Κυματική διάδοση 2023-2024

Σκιαγράφηση Λύσεων Ασκήσεων 3.2-3.5

Προβλήματα κυματοδηγών (Απλών και τύπου Pekeris)

Άσκηση 3.2

1. Θεωρείστε το πρόβλημα του απλού κυματοδηγού όπως το είδαμε στο μάθημα, αλλά με την επιφάνεια στο $z = 0$ να είναι ακλόνητη. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του επαγόμενου προβλήματος Sturm-Liouville, που ονομάζεται 'Πρόβλημα βάθους'.

2. Επαναλάβετε την άσκηση για την περίπτωση που τόσο η επιφάνεια όσο και ο πυθμένας ενός θαλάσσιου κυματοδηγού στον οποίο η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι σταθερή, είναι ελεύθερες πιέσεων.

3. Σχεδιάστε τις ιδιοσυναρτήσεις πρώτης και δεύτερης τάξης και στους δύο ανωτέρω κυματοδηγούς.

Λύση 3.2.1

Διατυπώνουμε το πρόβλημα 'βάθους' που είναι ένα πρόβλημα τύπου Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (k^2 - \lambda)u = 0,$$

με οριακές συνθήκες

$$\frac{du}{dz}(0) = 0, \frac{du}{dz}(h) = 0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι 'ακλόνητη επιφάνεια' εκφράζεται με μηδενισμό της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου, που με τη σειρά της ισοδυναμεί με μηδενισμό της ως προς z παραγώγου της πίεσης.

Χρησιμοποιώντας λύση της εξίσωσης βάθους της μορφής

$$u(z) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z},$$

όπου $\gamma = \sqrt{k^2 - \lambda}$ και εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη για $z = 0$ παίρνομε $A = B$ και $u(z) = 2Acos(\gamma z)$.

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη για $z = h$, παίρνομε τη χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού που είναι:

$$sin(\gamma h) = 0.$$

Επομένως $\gamma_n h = (n - 1)\pi$.

Αρα,

$$\sqrt{k^2 - \lambda_n}h = (n - 1)\pi.$$

Συνεπώς

$$\lambda_n = k^2 - \frac{(n-1)^2\pi^2}{h^2}$$

,

και

$$u_n(z) = 2Acos(\gamma_n z) = A'cos(\sqrt{k^2 - \lambda_n}z).$$

.

Λύση 3.2.2

Αντίστοιχα υπολογίζομε ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις της περίπτωσης κυματοδηγού με ελεύθερες επιφάνειες.

Στην περίπτωσή αυτή θα προκύψει

$$\gamma_n h = n\pi,$$

$$\lambda_n = k^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2},$$

$$u_n(z) = 2iAsin(\gamma_n z) = A''sin(\sqrt{k^2 - \lambda_n}z).$$

Προσοχή στη διαφορά των ιδιοτιμών του προβλήματος αυτού σε σχέση με το προηγούμενο. Αν και έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση, η περίπτωση $\gamma_n h = 0$ εδώ, δεν αντιστοιχεί σε ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος αφού οδηγεί σε μηδενική έκφραση της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης.

Άσκηση 3.3

Θεωρείστε πρόβλημα διάδοσης ακουστικού κύματος δεδομένης συχνότητας σε κυματοδηγό βάθους 50 μέτρων στον οποίο έχομε συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και στα δύο σύνορα.

1. Βρείτε τη συχνότητα αποκοπής του εν λόγω κυματοδηγού όταν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε αυτόν είναι 1500 m/sec.

2. Βρείτε τη μέγιστη τάξη 'κανονικών ιδιομορφών' για διάδοση σήματος συχνότητας $f = 200\ Hz$.

3. Σε ποιό βάθος πρέπει να τοποθετηθεί μία πηγή για να μην διεγείρεται η ιδιομορφή 2ης τάξης ;

4. Σε ποιό βάθος πρέπει να τοποθετηθεί ένας δέκτης προκειμένου να μην λαμβάνει την ιδιομορφή 3ης τάξης ;

5. Να υπολογίσετε τα μέτρα των συνιστωσών των αριθμών κύματος για τις τρείς πρώτες ιδιομορφές διάδοσης στον κυματοδηγό.

Λύση 3.3.1

Συχνότητα αποκοπής είναι η συχνότητα κάτω από την οποία δεν διαδίδεται καμμία κανονική ιδιομορφή. Η συχνότητα αυτή ορίζεται από την σχέση $\lambda_1 = 0$ αφού για να έχομε κανονικές ιδιομορφές θα πρέπει $\lambda_n > 0$ και οι ιδιοτιμές διατάσσονται σε φθίνουσα σειρά με βάση την τάξη τους. Για τον δεδομένο κυματοδηγό είδαμε στην άσκηση 3.2.2 ότι $\lambda_n = k^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}$. Επομένως

$$\lambda_1 = k^2 - \frac{\pi^2}{h^2} = 0.$$

Από την εξίσωση αυτή με δεδομένο ότι $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f_{co}}{c}$, προκύπτει η συχνότητα αποκοπής:

$$\frac{2\pi f_{co}}{c} = \frac{\pi}{h} = 0.$$

Επομένως

$$f_{co} = \frac{c}{2h},$$

και αντικαθιστώντας τα μεγέθη των δεδομένων

$$f_{co} = \frac{1500}{100} = 15\ Hz$$

.

Λύση 3.3.2

Με αντίστοιχο συλλογισμό έχομε για την τάξη πάνω από την οποία δεν διαδίδεται κανονική ιδιομορφή

$$\lambda_n < k^2 - \frac{n\pi^2}{h^2}.$$

που ισοδυναμεί με

$$\gamma_n < k = \frac{\omega}{c}.$$

Χρησιμοποιώντας για ευκολία την παραπάνω έκφραση παίρνουμε:

$$\frac{n\pi}{h} < \frac{\omega}{c} \Rightarrow n < \frac{2fh}{c},$$

και αντικαθιστώντας τα μεγέθη των δεδομένων

$$n < \frac{2 \cdot 200 \cdot 50}{1500} = \frac{2000}{1500} = 13.33$$

Συνεπώς $N = 13$.

Λύση 3.3.3 και 3.3.4

Για να υπολογιστούν τα βάθη στα οποία δεν λαμβάνεται ή δεν διεγείρεται κάποια ιδιομορφή, θα πρέπει να βρούμε τα βάθη για τα οποία $u_n(z) = 0$.

Στην περίπτωση μας και απαντώντας στην ερώτηση 3.3.4 έχομε

$$u_3(z) = 0 \Rightarrow sin\left(\frac{3\pi z}{h}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3\pi z}{h}\right) = m\pi$$

Άρα $z = mh/3$. Παρατηρούμε ότι τα επόμενα βάθη μας δίδουν μηδενισμό της ιδιοσυνάρτησης τρίτης τάξης ($m = 0, 1, 2, 3$):

$$z = 0, z = h/3, z = 2h/3, z = h$$

.

Υπενθυμίζουμε, ότι στο εσωτερικό το κυματοδηγού η ιδιοσυνάρτηση τρίτης τάξης μηδενίζεται σε δύο διαφορετικά βάθη. Στην περίπτωσή μας τα εσωτερικά βάθη είναι $z = h/3$ και $z = 2h/3$.

Άσκηση 3.4

Δίδεται κυματοδηγός τύπου Pekeris με παραμέτρους, $c_1 = 1500\, m/sec, c_2 = 1600\, m/sec, \rho_1 = 1000\ kg/m^3, \rho_2 = 1100\ kg/m^3$. Βρείτε:

1. Το μέγιστο αριθμό κανονικών ιδιομορφών για συχνότητα κύματος 50 Hz όταν το βάθος του κυματοδηγού είναι $h = 200\ m$.
2. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη συχνότητα του κύματος για να έχομε διάδοση 6 τουλάχιστον ιδιομορφών στον ανωτέρω κυματοδηγό ;
3. Πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο βάθος του κυματοδηγού ώστε να έχομε διάδοση 10 ιδιομορφών στη συχνότητα των 100 Hz ;

Λύση 3.4.1

Έχομε δει ότι για τον κυματοδηγό τύπου Pekeris, ο μέγιστος αριθμός ιδιομορφών που διαδίδονται σε μεγάλες αποστάσεις προσδιορίζεται από τη σχέση

$$N_{max} = INT\left[2fh\sqrt{\frac{1}{{c_1}^2} - \frac{1}{{c_2}^2}} + 0.5\right].$$

Επομένως απλή αντικατάσταση από τα δεδομένα της άσκησης θα μας δώσει

$$N_{max} = INT(5.1398) = 5.$$

Λύση 3.4.2

Έχομε δει ότι για τον κυματοδηγό τύπου Pekeris, η συχνότητα αποκοπής $f_{co,n}$ για συγκεκριμένη τάξη ιδιομορφής n προσδιορίζεται από τη σχέση

$$f_{co,n} = \frac{(n-0.5)c_1c_2}{2h\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}.$$

Απλή αντικατάσταση από τα δεδομένα της άσκησης θα μας δώσει

$$f_{co,n} = 59.27\ Hz.$$

Συνεπώς, για συχνότητες μεγαλύτερες από 59.27 Hz έχομε τουλάχιστον 6 διαδιδόμενες ιδιομορφές.

Λύση 3.4.3

Χρησιμοποιούμε πάλι τη σχέση για τη συχνότητα αποκοπής $f_{co,n}$ για τάξη ιδιομορφής n

$$f_{co,n} = \frac{(n-0.5)c_1c_2}{2h\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$$

Θέλομε να έχομε τουλάχιστον 10 ιδιομορφές για συχνότητα 100 Hz, οπότε η συχνότητα αυτή πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα αποκοπής της 10ης ιδιομορφής. Συνεπώς παίρνομε την ανισότητα

$$100 > f_{co,10} = \frac{(10-0.5)c_1c_2}{2h\sqrt{c_2^2-c_1^2}}.$$

Συνεπώς

$$100 > \frac{9.5c_1c_2}{2h\sqrt{c_2^2-c_1^2}},$$

και

$$h > \frac{9.5c_1c_2}{2\cdot 100\sqrt{c_2^2-c_1^2}}.$$

Αντικατάσταση από τα δεδομένα της άσκησης μας δίνει

$$h > 204,75\ m.$$

Άσκηση 3.5

Θεωρείστε τον κυματοδηγό που αναφέρεται στην άσκηση 3.4 με βάθος $h = 70\ m$. Δίδονται οι ιδιοτιμές του προβλήματος βάθους για τις τρεις διαδιδόμενες ιδιομορφές στη συχνότητα των $100\ Hz$: $\sqrt{\lambda_1} = 0.41691745, \sqrt{\lambda_2} = 0.41102291, \sqrt{\lambda_3} = 0.40127095$.

1. Βρείτε σε ποιό βάθος πρέπει να τοποθετηθεί η πηγή για να μην διεγείρεται η δεύτερη ιδιομορφή.

2. Βρείτε σε ποιό βάθος πρέπει να τοποθετηθεί ένας δέκτης για να μην γίνεται λήψη της τρίτης ιδιομορφής.

Λύση 3.5

Η λύση της άσκησης ακουλουθεί την ίδια ‘φιλοσοφία’ της άσκησης 3.3.3 και 3.3.4. Η διαφορά εδώ είναι ότι μας δίδονται οι ιδιοτιμές (αφού το περιβάλλον είναι τύπου Pekeris και δεν είναι άμεσος ο υπολογισμός των ιδιοτιμών).

Οι ιδιοσυναρτήσεις του περιβάλλοντος αυτού για πηγή ή δέκτη στο νερό, δίδονται από τη σχέση

$$u_n^{(1)}(z) = A' sin\sqrt{k_1^2-\lambda_n}z$$

Θέτοντας $u_n^{(1)}(z) = 0$ για τις δεδομένες ιδιοτιμές, βρίσκουμε τα βάθη στα οποία μηδενίζονται οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

Με βάση τη θεωρία των προβλημάτων Sturm-Liouville περιμένουμε ένα βάθος μηδενισμού της ιδιοσυνάρτησης δεύτερης τάξης (εκτός από την επιφάνεια) και δύο βάθη μηδενισμού της ιδιοσυνάρτησης τρίτης τάξης.