

## Κυματική διάδοση 2023-2024

### Λύση Άσκησης 2.5

#### Άσκηση 2.5

Να αποδείξετε ότι οι συντελεστές της αναπαράστασης μιας συνάρτησης  $f(x)$  οριζόμενης σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ενός κανονικού προβλήματος Sturm-Liouville που ορίζεται στο ίδιο διάστημα με τις ίδιες οριακές συνθήκες, δίδονται από τη σχέση  $a_m = \int_a^b r(x)f(x)\psi_m(x)dx$

#### Λύση

Η αναπαράσταση της συνάρτησης μέσω των ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος Sturm-Liouville είναι :

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \psi_m(x)$$

Εχμεταλευόμαστε την ιδιότητα της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος Sturm-Liouville και πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με  $r(x)\psi_n(x)$ :

$$r(x)\psi_n(x)f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} r(x)\psi_n(x)a_m\psi_m(x)$$

Ολοκληρώνουμε στο διάστημα  $[a, b]$  και παίρνουμε διαδοχικά:

$$\int_a^b r(x)\psi_n(x)f(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b r(x)\psi_n(x)a_m\psi_m(x)dx$$

$$\int_a^b r(x)\psi_n(x)f(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_a^b r(x)\psi_n(x)\psi_m(x)dx$$

$$\int_a^b r(x)\psi_n(x)f(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \delta_{nm} = a_n$$

και φυσικά μπορούμε να αλλάξουμε το δείκτη από  $n$  σε  $m$ .