει τις γνωσεις του παροντος.

§18 Το σημειο καμπης του μαθηματος. Ο χρονος υποδιπλασιασμου του ακροατηριου αρχιζει να φθινει εκθετικα. Ο τροπος που εισαγω το προβολικο επιπεδο ειναι ο κλασικος. Οι αρχαριοι δυσκολευονται να κατανοησουν το προβολικο επιπεδο και ιδιως το μοντελο P^2 που εχει σημεια του ευθειες του χωρου και ευθειες που ταυτιζονται με συνολα ευθειων (περιεχομενων σ ενα επιπεδο του χωρου). Ισως μια αξιωματικη αναπτυξη δημιουργουσε λιγωτερες δυσκολιες κατανοησης. Μια τετοια θεμελιωση περιεχεται στο (1). Το **(31) N.V. Efimov: Higher geometry**, Mir publishers, Moskow 1980, προχωρει παραπερα απο το (1) στην αξιωματικη μεθοδο αναπτυξης της προβολικης γεωμετριας. Το βιβλιο αυτο ειναι γενικωτερα ενδιαφερον και για τα αλλα κεφαλαια του, περι Ευκλειδειας, υπερβολικης καθως και την εισαγωγη του στην διαφορικη γεωμετρια.

§19 Η γραμμικη αλγεβρα νομιζω απλοποιει την παρουσιαση. Μια εξισου συντομη παραθεση του ιδιου σχεδον υλικου, αλλα πιο αυτοδυναμη απο την μερια της γραμμικης αλγεβρας ειναι η του **(32) W. Pejas: Projektive Geometrie**, Tutorial, Reihe Mathematik, Schwann, Duesseldorf 1975. Με την ιδια μεθοδο προχωρει και το **(33) P. Samuel: Projective geometry**, Springer 1988.

§20 Τα (31), (32) και (33) παριεχουν επιπλεον ενδιαφερουσες ιδιοτητες των τετραγωνικων καμπυλων. Δυστυχως ομως, σ αυτο το σημειο του μαθηματος το ακροατηριο αρχιζει να μειωνεται δραματικα (μετρον τελους σημειωσεων). Τελειωνοντας δεν μπορω να μην αναφερω το, πλουσιωτατο σε υλη και καλλιτεχνικα σχηματα, βιβλιο **(34)** του **M. Berger: Geometry I, II** (δυο τομοι), Universitext, Springer Verlag 1977, 1985. Λυσεις των ασκησεων του βιβλιου περιεχονται στο **(35) M. Berger, P. Pansu, J.P. Berry, X. Saint-Raiymont: Problems in Geometry**, Springer 1984.

πολυμαθιη νοον εχειν ου διδασκει. Ηρακλειτος 16

εδιζησαμην εμεωυτον . Ηρακλειτος 40.

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΠΑΡΙ ΠΑΜΦΙΛΟΥ
«ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» ΤΥΠΩΘΗΚΕ ΤΟΝ ΟΚΤΩΒΡΙΟ 1989
ΣΤΟ ΛΙΘΟΓΡΑΦΕΙΟ P&K OFFSET - PRINT
ΜΑΥΡΟΜΙΧΑΛΗ 105 - ΑΘΗΝΑ 11472 - ΤΗΛ. 3635221
ΚΑΙ Η ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ ΕΓΙΝΕ ΑΠΟ ΤΟΝ
ΕΥΘΥΜΙΟ ΑΡΧΟΝΤΟΥΛΑΚΗ