

## Κυματική διάδοση 2023-2024

### Σειρά 2 ΑΣΚΗΣΕΩΝ

#### Προβλήματα Sturm-Liouville και κυματικής διάδοσης σε μία διάσταση

##### Άσκηση 2.1

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα που ορίζεται από την εξίσωση

$$y'' + \lambda y = 0$$

και τις οριακές συνθήκες

$$y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

στο διάστημα  $[0, L]$ , είναι ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville. Στη συνέχεια

1. Δείξτε ότι το πρόβλημα έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές
2. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

##### Άσκηση 2.2

Θεωρείστε την εξίσωση που διέπει το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε δύο διευθύνσεις για τη χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης.

1. Κάνοντας χωρισμό μεταβλητών διατυπώστε τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα για κάθε μία από τις δύο διευθύνσεις διάδοσης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
2. Διατυπώστε τη λύση της προκύπτουσας εξίσωσης για την ως προς  $x$  εξάρτηση της πίεσης χρησιμοποιώντας τόσο εκθετικές, όσο και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
3. Βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές των δύο αναπαραστάσεων.

##### Άσκηση 2.3

Θεωρείστε την εξίσωση που διέπει το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε μία διεύθυνση για την χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης  $p_x(x)$  και υπολογίστε τη λύση της για τις εξής αρχικές συνθήκες :

- $p_x(0) = 0$
- $\frac{dp(x)}{dx}(0) = 1$

Θεωρείστε ότι δεν υπάρχει πηγή στο πεδίο ορισμού του προβλήματος

##### Άσκηση 2.4

Θεωρείστε την ακουστική εξίσωση σε μία διεύθυνση για τη συνάρτηση  $u(x, t)$ . Κάνοντας χωρισμό μεταβλητών λύστε τις εξισώσεις που διέπουν την χρονική και χωρική συνιστώσα της συνάρτησης  $u(x, t)$ . Στη συνέχεια, επιλέγοντας λύση της χρονικής συνιστώσας της μορφής  $u_t(t) = e^{i\omega t}$  εξηγήστε τη σημασία κάθε όρου της λύσης της ακουστικής εξίσωσης. Τέλος, βρείτε τη λύση της ακουστικής εξίσωσης  $u_x(x)$  όταν δίδονται οι εξής συνθήκες :

- $u_x(0) = 0$

- $u_x(1) = 0$

οι οποίες ισχύουν για κάθε χρόνο.

Τι παρατηρείτε ;

### Άσκηση 2.5

Να αποδείξετε ότι οι συντελεστές της αναπαράστασης μιας συνάρτησης  $f(x)$  οριζόμενης σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ενός κανονικού προβλήματος Sturm-Liouville που ορίζεται στο ίδιο διάστημα με τις ίδιες οριακές συνθήκες, δίδονται από τη σχέση  $a_m = \int_a^b r(x)f(x)\psi_m(x)dx$