Εισαγωγή στην Επεξεργασία Σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier

2ο Μέρος

Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$(f_1 * f_2)(t) \qquad\qquad t = \tau + x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Συνεχής Μετασχηματισμός Fourier

Συνέλιξη

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)}$$

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Ο Παλμός δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

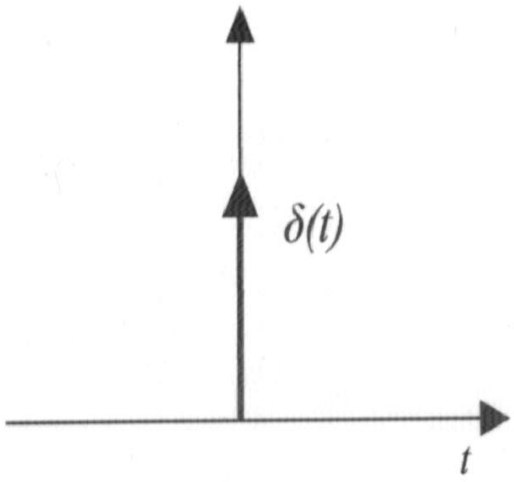
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1$$

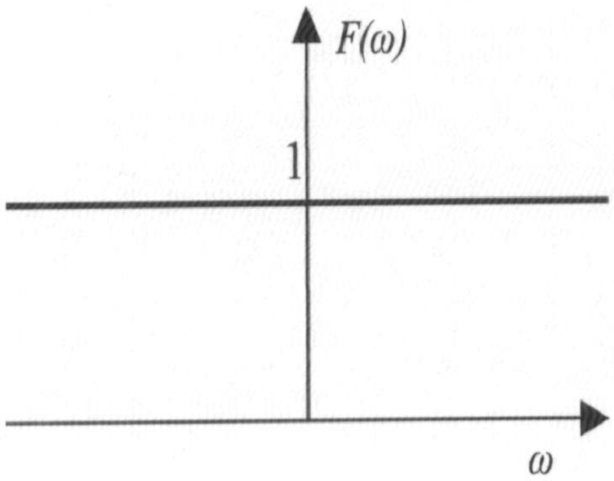
$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega$$

Ο Παλμός δ

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$





Ο Παλμός δ

$$f(t) = 1$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

Θεώρημα Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)\,d\omega$$

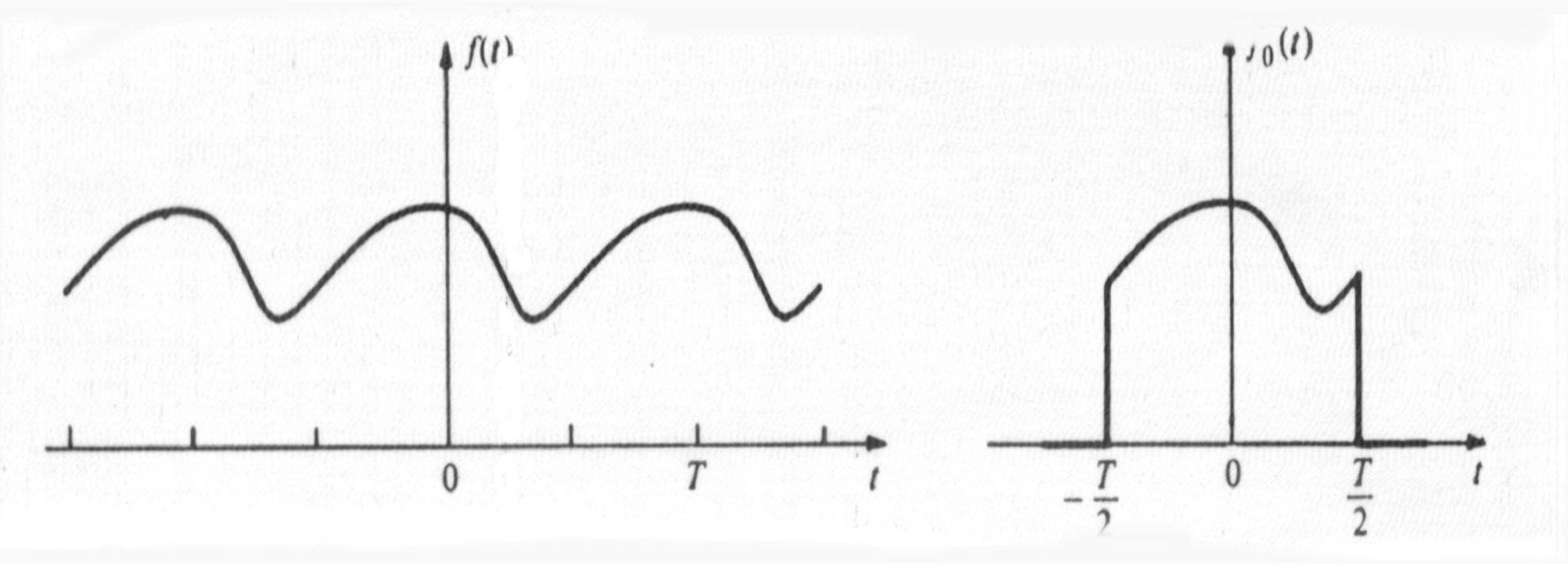
$$f_1(t) = f_2(t) = f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

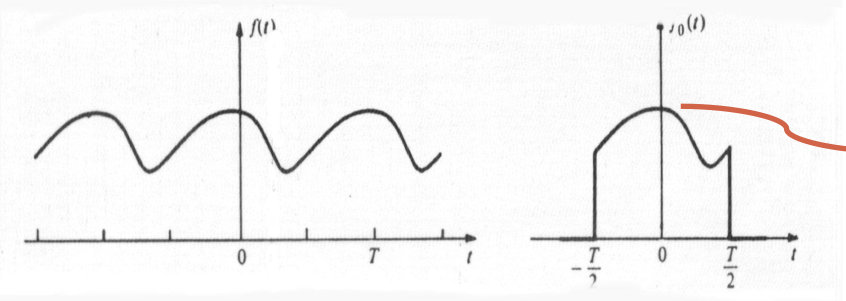
Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$



Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$



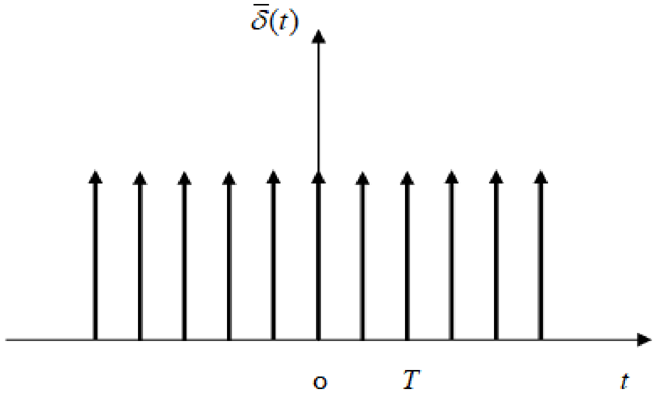
$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$$

Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT)$$

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t+nT)$$

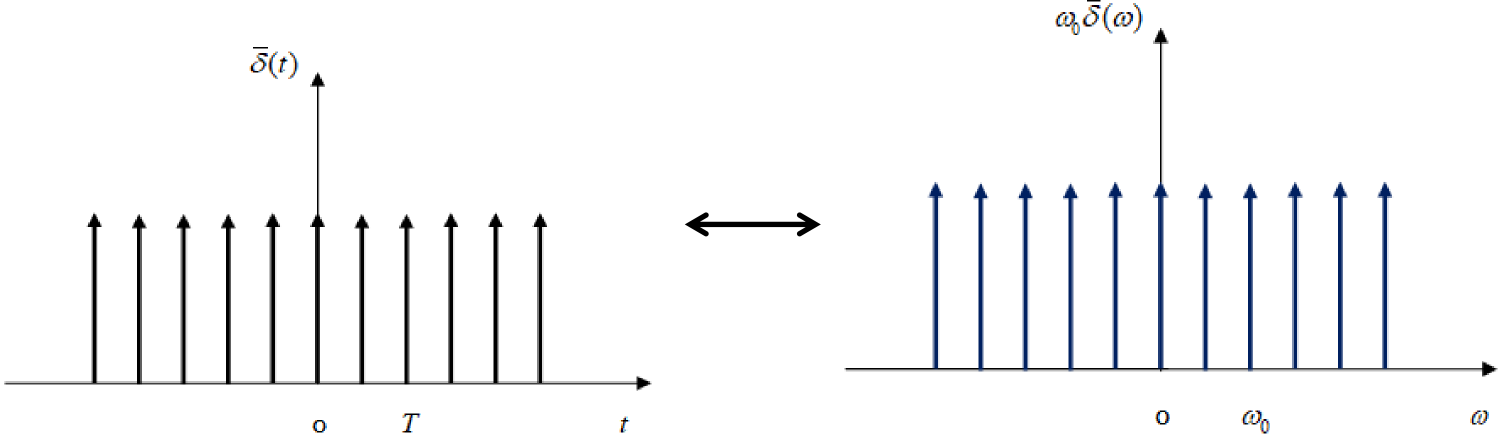
$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t)$$

Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$$



Περιοδικά Σήματα

$$\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier των δύο μερών $\quad f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t)$

$$F(\omega) = \omega_0 \bar{\delta}(\omega) \cdot F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) =$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0) \qquad f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a).$$

Περιοδικά Σήματα

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \alpha)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

$$e^{iat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$$

$$e^{in\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

Περιοδικά Σήματα

$$\mathfrak{I}^{-1}(F(\omega)) = \mathfrak{I}^{-1}[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)]$$

$$f(t) = \mathfrak{I}^{-1}(F(\omega)) = \mathfrak{I}^{-1}[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)] =$$

$$= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0)\frac{1}{2\pi}e^{in\omega_0 t}$$

$$a_n = \frac{1}{T}F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$

Περιοδικά Σήματα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Περιοδικά Σήματα

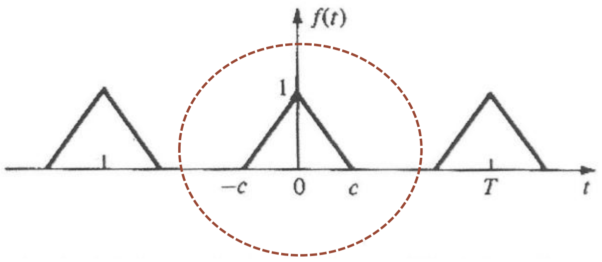
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT)$$

$$f_0(t) = q_c(t)$$

$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases}$$

$$q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4\sin^2(c\omega/2)}{c\omega^2}$$

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$$



Περιοδικά Σήματα

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t+nT) \qquad f_0(t)=q_c(t)$$

$$q_c(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{|t|}{c} & |t|<c \\ 0 & |t|>c \end{cases} \qquad q_c(t)\leftrightarrow F_0(\omega)=\frac{4\sin^2(c\omega/2)}{c\omega^2}$$

$$a_n=\frac{1}{T}F_0(n\omega_0) \qquad f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \qquad F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega-n\omega_0)$$