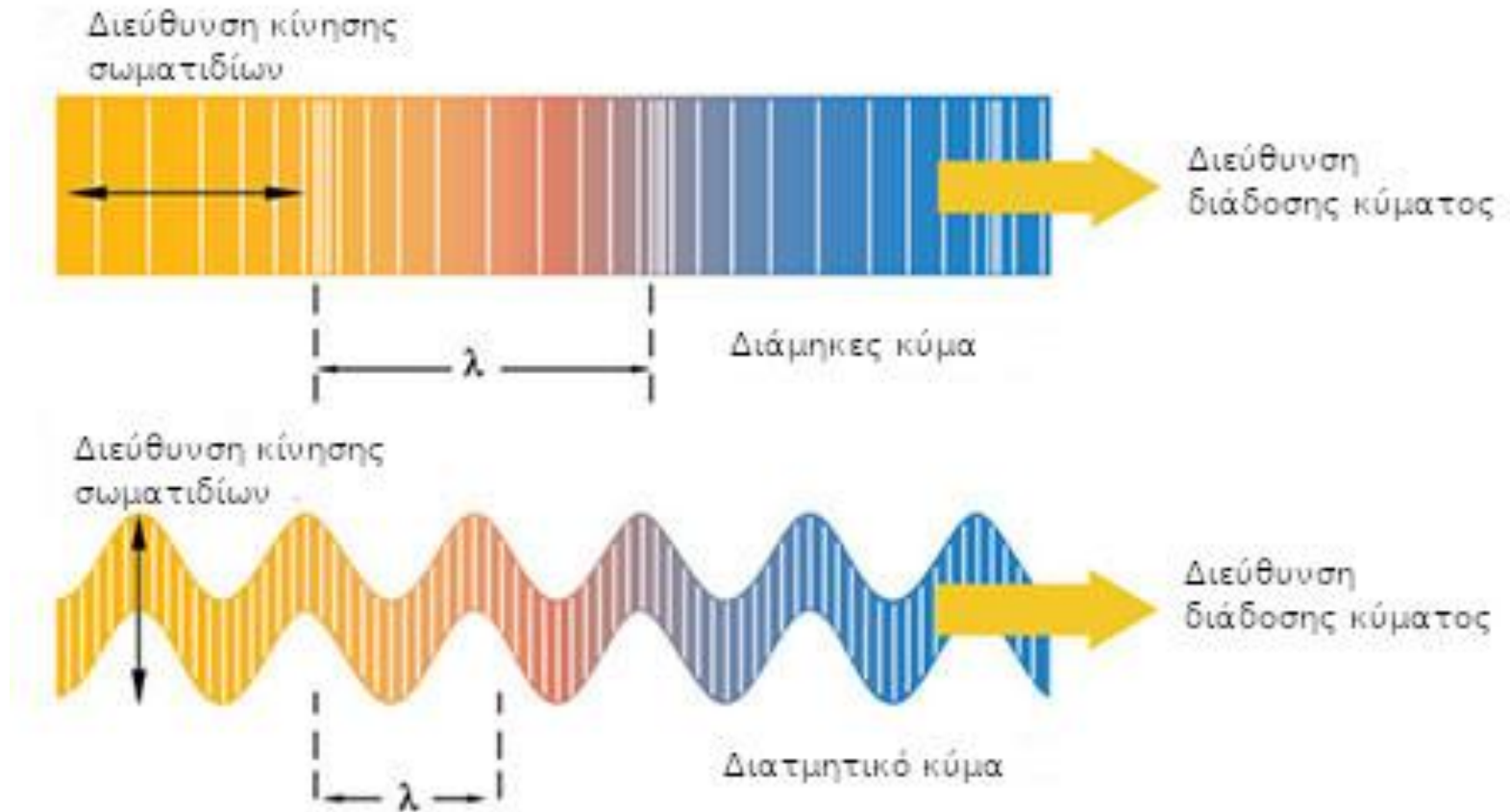


Διάδοση σε ελαστικούς
χώρους

Στοιχεία από τη
μηχανική του στερεού
σώματος

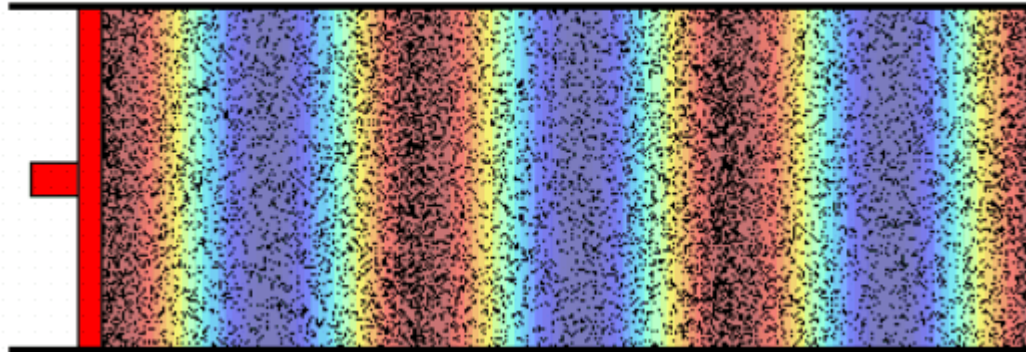
Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία

Διαμήκη και διατμητικά κύματα

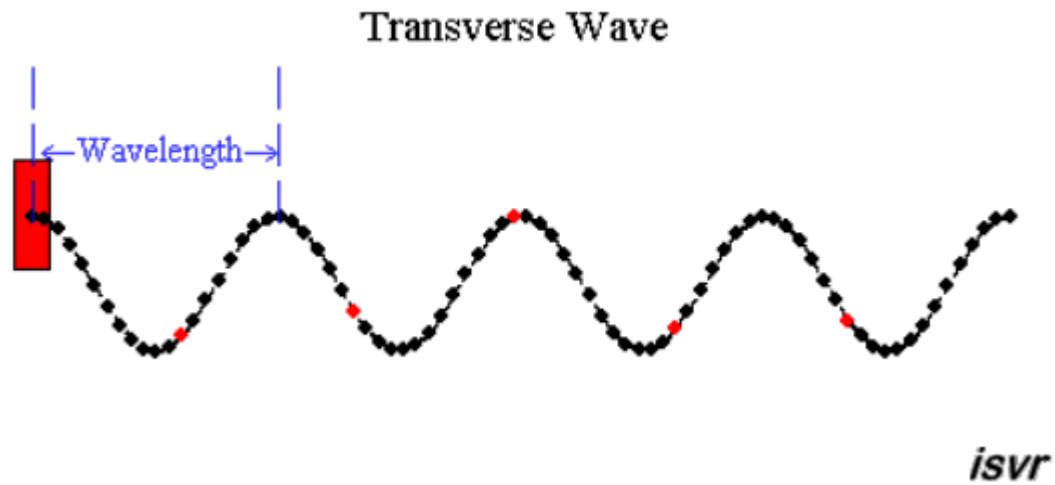


Διάμηκες κύμα

Longitudinal Wave



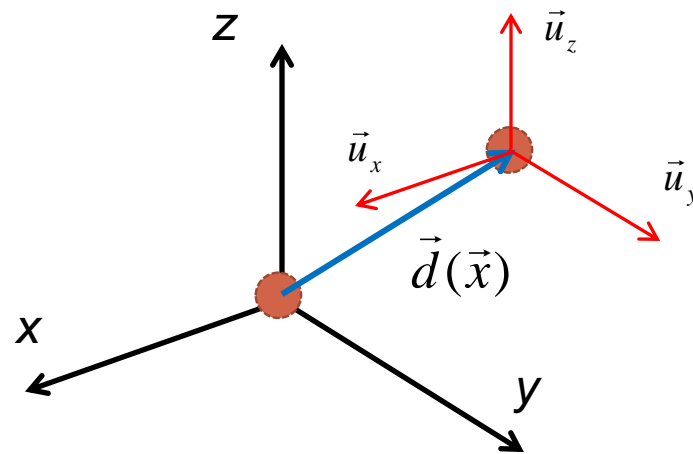
Εγκάρσιο κύμα



Ταχύτητα στοιχειωδών σωματιδίων και μετατόπιση

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

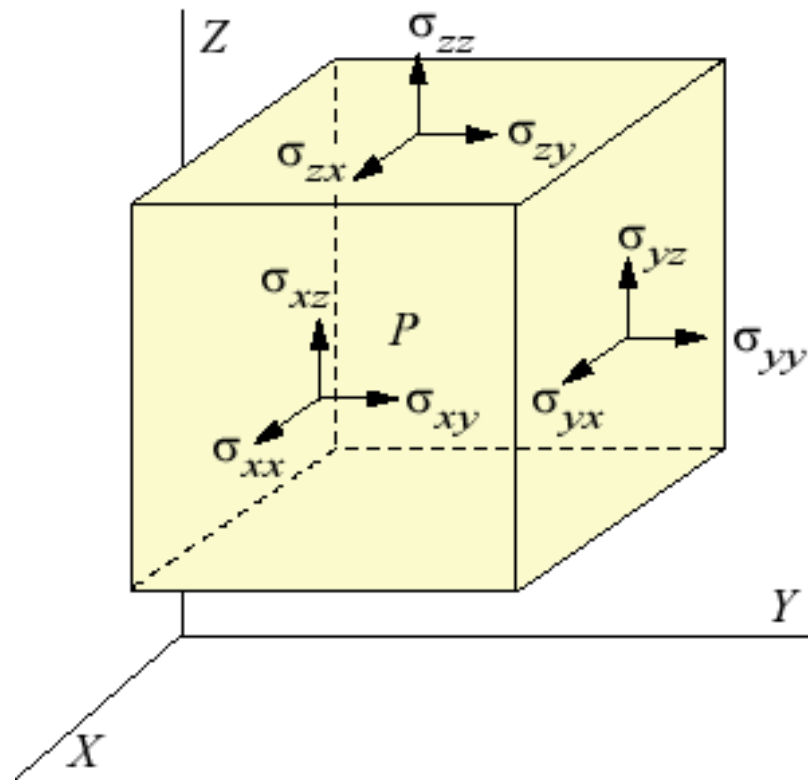
$$\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$$



Από τη Μηχανική των στερεών σωμάτων

Τάση σ - παραμόρφωση ε

Τάση = Δύναμη/Επιφάνεια



Από τη Μηχανική των στερεών σωμάτων

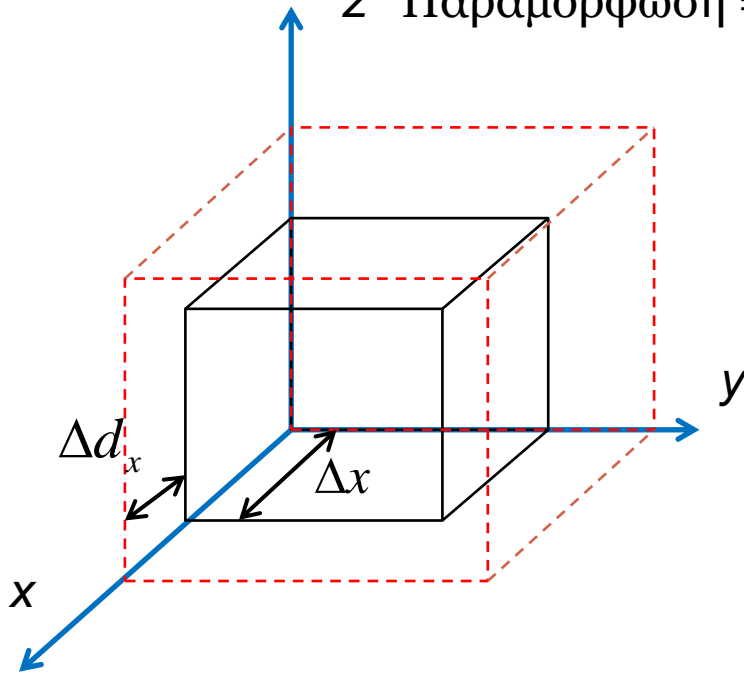
Τάση σ - παραμόρφωση ε

Τάση = Δύναμη/Επιφάνεια

Τανυστής τάσεων

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

z Παραμόρφωση = Μεταβολή μήκους/μονάδα μήκους



$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta d_x}{\Delta x} = \frac{\partial d_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial d_i}{\partial x_i}$$

$$i = x, y, z \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

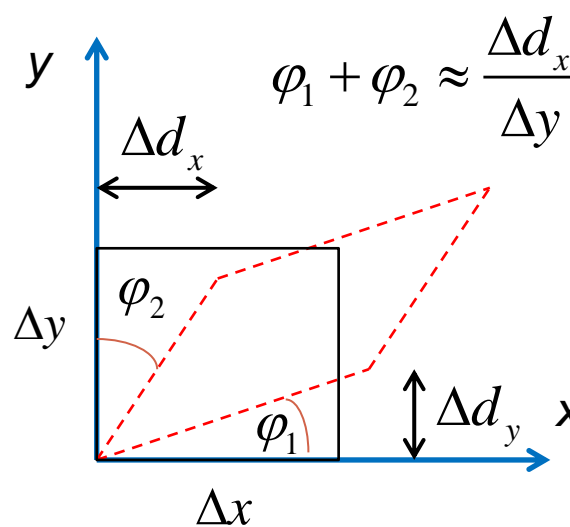
Παραμόρφωση = Μεταβολή μήκους/μονάδα μήκους

Διάτμηση

Γωνιακή παραμόρφωση $\varepsilon_{xy} = 1/2 (\varphi_1 + \varphi_2)$

Για φ_1, φ_2 μικρές $\varphi_1 \approx \tan \varphi_1, \varphi_2 \approx \tan \varphi_2$

$$\tan \varphi_1 \approx \frac{\Delta d_y}{\Delta x}, \quad \tan \varphi_2 \approx \frac{\Delta d_x}{\Delta y}$$



$\varphi_1 + \varphi_2 \approx \frac{\Delta d_x}{\Delta y} + \frac{\Delta d_y}{\Delta x} \quad \lim(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} + \frac{\partial d_x}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right)$$

Τανυστής παραμορφώσεων

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Από τη Μηχανική των σωμάτων

Τάση σ - παραμόρφωση ε

$$E \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Μέτρα ελαστικότητας

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V}$$

$$K = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

Μέτρο διόγκωσης

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Ταχύτητα ήχου στα ρευστά

Ρευστά μέσα

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$

$$\vec{u} = \nabla \Phi_u$$

Η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι «αστρόβιλο» μέγεθος

$$\vec{d} = \nabla \Phi$$

Δυναμικό μετατόπισης

Ρευστά μέσα

$$\vec{d} = \nabla \Phi$$

$$p_1 = -K \nabla \cdot \vec{d} \quad \text{Νόμος Hooke}$$

$$p_1 = -K \nabla^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Ρευστά μέσα

$$p_1 = -K \nabla \cdot \vec{d}$$

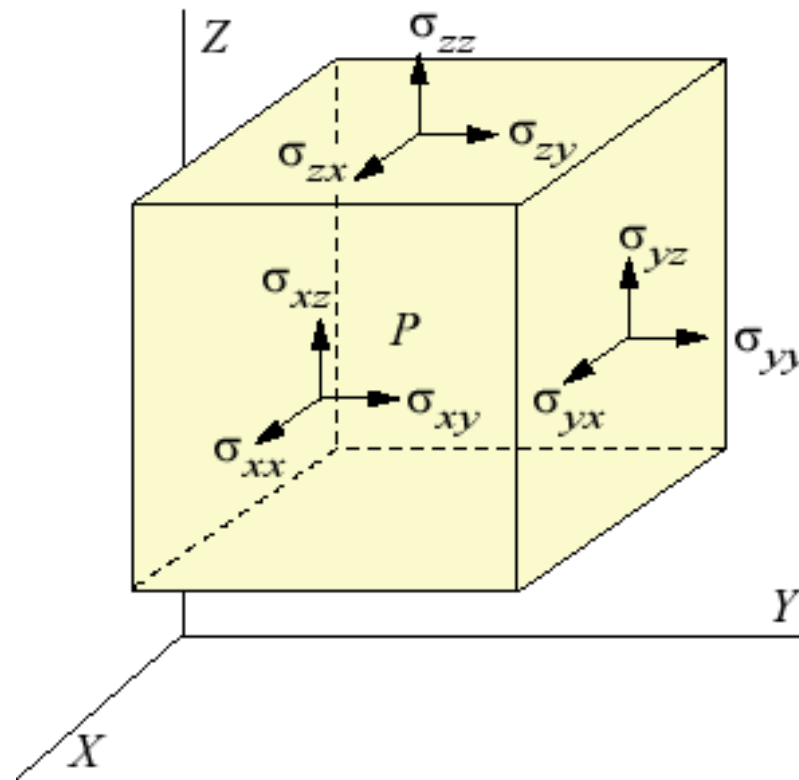
$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad K = \rho c^2$$

$$p_1 = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Στερεά μέσα τανυστής τάσεων

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Στερεά μέσα

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right)$$

Παραμόρφωση (strain)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Νόμος Hooke

\mathbf{C} :

Τανυστής ακαμψίας
(Stiffness Tensor)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Στερεά μέσα (ελαστικά και ισότροπα)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{Παραμόρφωση (strain)}$$

Σταθερες Lamé

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{Νόμος Hooke}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad \text{Ανηγγμένη διόγκωση}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right)$$

2^{ος} Νόμος Newton




$$\rho \frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$$

Στερεά μέσα

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{d})$$


Σεισμική εξίσωση

Περιστροφή :  $\nabla^2 (\nabla \times \vec{d}) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{d})}{\partial t^2} = 0$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Απόκλιση :  $\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{d}) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{d})}{\partial t^2} = 0$

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

Στερεά μέσα

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{d})$$

Σεισμική εξίσωση

$$\nabla \times \vec{d} \equiv \Theta$$

$$\nabla^2 \Theta - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0$$

Θ : Μεταβολή όγκου

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\nabla \cdot \vec{d} = \mathbf{R}$$

\mathbf{R} : Περιστροφική διαταραχή

$$\nabla^2 \mathbf{R} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = 0$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Θεώρημα του Helmholtz $\vec{d} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$

Φ Αστρόβιλο Δυναμικό

Ψ Διανυσματικό δυναμικό μηδενικής απόκλισης $\nabla \cdot \Psi = 0$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{d}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{d})$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \qquad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\mu \equiv G$$

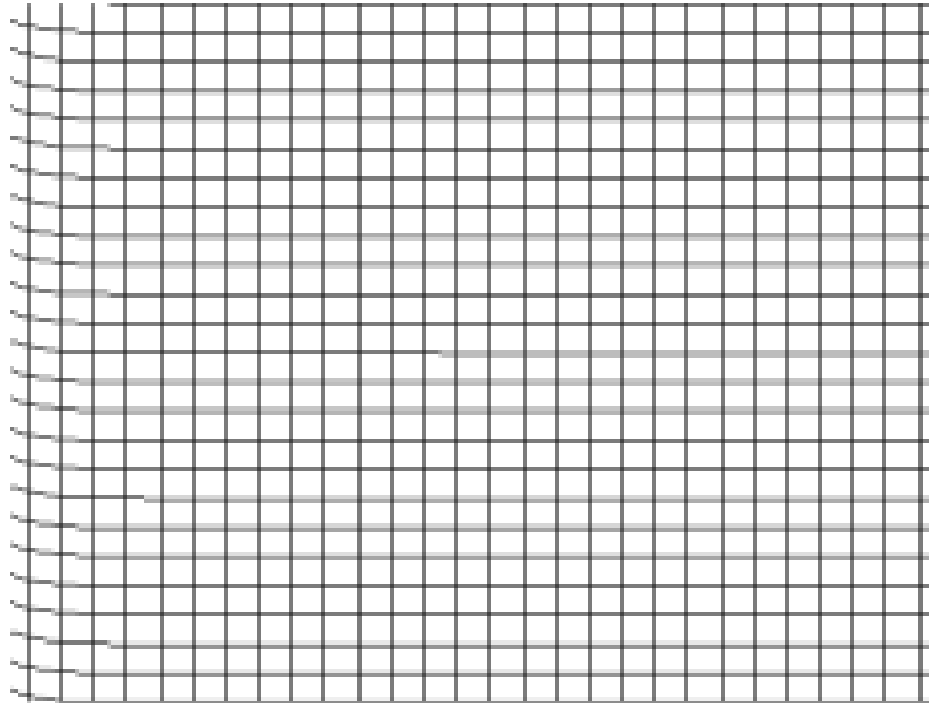
Μέτρο ελαστικότητας
(shear modulus)

$$K = \lambda + (2/3)\mu$$

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$\mu = 0, \quad K = \lambda, \quad c_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$$

Διάδοση επίπεδου διατμητικού κύματος



Προβολή διάδοσης σφαιρικού διατμητικού κύματος στο επίπεδο

