Κυματική Διάδοση 2023-2024

Λύσεις Ασκήσεων 1.6 και 1.7

Άσκηση 1.6

Πρώτη ερώτηση : Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης της χορδής, που αναφέρεται ως κυματική συνάρτηση, σε ημιτονοειδή μορφή.

Απάντηση.

Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την λύση της κυματικής εξίσωσης με τη μορφή ημιτόνου με την ανάλογη χρονική εξάρτηση ανάλογα με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η χορδή όπως την έχομε μελετήσει ταλαντούται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και η συνάρτηση που περιγράφει την κίνηση αφορά την μετατόπιση των κάθε σημείου της χορδής από τη θέση ισορροπίας.

Με δεδομένο ότι η διάδοση του κύματος είναι προς τα θετικά x θα επιλέξουμε την έκφραση μέσω ημιτόνου με αρνητικό πρόσημο στη χρονική εξάρτηση στο όρισμα:

$$y(x,t) = A sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Από τα δεδομένα της άσκησης μπορούμε να δώσουμε τιμές στα μεγέθη που εμφανίζονται ανωτέρω :

$$A = 0.1$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5\ Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0.5 = \pi$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

Επομένως γράφομε :

$$y(x,t) = A sin(kx - \omega t + \varphi) = 0.1 sin(\pi x - \pi t + \varphi) = 0.1 sin\left[\pi(x - t) + \varphi\right]$$

Από τα δεδομένα της άσκησης μπορούμε τέλος να προσδιορίσουμε τη γωνία φάσης φ :

Αφού για $x=0, t=0$ έχομε $y(0,0)=0.5$, από την παραπάνω σχέση παίρνομε

$y(0,0)=0.05=0.1 sin\varphi \Rightarrow \varphi = sin^{-1} 0.5$ Επομένως $\varphi = \frac{\pi}{6} = 30^o$

Γράφομε λοιπόν :

$$y(x,t) = A sin(kx-\omega t+\varphi) = 0.1 sin(\pi x - \pi t + \pi/6) = 0.1 sin\left[\pi\left(x-t+1/6\right)\right]$$

Δεύτερη ερώτηση : Να διατυπωθεί η εξίσωση για απόσταση 2 μέτρων από την αρχή του άξονα των x.

Απάντηση

Απλή αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση $x=2$

$$y(x,t) = 0.1 sin\left[\pi\left(2-t+1/6\right)\right]$$

Τρίτη ερώτηση : Να υπολογιστούν η μέγιστη ταχύτητα και η μέγιστη επιτάχυνση των σημείων της χορδής

Απάντηση

Η ταχύτητα των στοιχείων (σημείων) της χορδής προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της μετατόπισής τους :

$$y'(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega cos(kx-\omega t+\varphi) = -0.1\pi cos\left[\pi\left(x-t+1/6\right)\right]$$

Η μέγιστη ταχύτητα συνεπώς είναι σε απόλυτη τιμή $y'_{max} = 0.1\pi \simeq 0.31459\ m/sec$

Η επιτάχυνση των στοιχείων της χορδής προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της ταχυτητάς τους :

$$y''(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 sin(kx-\omega t+\varphi) = -0.1\pi^2 sin\left[\pi\left(x-t+1/6\right)\right]$$

Η μέγιστη επιτάχυνση συνεπώς είναι σε απόλυτη τιμή $y''_{max} = 0.1\pi^2 \simeq 0.987\ m/sec$

Τέταρτη ερώτηση: Να υπολογιστούν η στιγμιαία ταχύτητα και η επιτάχυνση των σημείων της χορδής σε απόσταση 2 μέτρων από την αρχή και χρόνο 1 sec.

<u>Απάντηση</u>

Απλή αντικατάσταση στις σχέσεις υπολογισμού ταχύτητας και επιτάχυνσης.

$$y'(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega cos(kx - \omega t + \varphi) = -0.1\pi\, cos\left[\pi(x - t + 1/6)\right]$$

$$y'(2,1) = -0.1\pi\, cos\left[\pi(2 - 1 + 1/6)\right] = -0.1\pi\, cos\left[\pi(1 + 1/6)\right] = -0.1\pi\, cos(3.665) \simeq -0.3135\, m/sec$$

$$y''(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\, sin(kx - \omega t + \varphi) = -0.1\pi^2\, sin\left[\pi(x - t + 1/6)\right]$$

$$y''(2,1) = -0.1\pi^2\, sin\left[\pi(2 - 1 + 1/6)\right] = -0.1\pi^2\, sin\left[\pi(1 + 1/6)\right] = -0.1\pi^2\, sin(3.665) \simeq$$
$$= -0.06309\, m/sec^2$$

Άσκηση 1.7

Ζητείται η μάζα χορδής με δεδομένη την δύναμη έκτασής της (τάση), το μήκος και τη θεμελιώδη συχνότητα. Θεωρούμε χορδή πακτωμένη στα δύο άκρα

Η μάζα της χορδής μπορεί να υπολογιστεί εάν γνωρίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος που παράγεται από την έκταση της χορδής

$c = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ όπου *F* είναι η τάση και μ η γραμμική πυκνότητα. Συνεπώς $\mu = \dfrac{F}{c^2}$

Η ταχύτητα προκύπτει από την πληροφορία για τη θεμελιώδη συχνότητα και το μήκος της χορδής :

$L = \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$. Για $L = 2m$ $\lambda = 4m$.

Η ταχύτητα είναι $c = \lambda \cdot f = 4 \cdot 40 = 160$ m/sec

Επομένως από τη σχέση για τη γραμμική πυκνότητα έχομε $\mu = \dfrac{F}{c^2} = \dfrac{320}{160^2} = \dfrac{1}{80}$ kg/m

Τότε η μάζα της χορδής είναι $m = \mu \cdot L = \dfrac{1}{80} \cdot 2 = \dfrac{1}{40} = 0.025$ kg