

## 5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

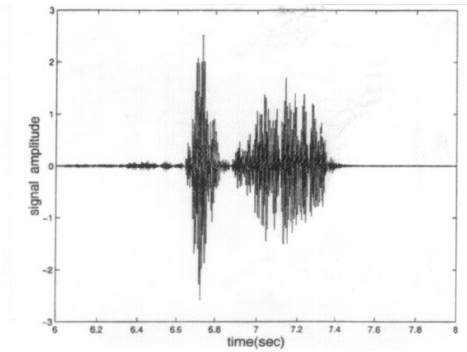
Τα ακουστικά σήματα που χρησιμοποιούνται στο θαλάσσιο περιβάλλον ποικίλουν ανάλογα με την εφαρμογή και τις απαιτήσεις συχνοτήτων. Κύρια κριτήρια επιλογής τους σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή, είναι η μεταφορά όσο το δυνατό μεγαλύτερης ενέργειας σε μεγάλη απόσταση και η επίτευξη χαρακτηριστικών λήψης που να είναι εύκολα αναγνωρίσιμα και αξιοποιήσιμα. Με την έννοια αυτή ένα ημιτονοειδές κύμα (κύμα σταθερής συχνότητας  $\omega$ , άπειρης διάρκειας), όπως αυτό στο οποίο βασίσαμε τη μέχρι τώρα ανάπτυξη δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο, μια και δεν έχει καλά χαρακτηριστικά αναγνωρισιμότητας, όπως π.χ. μέτρησης χρόνου. Τα σήματα που μετρώνται και αξιοποιούνται στο θαλάσσιο περιβάλλον λοιπόν αποτελούνται από πολλές συχνότητες που κάθε μία έχει διαφορετικό βαθμό συμμετοχής στο σήμα. Το εύρος των συχνοτήτων συνιστά το (bandwidth) του σήματος και μπορεί να υπολογιστεί από το μετρούμενο σήμα με μετασχηματισμό Fourier. Αντίστροφα, ένα σήμα μπορεί να παραχθεί από την επαλληλία αρμονικών διαφορετικών συχνοτήτων και να μοντελοποιηθεί με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Συνεπώς η μέχρι τώρα θεωρία που αναπτύξαμε και αφορά μονοχρωματικά σήματα (μιας συχνότητα) επεκτείνεται σε ευρυζώνια σήματα μέσω του μετασχηματισμού Fourier για τον οποίο θα παραθέσουμε βασικές έννοιες τόσο για τον συνεχή όσο και για τον διακριτό μετασχηματισμό. Λεπτομέρειες για τη μετάβαση από τον συνεχή στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier μπορεί να βρεθούν και στις σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία».

### 5.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.

Τα ακουστικά σήματα μετρώνται πρωτογενώς στο πεδίο του χρόνου. Εάν τα θεωρήσουμε με την αναλογική τους έκφραση, περιγράφονται ως συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου  $f(t)$ . Για παράδειγμα ένα μονοχρωματικό σήμα που οδεύει κατά μήκος του άξονα  $r$  μπορεί να έχει την έκφραση.

$$f(t) = A \sin(kr - \omega t) \quad (5.1.1)$$

Ένα τυχαίο σήμα (ντετερμινιστικό όμως ως προς την έκφρασή του) μπορεί να συντεθεί από πολλές αρμονικές, συνιστώσες δηλαδή που έχουν την ως άνω μορφή (5.1.1) αλλά που μπορεί να διαφέρουν ως προς το πλάτος και τη συχνότητα. Εάν θεωρήσουμε μία συνεχή κατανομή συχνοτήτων, η συνεισφορά κάθε μίας από τις συχνότητες στο σήμα, χαρακτηρίζεται μέσω της συνάρτησης  $F(\omega)$ . Οι συναρτήσεις  $f(t)$  και  $F(\omega)$  αποτελούν ένα ζεύγος συναρτήσεων που χαρακτηρίζει το οποιοδήποτε αναλογικό σήμα. Ο υπολογισμός του κάθε μέλους του ζεύγους μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε το άλλο, μέσω του **Μετασχηματισμού Fourier** που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 5.1 Καταγραφή ενός ακουστικού σήματος στο πεδίο του χρόνου

Εάν οι ως άνω συναρτήσεις δεν είναι συνεχείς αλλά δίδονται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών  $t$  και  $\omega$  ( $t_i, \omega_j$ ), η σχέση τους δίδεται μέσω του **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier**. Με δεδομένη τη σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία, η τελευταία αυτή περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και στις δύο περιπτώσεις αρχίζοντας από τη συνεχή περίπτωση.

### 5.1.1 Ο Μετασχηματισμός Fourier.

**ΟΡΙΣΜΟΣ** : Τα ζεύγη των μιγαδικών εν γένει συναρτήσεων  $f(t)$  και  $F(\omega)$  καλούνται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier, και συμβολίζονται ως  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , όταν σχετίζονται μέσω των εξισώσεων

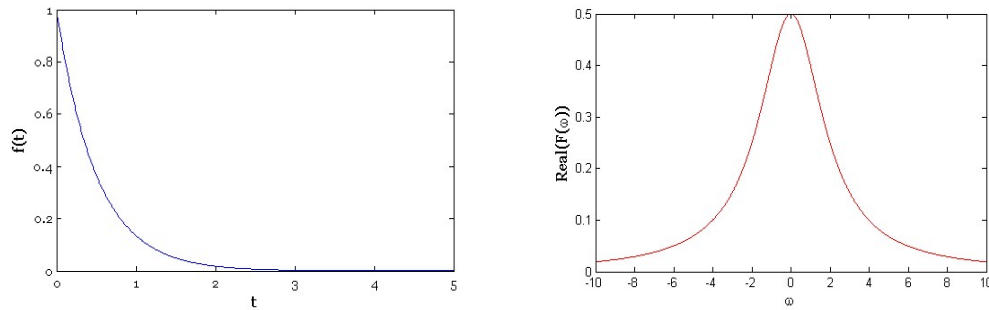
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (5.1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (5.1.3)$$

Γράφοντας τις παραπάνω σχέσεις υποθέτουμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής του Cauchy. Η συνάρτηση  $F(\omega)$  ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της  $f(t)$  και συμβολίζεται και ως  $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$  ενώ η  $f(t)$  χαρακτηρίζεται ως αντίστροφος μετασχηματισμός της  $F(\omega)$  και συμβολίζεται ως  $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ . Να σημειώσουμε εδώ ότι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $F(\omega)$  και  $f(t)$  για τις πρακτικές εφαρμογές αναφέρεται στο μέτρο τους π.χ. ( $|F(\omega)|$ ) που είναι και ένας ενεργειακός δείκτης πολύ χρήσιμος στις εφαρμογές.

Για παράδειγμα, εάν  $f(t) = e^{-at}$   $a > 0$   $t > 0$  (Σχήμα 5.2), η  $F(\omega)$  είναι

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega} \quad (5.1.4)$$



Σχήμα 5.2 Παράδειγμα σήματος που εκφράζεται από τη σχέση 5.1.4 στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. Οι τιμές αφορούν  $\alpha=2$

Εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει και την αντίστροφη σχέση 5.1.3.

Όπως είπαμε, οι συναρτήσεις  $f(t)$  και  $F(\omega)$  είναι γενικά μιγαδικές.

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \quad F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της εκθετικής συνάρτησης μέσω ημίτονου και συνημίτονου μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε σε εκφράσεις για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των ως άνω συναρτήσεων της μορφής

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt \quad (5.1.5a)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t) \cos \omega t - f_1(t) \sin \omega t] dt \quad (5.1.5\beta)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (5.1.5\gamma)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (5.1.5\delta)$$

Στην πράξη, οι συναρτήσεις  $f(t)$  αντιπροσωπεύουν πραγματικές μετρήσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου και είναι πραγματικές συναρτήσεις ( $f_2(t)=0$ ). Στην περίπτωση αυτή εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (5.1.6)$$

Άλλες σχέσεις που ισχύουν στην περίπτωση αυτή είναι  $R(-\omega) = R(\omega)$  και  $X(-\omega) = -X(\omega)$ . Έτσι  $F^*(\omega) = F(-\omega)$  (με \* υποδηλώνουμε τον συζυγή).

Στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f(t)$  είναι άρτια, ( $f(-t) = f(t)$ ) παίρνουμε  $X(\omega) = 0$ . Δηλαδή ο μετασχηματισμός μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης δίδει

πραγματική συνάρτηση. Αντίστοιχα εάν  $f(-t) = -f(t)$  (περιττή συνάρτηση) παίρνουμε  $R(\omega) = 0$ .

### 5.1.2 Συνέλιξη

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$  και τα αντίστοιχα δεύτερα μέλη των ζευγών του μετασχηματισμού Fourier  $F_1(\omega)$  και  $F_2(\omega)$ .

Συνέλιξη (convolution) των συναρτήσεων  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$  ονομάζουμε το ολοκλήρωμα

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (5.1.7)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αντιπροσωπεύει μία νέα συνάρτηση του χρόνου και είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη των φίλτρων και στο γινόμενο σημάτων που χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$ .

Εάν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης  $(f_1 * f_2)(t)$ , έχουμε για  $t = \tau + x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα σε ό,τι αφορά το γινόμενο συναρτήσεων που περιγράφονται στο πεδίο των συχνοτήτων :

**Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων**

Η συμβολικά : Εάν  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  και  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  τότε

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (5.1.9)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση) ότι

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (5.1.10)$$

### 5.1.3 Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Τα σήματα σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές είναι ψηφιακά. Αυτό σημαίνει ότι μετράμε δείγματα του σήματος  $f(t)$  στο πεδίο του χρόνου ή της  $F(\omega)$  στο πεδίο των συχνοτήτων. Τα δείγματα αυτά έχουν χρονική διαφορά  $T_1$  και συχνοτική διαφορά  $\omega_0$ . Ο αριθμός των δειγμάτων εξαρτάται από το παράθυρο δειγματοληψίας και το βήμα δειγματοληψίας. Έτσι εάν επιλέξουμε ένα παράθυρο δειγματοληψίας στο πεδίο του

χρόνου  $T$  και  $N$  αριθμό δειγμάτων, το βήμα θα είναι  $T_1=T/N$ . Αντίστοιχα στο πεδίο των συχνοτήτων,  $N$  δείγματα με βήμα  $\omega_0$  θα δώσουν παράθυρο δειγματοληψίας  $\omega_1=N\omega_0$ .

Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier συνδέει τα δείγματα στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων μέσω των σχέσεων

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N}, m = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (5.1.11)$$

και

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn}, \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (5.1.12)$$

όπου  $\bar{f}(mT_1)$  και  $\bar{F}(n\omega_0)$  είναι προσεγγίσεις των  $f(t)$  και  $F(\omega)$  στα αντίστοιχα χρονικά ή συχνοτικά βήματα.

Η προσέγγιση που γίνεται στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier έχει να κάνει με το γεγονός ότι η μετάβαση από τον συνεχή στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier περνά από τη θεώρηση των συναρτήσεων

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega+n\omega_1) \quad (5.1.13)$$

από τις οποίες η συνάρτηση  $\bar{f}(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $T$ , ενώ η  $\bar{F}(\omega)$  είναι επίσης περιοδική με περίοδο  $\omega_1$ .

Είναι προφανές ότι οι αρχικές συναρτήσεις  $f(t)$  και  $F(\omega)$  δεν είναι κατ' ανάγκη περιοδικές. Η επιλογή όμως των  $T$  και  $\omega_1$  σε συνδυασμό με τον αριθμό των δειγμάτων μπορεί να οδηγήσει σε καλή προσέγγιση των πραγματικών τιμών των συναρτήσεων αυτών από τα ως άνω δείγματα, εάν οι  $f(t)$  και  $F(\omega)$  δεν έχουν ισχυρό ενεργειακό περιεχόμενο έξω από τα εύρη  $T$  και  $\omega_1$ .

Υπενθυμίζοντας τις σχέσεις

$$T_1 = T/N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0,$$

οι εκφράσεις 5.1.11 (ή 5.1.12) αντίστοιχα μας δίδουν  $N$  εξισώσεις (για  $m=0,\dots,N-1$ ), που μας δίδουν τις διακριτές τιμές  $\bar{F}(n\omega_0)$  της  $\bar{F}(\omega)$  συναρτήσεως των διακριτών τιμών  $\bar{f}(mT_1)$  της  $\bar{f}(t)$  και αντίστροφα.

Η σχέση 5.1.11 είναι της μορφής

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0,\dots,N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (5.1.14)$$

Και η 5.1.12 της μορφής

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.1.15)$$

Τα ζεύγη των συντελεστών που ορίζονται από τις σχέσεις (5.1.14) και (5.1.15) αποτελούν μία διακριτή σειρά ζευγών *Fourier (discrete Fourier series pair)* τάξης  $N$  και θα συμβολίζονται με

$$a_N \leftrightarrow A_m$$

Η σειρά είναι περιοδική, δηλαδή ισχύει

$$A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$$

Δεν χρειάζεται επομένως να καταφύγει κανείς σε ολοκληρώματα για να πάρει κάποιες από τις δύο τιμές. Υπάρχει βέβαια πάντα η απαίτηση επίλυσης ενός συστήματος  $N$  εξισώσεων. Οι υπολογισμοί γίνονται γρήγορα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, ωστόσο με ειδική τεχνική (*Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier – Fast Fourier Transform* ή *FFT*) είναι δυνατόν αυτοί να επιταχυνθούν σημαντικά.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι όταν έχουμε ένα τυχαίο σήμα στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του διακριτού μετασχηματισμού *Fourier* ώστε να μειωθεί το λάθος που γίνεται όταν οι συντελεστές της  $F(\omega)$  προσεγγιστούν κατά τα ανωτέρω με εκείνους της  $\bar{F}(\omega)$ . Το λάθος αυτό είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *aliasing error*.

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος περιλαμβάνει πολλές παραμέτρους που θα πρέπει να υπολογιστούν με αντικρουόμενα κριτήρια. Είναι σημαντικό λοιπόν να καθορισθούν οι ανάγκες της επεξεργασίας μας με βάση τα πραγματικά δεδομένα του σήματος (διάρκεια, εύρος συχνοτήτων, ανάλυση) ώστε να επιτευχθεί ο μέγιστος βαθμός ακρίβειας. Περισσότερη συζήτηση για θέματα επεξεργασίας σημάτων ξεφεύγει από τον σκοπό των σημειώσεων και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε πλέον ειδικά βιβλία (π.χ. Papoulis).