

Μαθηματική Μοντελοποίηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5 Διαλέξεων

18 Μαΐου 2021

Θέματα Μαθηματικής Βιολογίας.

Γενική θεώρηση

Οι ασκήσεις αυτές αφορούν θέματα Μαθηματικής Βιολογίας. Για τη λύση τους χρειάζεται να έχουν κατανοηθεί τα θέματα που παρουσιάστηκαν από τα Κεφάλαιο 5 του βιβλίου του μαθήματος και οι παραδόσεις που αφορούν στο συγκεκριμένο κεφάλαιο και βρίσκονται αναρτημένες στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Άσκηση 5.1

Δίδεται η εξίσωση του Gompertz στη μορφή :

$$N(t) = a \exp\{-be^{-ct}\}$$

όπου a, b, c σταθερές

1. Ελέγξτε εάν ο πληθυσμός, η εξέλιξη του οποίου περιγράφεται από την ως άνω εξίσωση, φτάνει σε κάποια οριακή τιμή για μεγάλους χρόνους και στη συνέχεια υπολογίστε αυτή την τιμή. Τι αντιπροσωπεύει η τιμή αυτή σε σχέση με τον αρχικό πληθυσμό ;
2. Υπολογίστε το χρόνο στον οποίο ο πληθυσμός θα φτάσει στο μισό της οριακής του τιμής
3. Σε ποιό χρόνο ο πληθυσμός θα έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής και ποιος είναι αυτός ;

Άσκηση 5.2

Υπολογίστε την αναλυτική λύση του Λογιστικού Μοντέλου για τα συνεχή πληθυσμιακά μοντέλα ενός είδους

Άσκηση 5.3

Θεωρείστε πληθυσμό εντόμων για τον οποίο γνωρίζουμε ότι σε ένα χρόνο που διαρκεί η τυπική διάρκεια ζωής τους τα θηλυκά γεννούν κατά μέσον όρο 120 αυγά, από τα οποία ποσοστό 5% δίδει θηλυκά έντομα που μπορούν να γονιμοποιηθούν. Τα υπόλοιπα αυγά είτε γεννούν αρσενικά είτε καταστρέφονται. Τα θηλυκά έντομα μητέρες πεθαίνουν μέσα στο χρόνο. Εάν ο αρχικός πληθυσμός ήταν 1000 έντομα, υπολογίστε τον αναμενόμενο θηλυκό πληθυσμό σε 10 χρόνια (ή ισοδύναμα μετά από 10 κύκλους ζωής).

1. Με χρήση του συνεχούς μαλθουσιανού μοντέλου
2. Με χρήση του διακριτού μαλθουσιανού μοντέλου

Τι παρατηρείτε ; Πως εξηγείτε τη διαφορά αποτελέσματος ;

Άσκηση 5.4

Θεωρείστε το επόμενο μοντέλο ανταγωνισμού δύο ειδών που μπορεί να περιγράψει την αλληλεπίδραση κάποιου ιού με το ανοσοποιητικό μας σύστημα

$$\Delta P = rQ - sPQ$$

$$\Delta Q = uQ - vPQ$$

όπου P είναι ο πληθυσμός των κυττάρων που καταπολεμούν μία ασθένεια και Q είναι ο πληθυσμός των βακτηρίων που προκαλούν την ασθένεια.

1. Εξηγήστε τη σημασία κάθε όρου.
2. Για ποιές παραμέτρους r, s, u, v επιτυγχάνεται σταθεροποίηση κυττάρων και βακτηρίων ;
3. Θεωρώντας ότι τα χρονικά βήματα είναι διάρκειας μίας ημέρας, βρείτε συνδυασμό των θετικών σταθερών r, s, u, v που θα οδηγούν σε σταθεροποίηση των βακτηρίων και των κυττάρων σε 1.5 εβδομάδα.
4. Αλλάξτε μία από τις παραπάνω σταθερές ώστε να επιτευχθεί μείωση αντί σταθεροποίηση των βακτηρίων.

Θεωρείστε αρχικό πληθυσμό κυττάρων ίσο με τον αριθμό των βακτηρίων με $Q_0 = P_0 = 10$.

Άσκηση 5.5

Θεωρούμε το μοντέλο ανάπτυξης επιδημίας της μορφής SIS :

$$\Delta S = \gamma I - aSI$$

$$\Delta I = -\gamma I + aSI$$

όπου S είναι ο πληθυσμός των ατόμων που υπόκεινται στη νόσο και I ο αριθμός των ατόμων που έχουν ήδη προσβληθεί.

Η τυπική διάρκεια της επιδημίας είναι μία εβδομάδα. Στην αρχή της περιόδου που παρακολουθείται η νόσος έχουμε 1000 υγιείς αλλά υποκείμενους σε νόσο και 100 προσβληθέντες. Μετά από 1 εβδομάδα, τα άτομα που έχουν νοσήσει έχουν αυξηθεί κατά 100 και στην επόμενη εβδομάδα προστέθηκαν άλλα 50.

1. Να υπολογιστούν οι παράμετροι a και γ που καθορίζουν την επιδημιολογική εξέλιξη.
2. Να υπολογιστεί ο αριθμός των νοσούντων την τρίτη εβδομάδα.