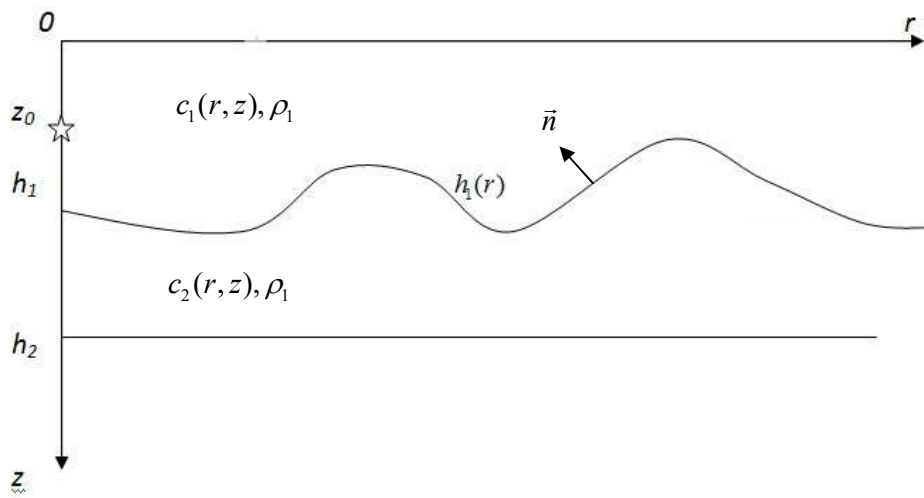


4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

4.1 Γενική περίπτωση

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε ένα περιβάλλον όπου οι παράμετροι που το χαρακτηρίζουν (ταχύτητα ήχου, γεωμετρία συνόρων) μεταβάλλονται και με την απόσταση r σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Ένα περιβάλλον της μορφής αυτής φαίνεται στο σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1 Ένα περιβάλλον μεταβαλλόμενων συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Θα θεωρήσουμε ότι το περιβάλλον ορίζεται από ένα επίπεδο σύνορο σε βάθος h_2 με οριακή συνθήκη ακλόνητου πυθμένα εκεί, ώστε να κάνουμε άμεση αναφορά στο κανονικό πρόβλημα "Sturm-Liouville". Η πυκνότητα θα θεωρηθεί ανεξάρτητη από την απόσταση, σταθερή σε κάθε στρώμα νερού (Σχήμα 4.1). Δεδομένης όμως της γεωμετρίας του συνόρου, το βάθος στο οποίο αλλάζει η πυκνότητα από ρ_1 σε ρ_2 εξαρτάται από την απόσταση. Επομένως γενικά μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση και του r ($\rho(r, z)$). Στο σχήμα 4.1 έχει αφαιρεθεί στο συμβολισμό η εξάρτηση ταχύτητας και πυκνότητας από την απόσταση αλλά στη γενική περίπτωση θα μπορούσε να είχε ληφθεί υπ' όψιν.

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος θα θεωρηθούν όπως και στα προηγούμενα προβλήματα (ελεύθερη επιφάνεια θάλασσας, συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και συνθήκες διεπιφάνειας). Προσοχή όμως: Στην διεπιφάνεια, ανάμεσα στο νερό και τον πυθμένα, η συνθήκη απαιτεί συνέχεια της κάθετης στο σύνορο συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων. Μπορούμε να δείξουμε ότι η κάθετη ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι και εδώ ανάλογη της κάθετης στο σύνορο παραγώγου της πίεσης.

Διατηρώντας το συμβολισμό για την ακουστική πίεση ως $p^{(1)}(r, z)$ για το νερό και $p^{(2)}(r, z)$ για την πίεση στον πυθμένα, η συνθήκη για την παράγωγο της πίεσης στη διεπιφάνεια, διατυπώνεται ως :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \vec{n}}(r, h_1(r)) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \vec{n}}(r, h_1(r))$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη διεπιφάνεια (Σχήμα 4.1).

Επισημαίνουμε ότι στη γενική περίπτωση που περιγράφουμε, λόγω της γεωμετρίας της διεπιφάνειας, η κάθετη παράγωγος δεν είναι παράγωγος ως προς το βάθος z όπως είχαμε δει στις προηγούμενες εφαρμογές .

Για μία σημειακή αρμονική πηγή σε βάθος z_0 , η κυματική εξίσωση γράφεται :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial z}(r, z) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(r, z) - \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z}(r, z) + k^2(r, z)p(r, z) = \\ = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r)\delta(z - z_0). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Σε κάθε απόσταση r , θα θεωρήσουμε την ομάδα ιδιοσυναρτήσεων του «τοπικού» προβλήματος βάθους:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(r, z)} \frac{\partial u_n}{\partial z}(r, z) \right] + \left[\frac{k^2(r, z)}{\rho(r, z)} - \frac{\lambda_n(r)}{\rho(r, z)} \right] u_n(r, z) = 0, \quad (4.1.2)$$

όπου

$$u_n(r, z) = \begin{cases} u_n^{(1)}(r, z) & \text{για } 0 \leq z \leq h_1(r) \\ u_n^{(2)}(r, z) & \text{για } h_1(r) \leq z \leq h_2 \end{cases}$$

$$k(r, z) = \frac{\omega}{c(r, z)} = \begin{cases} k^{(1)}(r, z) = \frac{\omega}{c_1(r, z)} & \text{για } 0 \leq z < h_1(r) \\ k^{(2)}(r, z) = \frac{\omega}{c_2(r, z)} & \text{για } h_1(r) < z \leq h_2 \end{cases}$$

$$\rho(r, z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z < h_1(r) \\ \rho_2 & \text{για } h_1(r) < z \leq h_2 \end{cases}$$

και

$$u_n^{(1)}(r, 0) = 0, \quad (4.1.3\alpha)$$

$$u_n^{(1)}(r, h_1(r)) = u_n^{(2)}(r, h_1(r)), \quad (4.1.3\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial z}(r, h_1(r)) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z}(r, h_1(r)) , \quad (4.1.3\gamma)$$

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z}(r, h_2) = 0 . \quad (4.1.3\delta)$$

Γνωρίζουμε ότι υπό τις ανωτέρω συνθήκες, το πρόβλημα βάθους είναι ένα κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville (με διεπιφάνεια), και ότι οι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα. Επιπλέον είναι πλήρεις στο $[0, h_2]$ οπότε μπορούμε να γράψουμε την λύση για την p της Helmholtz (ιδέ 4.1.1) ως μία συγκλίνουσα σειρά.

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r) u_n(r, z) . \quad (4.1.4)$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε τα εξής:

1. Η ακουστική πίεση δεν υπόκειται ακριβώς στις ίδιες συνθήκες στη διεπιφάνεια, σε σχέση με τις ιδιοσυναρτήσεις. Αυτό θα ισχύει μόνο εάν η διεπιφάνεια είναι επίπεδη και οριζόντια, οπότε η κάθετη σ' αυτήν παράγωγος είναι παράγωγος ως προς z . Επομένως μόνο στην περίπτωση αυτή εξασφαλίζεται απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς 4.1.4
2. Οι ιδιοσυναρτήσεις ορίζονται σε κάθε r ως συναρτήσεις του z . Όμως στον συμβολισμό που ακολουθήσαμε φαίνονται ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Στην πραγματικότητα θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι οι ιδιοσυναρτήσεις ορίζονται συνεχώς για κάθε r

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό τη συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων που είναι:

$$\int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r, z)} u_n(r, z) u_m(r, z) dz = \delta_{nm} \quad (4.1.5)$$

Θα θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι στο πεδίο ορισμού του προβλήματος δεν υπάρχει πηγή, οπότε αντικατάσταση της 4.1.4 στην ομογενή της 4.1.1 και χρήση της 4.1.2 δίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_n}{dr^2} u_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\phi_n}{dr} \frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \phi_n}{\partial r} u_n + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \phi_n = 0 . \quad (4.1.6)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με $\frac{1}{\rho(r, z)} u_m(r, z)$ και ολοκληρώσουμε από 0 έως h_2 παίρνουμε:

$$\frac{d^2 \phi_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_m}{dr} + \lambda_m(r) \phi_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn}(r) \phi_n + B_{mn}(r) \left[\frac{\phi_n}{r} + 2 \frac{d\phi_n}{dr} \right] \right\} , \quad (4.1.7)$$

όπου

$$A_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial^2 u_n(r,z)}{\partial r^2} dz \quad \text{και} \quad (4.1.8)$$

$$B_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(r,z)} u_m(r,z) \frac{\partial u_n(r,z)}{\partial r} dz \quad . \quad (4.1.9)$$

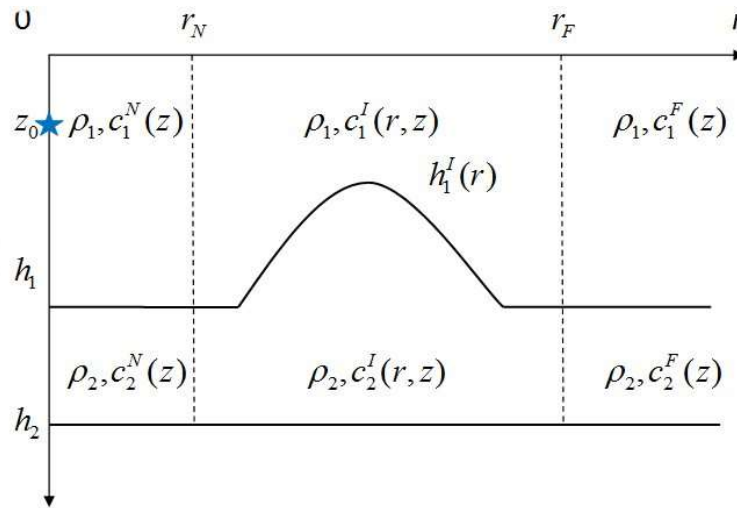
Οι συντελεστές A_{mn} και B_{mn} καλούνται "συντελεστές σύζευξης" (coupling coefficients) και εκφράζουν το βαθμό αλληλεξάρτησης τις ακουστικής διάδοσης μέσω των διαφόρων ιδιομορφών. Με άλλα λόγια μας δίνουν τον βαθμό που η ιδιομορφή μιας τάξης m εξαρτάται από την ιδιομορφή τάξης n , κάτι που δεν είχε νόημα στις περιπτώσεις διάδοσης του ήχου σε περιβάλλοντα σταθερών συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων, όπου η διάδοση της ακουστικής ενέργειας σε κάθε ιδιομορφή ήταν ανεξάρτητη της διάδοσης σε μια άλλη ιδιομορφή. Στη παρούσα περίπτωση, η διάδοση μιας ιδιομορφής (τάξης m) εξαρτάται από τη διάδοση όλων των υπόλοιπων ιδιομορφών. Οι ιδιομορφές «ανταλλάζουν» ενέργεια καθώς διαδίδονται σε περιβάλλοντα με διαφορετικές παραμέτρους ή γεωμετρία.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι εξετάσαμε το πρόβλημα στην απλή περίπτωση που το πεδίο ορισμού δεν έχει πηγή. Η εισαγωγή της πηγής στο πρόβλημα και η αναζήτηση της αντίστοιχης συνάρτησης Green περιπλέκει ακόμη περισσότερο τα πράγματα, αλλά η φιλοσοφία επίλυσης με την εισαγωγή των συντελεστών σύζευξης παραμένει η ίδια. Ωστόσο το πρόβλημα στην γενική του περίπτωση αυτό δεν είναι εύκολο να λυθεί. Παρά το γεγονός ότι έχουν προταθεί μέθοδοι για την απλοποίησή του, φαίνεται ότι είμαστε ακόμη μακριά από την επίλυση του προβλήματος σε περιβάλλοντα με γενική γεωμετρία. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε κάποια περιβάλλοντα ειδικής μορφής και να πάρουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις της πίεσης.

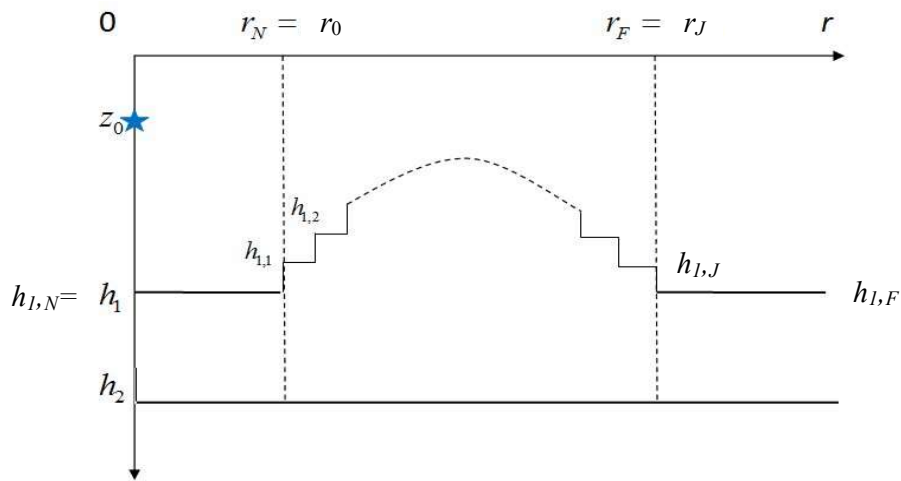
4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία

Ας θεωρήσουμε το περιβάλλον του επόμενου σχήματος 4.2. Χαρακτηρίζεται από μια τοπική ανομοιομορφία, έξω από την οποία όλες οι παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται σταθερές με την απόσταση.

Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τρεις υποπεριοχές για τη μελέτη του προβλήματος: Την περιοχή "κοντά" στην πηγή (δείκτης N από το Near) την περιοχή της ανομοιομορφίας (I από το Intermediate) και την περιοχή μακράν της ανομοιομορφίας (F από το Far). Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια και τον πυθμένα παραμένουν οι ίδιες : (ελεύθερη επιφάνεια-ακλόνητος πυθμένας) ενώ ισχύει και πάλι η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στην διεπιφάνεια ($h_I(r)$). Την ενδιάμεση υποπεριοχή χωρίζουμε σε κυλινδρικούς δακτυλίους που ορίζονται από ακτίνες r_j όπως στο σχήμα 4.3 . Οι δακτύλιοι είναι συνολικά J τον αριθμό.



Σχήμα 4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία



Σχήμα 4.3: Διακριτοποίηση της ανομοιογένειας ανάμεσα στο r_N και το r_F .

Σε κάθε έναν από τους δακτυλίους οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται μόνο με το βάθος. Η γενική διαφορική εξίσωση και οι συνθήκες που διέπουν το φαινόμενο είναι ταυτόσημες με εκείνες του προηγούμενου προβλήματος με την παρατήρηση ότι οι παράγωγοι που είναι κάθετες στην διεπιφάνεια χωρίζονται πλέον σε παραγώγους ως προς το βάθος και την απόσταση.

Σε κάθε δακτύλιο με δείκτη j ορίζουμε ένα πρόβλημα "βάθους"

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_j(z)} \frac{du_{n,j}}{\partial z}(z) \right] + \left[\frac{k_j^2(z)}{\rho_j(z)} - \frac{\lambda_{n,j}}{\rho_j(z)} \right] u_{n,j}(z) = 0, \quad (4.1.10)$$

όπου $u_{n,j}(z)$ ορίζεται με δείκτες (1) και (2) σε κάθε λωρίδα (νερό, ίζημα) και το ίδιο ισχύει για τα k_j και τα $\rho_j(z)$:

Οι συνθήκες ορίων και οριζόντιας διεπιφάνειας είναι :

$$u_{n,j}^{(1)}(0) = 0, \quad (4.1.11\alpha)$$

$$u_{n,j}^{(1)}(h_{1,j}) = u_{n,j}^{(2)}(h_{1,j}), \quad (4.1.11\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_{1,j}} \frac{du_{n,j}^{(1)}}{dz}(h_{1,j}) = \frac{1}{\rho_{2,j}} \frac{du_{n,j}^{(2)}}{dz}(h_{1,j}), \quad (4.1.11\gamma)$$

$$\frac{du_{n,j}^{(2)}}{dz}(h_2) = 0. \quad (4.1.11\delta)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις $u_{n,j}(z)$ είναι ορθοκανονικές και επομένως κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0, h_2]$ με ίδιες οριακές συνθήκες αναπτύσσεται σε μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά:

$$p_j(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,j}(r) u_{n,j}(z). \quad (4.1.12)$$

Προσοχή ότι στο πρόβλημα με τη νέα μορφή διεπιφάνειας, οι συνθήκες στα οριζόντια τμήματα της διεπιφάνειας είναι ίδιες με εκείνες της πίεσης.

Όμως καταλήξαμε έτσι στον ορισμό συναρτήσεων p_j , $j = N, 1, 2, \dots, J, F$ (αν περιλάβουμε τους χώρους του εγγύς και πέραν πεδίου) οι οποίες θα πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους στα τεχνητά σύνορα r_j ώστε να έχει το πρόβλημα μοναδική λύση. Οι συνθήκες συνέχειας της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στις κατακόρυφες διεπιφάνειες που ορίζονται στις αποστάσεις r_j θα μας δώσουν τις απαραίτητες συνθήκες γι' αυτό:

$$p_j(r_j, z) = p_{j+1}(r_j, z), \quad (4.1.13\alpha)$$

$$\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial r}(r_j, z) = \frac{1}{\rho_{j+1}} \frac{\partial p_{j+1}}{\partial r}(r_j, z). \quad (4.1.13\beta)$$

Όσο για τις συναρτήσεις $\varphi_{n,j}(r)$ εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι σε κάθε υποχωρίο $j=1, 2, \dots, j+1, F$ υπακούουν στην διαφορική εξίσωση τύπου Bessel¹⁰:

$$\frac{d^2 \phi_{n,j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{n,j}}{dr} + \lambda_{n,j} \phi_{n,j} = 0, \quad (4.1.14)$$

που έχει γενική λύση εκφρασμένη μέσω συναρτήσεων Hankel την :

$$\phi_{n,j}(r) = A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) + B_{n,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r). \quad (4.1.15)$$

¹⁰ Προσέξτε ότι σε κάθε εσωτερικό δακτύλιο η πίεση υπόκειται σε μία ομογενή εξίσωση Helmholtz καθώς δεν υπάρχει πηγή στο πεδίο ορισμού του προβλήματος.

Οι συντελεστές $A_{n,j}$ και $B_{n,j}$ θα προκύψουν από τις συνθήκες συνεργασίας στις κατακόρυφες διεπιφάνειες που ορίζονται για $r = r_j$ (4.1.13α και 4.1.13β).

Από φυσικής πλευράς οι δύο όροι στην 4.1.15 εκφράζουν ενέργεια που οδεύει προς τα αυξανόμενα και μειούμενα r αντίστοιχα.

Για την περίπτωση που $j=F(=J+I)$ γνωρίζουμε από τη συνθήκη ακτινοβολίας ότι $B_{n,F}=0$ καθώς δεν υπάρχει ενέργεια που να επανακτινοβολείται από το άπειρο και να οδεύει προς την αρχή των αξόνων.

Επομένως θα έχουμε στον εξωτερικό δακτύλιο :

$$\varphi_{n,F}(r) = A_{n,F} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}} r) \quad (4.15a)$$

Απομένει η μελέτη της συνθήκης πηγής: στο χωρίο που ορίζεται από $0 < r < r_1 = r_N$ και στο οποίο περιλαμβάνεται η ακουστική πηγή. Στο χωρίο αυτό μπορούμε να χωρίσουμε τη λύση μας σε δύο όρους. Ο πρώτος όρος αφορά τη λύση για το πρόβλημά μας όταν δεν υπάρχει η ανομοιογένεια (πεδίο ακτινοβολίας p_r) και ο δεύτερος αφορά τη λύση για το πρόβλημα που προκύπτει λόγω της ανομοιομορφίας (πεδίο περίθλασης p_d) γράφοντας

$$p(r, z) = p_r(r, z) + p_d(r, z). \quad (4.1.16)$$

Η πληροφορία μας για την πηγή ενσωματώνεται στον πρώτο όρο (πίεση ακτινοβολίας) ενώ ο δεύτερος όρος «διορθώνει» την ακουστική πίεση λόγω της ύπαρξης της ανομοιογένειας. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση στην οποία υπακούει η p_r είναι η μη ομογενής Helmholtz με τις παραμέτρους του μέσου (1) ενώ η p_d υπακούει σε μια ομογενή Helmholtz. Οι οριακές συνθήκες στις οριζόντιες διαχωριστικές επιφάνειες του πρώτου χωρίου είναι ίδιες και για τα δύο προβλήματα τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς την ύπαρξη του όρου διέγερσης από την πηγή για το πεδίο ακτινοβολίας και την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld που δεν υφίσταται για το πεδίο περίθλασης. Το πρόβλημα επομένως για το πεδίο ακτινοβολίας ανάγεται σε ένα από τα γνωστά προβλήματα που έχουμε δει μέχρι τώρα και επομένως η λύση του είναι γνωστής μορφής (δείτε τη σχέση 3.3.40, που αναφέρεται σε πρόβλημα με οριζόντια διεπιφάνεια

$$p_r(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,N}(z_0) u_{n,N}(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}} r). \quad (4.1.17)$$

Για το πεδίο περίθλασης αρκεί να διαπιστώσουμε ότι αναπαράγουμε ένα από τα προβλήματα που διατυπώσαμε σε καθένα από τους κατακόρυφους εσωτερικούς δακτυλίους του χωρίου, με την διαφορά ότι καθώς το $r=0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού, η λύση για την συνάρτηση φ_N θα πρέπει να είναι αναλυτική και στο σημείο αυτό. Από την θεωρία των συναρτήσεων Bessel γνωρίζουμε ότι για να συμβεί αυτό η λύση της αντίστοιχης εξίσωσης Bessel (4.1.14 για $i= N$) πρέπει να εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους $J_0(x)$. Παίρνομε λοιπόν :

$$p_d(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,N} u_{n,N}(z) J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}} r). \quad (4.1.18)$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές A_n, B_n και C_n σε όλα τα στρώματα. Διαπιστώνουμε ότι δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός τους εάν δεν θεωρήσουμε πεπερασμένο αριθμό όρων στις σειρές. Ευτυχώς τα θεωρήματα αναπαράστασης που εξασφαλίζουν την σύγκλιση της σειράς μας επιτρέπουν να διατηρήσουμε ένα μεγάλο αριθμό όρων, έστω M , σε όλες τις σειρές. Λογαριάζοντας τώρα τους αγνώστους του προβλήματος διαπιστώνουμε ότι αυτοί είναι $2 \times M \times (J+1)$, όπως προκύπτει εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε M αγνώστους ($C_{n,N}$) για το εγγύς πεδίο $2 \times M \times J$ αγνώστους ($A_{n,j}, B_{n,j}$) στα J χωρία διαμερισμού της ανομοιογένειας και M αγνώστους ($A_{n,F}$) στο μακρινό πεδίο.

Ο υπολογισμός των αγνώστων θα γίνει μέσω των συνθηκών συνεργασίας στα κατακόρυφα "τεχνητά" σύνορα των ειδικών χωρίων διαμερισμού.

Η φυσική επιβάλλει συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στις κατακόρυφες τεχνητές διεπιφάνειες, όπως ακριβώς απαιτείται στις οριζόντιες. Επομένως οι συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν στις επιφάνειες $r=r_j$ είναι οι 4.1.13α και 4.1.13β

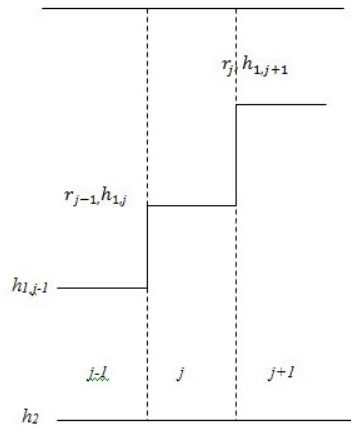
Υπενθυμίζουμε τις εκφράσεις για τις πιέσεις στα διάφορα χωρία, με βάση τις σχέσεις 4.12, 4.15-4.18 και την παρατήρηση ότι κρατάμε πεπερασμένους όρους M στη σειρά.

$$p_N(r, z) = \frac{1}{4\rho_1} \sum_{n=1}^M u_{n,N}(z_0) u_{n,N}(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) + \sum_{n=1}^M C_{n,N} J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) u_{n,N}(z), \quad (4.1.19)$$

$$p_j(r, z) = \sum_{n=1}^M \left\{ A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) + B_{n,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) \right\} u_{n,j}(z), \quad j=1, 2, \dots, J, \quad (4.1.20)$$

$$p_F(r, z) = \sum_{n=1}^M A_{n,F} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}} r) u_{n,F}(z). \quad (4.1.21)$$

Οι συνθήκες 4.1.13 εφαρμοζόμενες χωρίς επεξεργασία δεν μπορούν να δώσουν τις απαραίτητες εξισώσεις για να υπολογιστούν οι άγνωστοι του προβλήματος.



Σχήμα 4.4 . Λεπτομέρεια του διαχωρισμού στα εσωτερικά πεδία

Για να διατυπωθεί ο ανάλογος αριθμός εξισώσεων και να καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους του προβλήματος, επιβάλλεται η αξιοποίηση της συνθήκης ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων που γίνεται με τον γνωστό τρόπο δηλαδή με πολλαπλασιασμό των σχέσεων 4.1.13 με $\frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z)$ και $u_{m,j}(z)$ αντίστοιχα και ολοκλήρωση από 0 έως h_2 . Οι όροι για τους οποίους $m \neq n$ θα μηδενιστούν στο αριστερό μέρος και θα παραμείνουν εκφράσεις της μορφής :

$$\begin{aligned} & A_{m,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{m,j}} r_j) + B_{m,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{m,j}} r_j) = \\ & = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} \sum_{n=1}^M \left\{ A_{n,j+1} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}} r_j) + B_{n,j+1} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j+1}} r_j) \right\} u_{n,j+1}(z) u_{m,j}(z) dz, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

και αντίστοιχες με παραγώγους των συναρτήσεων Hankel. Μπορούμε τώρα να κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων των Hankel:

$$\frac{dH_0^{(\nu)}(\kappa r)}{dr} = -\kappa H_1^{(\nu)}(\kappa r), \quad (4.1.23)$$

$$H_1^{(1)}(\kappa r) = -iH_0^{(1)}(\kappa r) \quad \text{και} \quad H_1^{(2)}(\kappa r) = iH_0^{(2)}(\kappa r) \quad (4.1.24)$$

και να χρησιμοποιήσουμε τις αντικαταστάσεις:

$$C_{1mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz, \quad (4.1.25)$$

$$C_{2mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_{j+1}} u_{m,j}(z) u_{n,j+1}(z) dz. \quad (4.1.26)$$

για να απλοποιήσουμε τις σχέσεις.

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι καταλήγουμε σε $2 \times M \times (J+1)$ εξισώσεις της μορφής 4.1.22 και της αντίστοιχης με τις παραγώγους, που απαρτίζουν ένα γραμμικό σύστημα, και η επίλυση του οποίου μας δίνει τους αγνώστους συντελεστές.

Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στο εν λόγω πρόβλημα. Θα σημειώσουμε μόνο ότι οι συντελεστές C_{1mn} και C_{2mn} ονομάζονται **συντελεστές σύζευξης** (coupling coefficients) (δείτε αντίστοιχους συντελεστές στις σχέσεις 4.1.8 και 4.1.9), εκφράζουν την ανταλλαγή ενέργειας κατά την διάδοση του ήχου στις διάφορες κυματομορφές, η δε μέθοδος που αναπτύξαμε ονομάζεται μέθοδος "συζευγμένων ιδιομορφών" και το χαρακτηριστικό της είναι ότι δεν βασίζεται σε καμία παραδοχή ως προς την μορφή της εξίσωσης και το πρόβλημα που επιλύει. Τα μόνα ερωτηματικά, αφορούν την σύγκλιση της μεθόδου όσον αφορά τη διακριτοποίηση του χωρίου και μόνο. Να σημειώσουμε ωστόσο ότι είναι υπολογιστικά απαιτητική, ιδιαίτερα όταν η ακρίβεια που ζητάμε επιβάλλει τη θεώρηση μεγάλης τάξης ιδιομορφών στις αναπαραστάσεις (υψηλές συχνότητες μεγάλα βάθη). Επίσης θα πρέπει να πούμε ότι εντελώς αντίστοιχα μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος σε

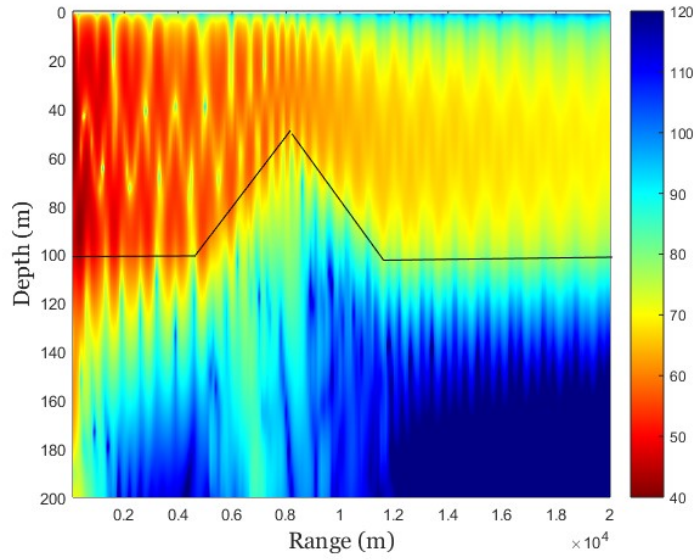
περιβάλλον με ημιάπειρο πυθμένα, οπότε οι σειρές που αναπαριστούν την ακουστική πίεση έχουν έτσι κι αλλιώς πεπερασμένους όρους, όσες είναι και οι κανονικές ιδιομορφές του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή βέβαια θα πρέπει ο αριθμός των διαδιδόμενων ιδιομορφών σε κάθε τμήμα του περιβάλλοντος (δακτύλιο) να είναι ίδιος. Σε περιπτώσεις που αυτό δεν ισχύει (π.χ. έντονη ρήχωση που δίνει μικρό αριθμό διαδιδόμενων ιδιομορφών στο «ρηχό» τμήμα του κυματοδηγού), το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με θεώρηση τεχνητού συνόρου σε μεγάλο βάθος που αυξάνει τεχνητά τον αριθμό των διαδιδόμενων ιδιομορφών σε όλα τα τμήματα χωρίς να επιφέρει ουσιαστική αλλοίωση στο επαγόμενο αποτέλεσμα, καθώς ισοδυναμεί στην πραγματικότητα με συνυπολογισμό του ουσιώδους τμήματος του συνεχούς φάσματος των ιδιοτιμών/ιδιοσυναρτήσεων στην αναπαράσταση της ακουστικής πίεσης. Έτσι, ως μέγιστος αριθμός διαδιδόμενων ιδιομορφών M για την εφαρμογή της μεθόδου, σε όλους τους δακτυλίους, λαμβάνεται υπ' όψιν ο αριθμός των πραγματικών κανονικών ιδιομορφών που παρατηρείται στο βαθύτερο τμήμα του περιβάλλοντος. Περισσότερη ανάλυση, ξεφεύγει από τους στόχους του μαθήματος και δεν θα επεκταθούμε στο σημείο αυτό.

Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζουμε διαγράμματα απωλειών διάδοσης για τρία χαρακτηριστικά περιβάλλοντα με τοπική ανομοιογένεια.

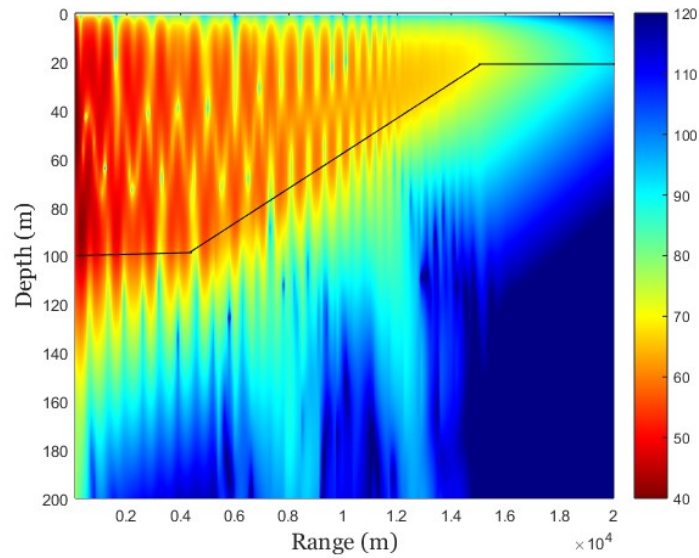
Το πρώτο (ΠΕ1 – Σχήμα 4.5) αναφέρεται σε περιβάλλον ρηχής θάλασσας 100 μέτρων βάθους. Σε απόσταση 5 km από την πηγή που βρίσκεται σε βάθος 30 m, ξεκινά ανύψωση του πυθμένα που περιγράφεται ως γραμμική και φτάνει σε κορυφή που βρίσκεται σε βάθος 50 μέτρων και στη συνέχεια υπάρχει πτώση του πυθμένα μέχρι το βάθος των 100 μέτρων σε απόσταση 12 km. Τα αποτελέσματα δίδονται για συχνότητα 50 Hz έχοντας διαμερίσει την περιοχή της ανύψωσης σε 20 δακτυλίους ίσου πάχους. Η ταχύτητα διάδοσης στο νερό είναι 1500 m/sec και στον πυθμένα 1700 m/sec ενώ οι αντίστοιχες πυκνότητες είναι 1000 και 1300 kg/m³.

Το δεύτερο (ΠΕ2 – Σχήμα 4.6) αναφέρεται σε περιβάλλον με ίδια περιβαλλοντικά δεδομένα και συχνότητα πηγής όπως το ΠΕ1 αλλά με τη διαφορά ότι η τοπική ανομοιογένεια αφορά ανύψωση του πυθμένα που ξεκινά στα 5 km, φτάνει σε βάθος 20 μέτρων στα 15 km και μετά συνεχίζεται με σταθερό βάθος 50 μέτρων (ρήχωση). Και αυτή η περίπτωση όπως έχει ήδη αναφερθεί αντιμετωπίζεται με την παρουσιασθείσα μέθοδο.

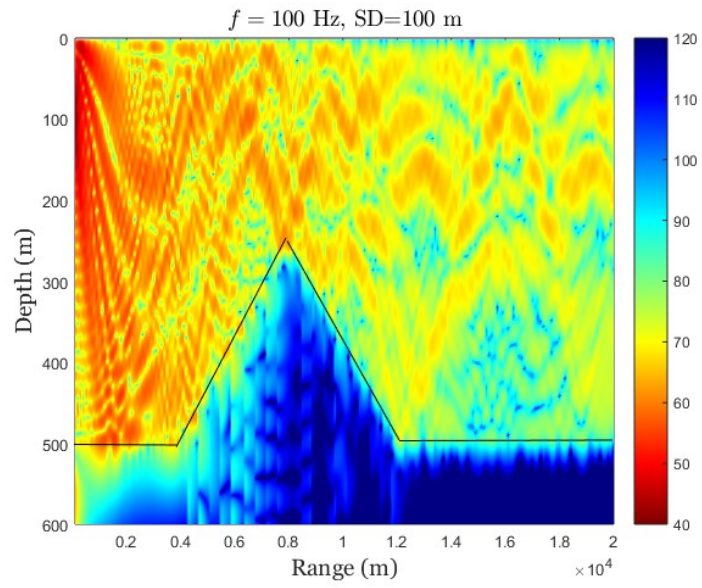
Το τρίτο περιβάλλον (ΠΕ3 – Σχήμα 4.7) αναφέρεται σε βαθύτερη θάλασσα, αρχικού βάθους 500 μέτρων. Μετά από 4 km ο πυθμένας ανυψώνεται γραμμικά μέχρι βάθους 250 m σε απόσταση 8 km και στη συνέχεια βυθίζεται μέχρι το βάθος των 500 μέτρων σε απόσταση 12 km. Στη συνέχεια το βάθος παραμένει 500 m. Η πηγή εδώ βρίσκεται σε βάθος 100 μέτρων και η συχνότητα της είναι 100 Hz. Το προφίλ της ταχύτητας στο νερό είναι διγραμμικό. Ξεκινάει με τιμή 1500 m/sec στην επιφάνεια και έχει ελάχιστο 1490 m/sec σε βάθος 150 μέτρων. Στη συνέχεια αυξάνει μέχρι την τιμή των 1530 m/sec στο βάθος των 500 m, ενώ ο ίδιος νόμος μεταβολής ισχύει και στην περιοχή της ανύψωσης. Η ταχύτητα διάδοσης στον πυθμένα είναι 1650 m/sec και η πυκνότητα 1250 kg/m³. Ο διαμερισμός της ανύψωσης είναι σε 20 δακτυλίους ίσου πάχους.



Σχήμα 4.5 Απώλειες διάδοσης σε περιβάλλον τοπικής ανύψωσης πυθμένα ΠΕ1.



Σχήμα 4.6 Απώλειες διάδοσης σε περιβάλλον ρήχωσης ΠΕ2



Σχήμα 4.7 Απώλειες διάδοσης σε περιβάλλον τοπικής ανύψωσης πυθμένα ΠΕ3