

Κυματική διάδοση 2023-2024

Σειρά 3 ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Προβλήματα κυματοδηγών (Απλών και τύπου Pekeris)

Άσκηση 3.1

Δίδεται θαλάσσιος κυματοδηγός σταθερού βάθους h . Η επιφάνεια σε μηδενικό βάθος καλύπτεται από πάγο και θεωρούμε συνθήκη πλήρους ανάκλασης στο εν λόγω όριο. Ο πυθμένας του κυματοδηγού είναι ημιάπειρος σε έκταση και η διαχωριστική επιφάνεια νερού-πυθμένα είναι επίπεδη και οριζόντια. Οι ταχύτητες διάδοσης του ήχου στο νερό και τον πυθμένα είναι σταθερές και ίσες με c_1 και c_2 αντίστοιχα. Επίσης σταθερές είναι οι αντίστοιχες πυκνότητες. Σε βάθος $z = z_0$ σημειακή αρμονική πηγή εκπέμπει σε συχνότητα f Hz

1. Διατυπώστε το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης στον εν λόγω κυματοδηγό.
2. Ποιά είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού .

Άσκηση 3.2

1. Θεωρείστε το πρόβλημα του απλού κυματοδηγού όπως το είδαμε στο μάθημα, αλλά με την επιφάνεια στο $z = 0$ να είναι ακλόνητη. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του επαγόμενου προβλήματος Sturm-Liouville, που ονομάζεται 'Πρόβλημα βάθους'.
2. Επαναλάβετε την άσκηση για την περίπτωση που τόσο η επιφάνεια όσο και ο πυθμένας ενός θαλάσσιου κυματοδηγού στον οποίο η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι σταθερή, είναι ελεύθερες πιέσεων.
3. Σχεδιάστε τις ιδιοσυναρτήσεις πρώτης και δεύτερης τάξης και στους δύο ανωτέρω κυματοδηγούς.

Άσκηση 3.3

Θεωρείστε πρόβλημα διάδοσης ακουστικού κύματος δεδομένης συχνότητας σε κυματοδηγό βάθους 50 μέτρων στον οποίο έχουμε συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και στα δύο σύνορα.

1. Βρείτε τη συχνότητα αποκοπής του εν λόγω κυματοδηγού όταν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε αυτόν είναι 1500 m/sec .
2. Βρείτε τη μέγιστη τάξη 'κανονικών ιδιομορφών' για διάδοση σήματος συχνότητας $f = 200 \text{ Hz}$.
3. Σε ποιο βάθος πρέπει να τοποθετηθεί μία πηγή για να μην διεγείρεται η ιδιομορφή 2ης τάξης ;
4. Σε ποιο βάθος πρέπει να τοποθετηθεί ένας δέκτης προκειμένου να μην λαμβάνει την ιδιομορφή 3ης τάξης ;
5. Να υπολογίσετε τα μέτρα των συνιστωσών των αριθμών κύματος για τις τρεις πρώτες ιδιομορφές διάδοσης στον κυματοδηγό.

Άσκηση 3.4

Δίδεται κυματοδηγός τύπου Pekeris με παραμέτρους, $c_1 = 1500 \text{ m/sec}$, $c_2 = 1600 \text{ m/sec}$, $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 1100 \text{ kg/m}^3$. Βρείτε:

1. Το μέγιστο αριθμό κανονικών ιδιομορφών για συχνότητα κύματος 50 Hz όταν το βάθος του κυματοδηγού είναι $h = 200 \text{ m}$.
2. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη συχνότητα του κύματος για να έχουμε διάδοση 6 τουλάχιστον ιδιομορφών στον ανωτέρω κυματοδηγό ;
3. Πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο βάθος του κυματοδηγού ώστε να έχουμε διάδοση 10 ιδιομορφών στη συχνότητα των 100 Hz ;

Άσκηση 3.5

Θεωρείστε τον κυματοδηγό που αναφέρεται στην άσκηση 3.4 με βάθος $h = 70 \text{ m}$. Δίδονται οι ιδιοτιμές του προβλήματος βάθους για τις τρεις διαδοόμενες ιδιομορφές στη συχνότητα των 100 Hz : $\sqrt{\lambda_1} = 0.41691745$, $\sqrt{\lambda_2} = 0.41102291$, $\sqrt{\lambda_3} = 0.40127095$.

1. Βρείτε σε ποιο βάθος πρέπει να τοποθετηθεί η πηγή για να μην διεγείρεται η δεύτερη ιδιομορφή.
2. Βρείτε σε ποιο βάθος πρέπει να τοποθετηθεί ένας δέκτης για να μην γίνεται λήψη της τρίτης ιδιομορφής.