6. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

6.1 Διανυσματικοί χώροι παραμέτρων και μετρήσεων.

Θα δανειστούμε για μία ακόμη φορά έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας προκειμένου να δούμε πως μπορούμε να χειριστούμε τη λύση γραμμικών αντιστρόφων προβλημάτων με μεγαλύτερη ευελιξία.

Θεωρούμε το γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα που ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{Gm}=\mathbf{d}$. Ο διανυσματικός χώρος των δεδομένων (μετρήσεων) συμβολίζεται με $S(\mathbf{d})$ και κάθε διάνυσμα μετρήσεων $\mathbf{d}$ περιλαμβάνεται σε αυτόν. Αντίστοιχα, ο διανυσματικός χώρος των παραμέτρων συμβολίζεται με $S(\mathbf{m})$ και κάθε διάνυσμα παραμέτρων $\mathbf{m}$ περιέχεται σε αυτόν.

Το μοντέλο που διέπει το γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα και εκφράζεται μέσω της εξίσωσης $\mathbf{Gm}=\mathbf{d}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει γραμμικό μετασχηματισμό από το χώρο $S(\mathbf{m})$ στον $S(\mathbf{d})$, ενώ η λύση $\mathbf{m}^{est}=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{d}$ εκφράζει ένα μετασχηματισμό από το χώρο $S(\mathbf{d})$ στον $S(\mathbf{m})$. με τους πίνακες $\mathbf{G}$ και $\mathbf{G}^{-g}$ να αντιπροσωπεύουν τους πίνακες των αντίστοιχων γραμμικών μετασχηματισμών.

Γνωρίζομε επίσης ότι κάθε διάνυσμα που περιέχεται σε ένα διανυσματικό χώρο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων μιας βάσης του χώρου. Έτσι για παράδειγμα ο διανυσματικός χώρος των παραμέτρων που έχει διάσταση M παράγεται από ισάριθμα διανύσματα βάσης $\mathbf{m}_j$ και κάθε διάνυσμα $\mathbf{m}$ εκφράζεται μέσω της βάσης από μία σχέση της μορφής :

$$\mathbf{m}=\sum_{j=1}^{M}a_j\mathbf{m}_j \tag{6.1}$$

Ας θεωρήσομε τώρα δύο διαφορετικά διανύσματα $\mathbf{m}_1$ και $\mathbf{m}_2$ που αποτελούν λύση του γραμμικού αντιστρόφου προβλήματος $\mathbf{Gm}=\mathbf{d}$.

Τότε θα ισχύει $\mathbf{Gm}_1=\mathbf{d}$ και $\mathbf{Gm}_2=\mathbf{d}$, οπότε

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2)=0 \tag{6.2}$$

Η διαφορά $\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2$ ανήκει συνεπώς στο μηδενόχωρο του πίνακα $\mathbf{G}$ και η υπόθεση για μηδενόχωρο διάφορο του κενού, μας παραπέμπει αμέσως στην ανυπαρξία μοναδικής λύσης στο διακριτό αντίστροφο πρόβλημα.

Εάν q είναι η τάξη του μηδενόχωρου, $\mathbf{m}^{par}$ είναι μία μη μηδενική λύση του αντιστρόφου προβλήματος $\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$ και $\mathbf{m}_i^{null}$ είναι ένα διάνυσμα του μηδενόχωρου του **G,** μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση του αντίστροφου προβλήματος μέσω της σχέσης

$$\mathbf{m}^{gen} = \mathbf{m}^{par} + \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{m}_i^{null} \tag{6.3}$$

Προφανώς για ένα πίνακα **G,** διαστάσεων NxM θα έχομε $0 \le q \le M$.

<u>Παράδειγμα</u>

Ας θεωρήσομε την απλή εξίσωση

$$\mathbf{Gm} = [\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}]\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = [d] \tag{6.4}$$

που σημαίνει ότι μετρήσαμε τη μέση τιμή της παραμέτρου **m.** Ο πίνακας **G** έχει διαστάσεις 1 x 4 και η τάξη του είναι 1.

Από την άλλη μεριά το ομογενές πρόβλημα $\mathbf{Gm} = 0$, θα πρέπει να έχει 3 (=N-M) γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που παράγουν το μηδενόχωρο. Κατά τα γνωστά, μπορούμε να βρούμε τα διανύσματα που αποτελούν βάση του μηδενόχωρου, βάζοντας τη τιμή 1 κατά σειρά στις εξαρτημένες μεταβλητές και μηδενίζοντας τις υπόλοιπες, ώστε να παραχθούν τα διανύσματα

$$\mathbf{m}_1^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_2^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{m}_3^{null} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Η γενική λύση του γραμμικού αντίστροφού προβλήματος θα είναι τότε

$$\mathbf{m}^{gen} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{m}_i^{null} \tag{6.6}.$$

Ο υπολογισμός κάποιας συγκεκριμένης λύσης στο αντίστροφο πρόβλημα, περνά από την απόδοση τιμών στις παραμέτρους a_i. Επιλέγοντας την ελαχιστοποίηση της νόρμας $\|\mathbf{m}\|_2$ παίρνομε λύση ελαχίστου μήκους και εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή δίνει $a_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$

Συνεπώς η λύση ελαχίστου μήκους δεν περιλαμβάνει διανύσματα του μηδενόχωρου του πίνακα G.

6.2 Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Συνεχίζοντας την αναφορά μας στους διανυσματικούς χώρους, θα δούμε ορισμένα θέματα που αφορούν γραμμικούς μετασχηματισμούς που επιβάλλονται στα συστατικά ενός αντιστρόφου προβλήματος προκειμένου να βελτιώσουν τη διαδικασία παραγωγής της λύσης του.

Θεωρούμε τον πίνακα **T** ενός γραμμικού μετασχηματισμού, που μετασχηματίζει τα διανύσματα των παραμέτρων ενός προβλήματος αλλάζοντας ουσιαστικά τους άξονες αναφοράς (βάσεις του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου).

$$\mathbf{m}' = \mathbf{Tm} \text{ και } \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}' \tag{6.7}$$

Ένα γραμμικό αντίστροφο πρόβλημα μπορεί να αλλάξει λοιπόν βάση αναφοράς μέσω της διαδικασίας :

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm} = \mathbf{GIm} = \mathbf{GT}^{-1}\mathbf{Tm} = \{\mathbf{GT}^{-1}\}\{\mathbf{Tm}\} = \mathbf{G}'\mathbf{m}' \tag{6.8}$$

όπου $\mathbf{G}'$ είναι ο πίνακας του γραμμικού αντίστροφου προβλήματος που ορίζεται για μία καινούργια βάση του **m.**

Εάν υποθέσομε ότι το πρόβλημα είναι υπο-ορισμένο και θέλομε να βρούμε λύση ελαχίστου μήκους, θα αναζητήσουμε την ελαχιστοποίηση του μήκους $L = \mathbf{m}^T\mathbf{m}$

Το μήκος L εκφράζεται στο καινούργιο σύστημα ως :

$$L = \mathbf{m}^T\mathbf{m} = [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}']^T[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}'] = \mathbf{m}'^T[\mathbf{T}^{-1^T}\mathbf{T}^{-1}]\mathbf{m}' \tag{6.9}$$

Εάν μπορέσουμε να βρούμε πίνακα **T** ώστε να ισχύει $[\mathbf{T}^{-1^T}\mathbf{T}^{-1}] = \mathbf{I}$, η λύση ελαχίστου μήκους στα δύο συστήματα θα έχει την ίδια μορφή και συνεπώς η ελαχιστοποίηση του $\mathbf{m}^T\mathbf{m}$ είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του $\mathbf{m}'^T\mathbf{m}'$ Οι μετασχηματισμοί αυτού του είδους που δεν αλλάζουν το μήκος των διανυσμάτων των παραμέτρων ονομάζονται *μοναδιαίοι (unitary)* και είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι σε επιλύσεις αντιστρόφων προβλημάτων.

Ας δούμε δύο παραδείγματα :

6.2.1 Υπο-ορισμένο πρόβλημα

Υποθέτομε ότι έχομε ένα υπο-ορισμένο πρόβλημα της μορφής $\mathbf{Gm=d}$ με τον πίνακα $\mathbf{G}$ διαστάσεων *N*x*M* και $N<M$. Εάν με το μετασχηματισμό οδηγηθούμε σε πίνακα $\mathbf{G'}$ τέτοιο ώστε να μπορούμε να γράψομε αναλυτικά το μετασχηματισμένο πρόβλημα στη μορφή :

$$\begin{bmatrix} G'_{11} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ G'_{21} & G'_{22} & 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ G'_{31} & G'_{32} & G'_{33} & 0 & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & . & . & & & . \\ G'_{N1} & G'_{N2} & G'_{N3} & G'_{N4} & ... & G'_{NN} & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ m'_3 \\ . \\ . \\ . \\ m'_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_N \end{bmatrix} \quad , \qquad (6.10)$$

παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς τις πρώτες *N* τιμές του *m,* $m_1, m_2, ...m_N$ μέσω των άμεσων σχέσεων :

$$m_1^{'est} = d_1 / G'_{11}$$

$$m_2^{'est} = \left[d_2 - G'_{21} m_1^{'est} \right] / G'_{22}$$

$$m_3^{'est} = \left[d_3 - G'_{31} m_1^{'est} - G'_{32} m_2^{'est} \right] / G'_{33}$$

Η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως *ευθεία λύση* (*forward solving*).

Εάν επιθυμούμε να παράγουμε λύση ελαχίστου μήκους, μπορούμε να θέσομε τις υπόλοιπες τιμές του *m* ίσες με 0 ($m_i^{'est} = 0, i = N+1, M$), αφού από τη μορφή του πίνακα $\mathbf{G'}$ είναι φανερό ότι δεν επηρεάζουν τις τιμές του **d**.

Η λύση μας στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων θα προκύψει από τη σχέση $\mathbf{m}^{est} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{m}^{'est}$ που αποτελεί λύση ελαχίστου μήκους.

Ένας μετασχηματισμός αυτού του είδους που «τριγωνοποιεί» τον πίνακα $\mathbf{G}$ χαρακτηρίζεται μετασχηματισμός *Householder*[1]. Δεν θα αναφερθούμε εδώ σε τρόπο υπολογισμού του.

6.2.2. Υπερ-ορισμένο πρόβλημα

Ας θεωρήσομε τώρα της μορφής $\mathbf{Gm=d}$ με τον πίνακα $\mathbf{G}$ διαστάσεων *N*x*M* και $M<N$. Ζητάμε λύση που να ελαχιστοποιεί το «λάθος» $E=\mathbf{e}^T\mathbf{e}$. Εάν βρούμε ένα

[1] Δεν γνωρίζω κατάλληλο ελληνικό όρο για τον εν λόγω μετασχηματισμό.

μετασχηματισμό τέτοιο ώστε επιδρώντας στο λάθος πρόβλεψης $\mathbf{e}(\mathbf{e}^{'} = \mathbf{Te})$ να οδηγεί σε ελαχιστοποίηση του $E^{'} = \mathbf{e}^{'T}\mathbf{e}^{'}$ όταν ελαχιστοποιείται και το *E,* και να μετασχηματίζει τον πίνακα **G** στον πίνακα $\mathbf{G}'$ που να έχει άνω τριγωνική μορφή, θα έχομε

$$\mathbf{e}^{'} = \mathbf{Te} = \mathbf{T}(\mathbf{d} - \mathbf{Gm}) = \mathbf{Td} - \mathbf{TGm} = \mathbf{d}' - \mathbf{G}^{'}\mathbf{m} \qquad (6.11)$$

που αναλυτικά γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} e_1^{'} \\ e_2^{'} \\ e_3^{'} \\ . \\ e_M^{'} \\ . \\ . \\ e_N^{'} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G_{11}^{'} & G_{12}^{'} & G_{13}^{'} & G_{14}^{'} & . & G_{1M}^{'} \\ 0 & G_{22}^{'} & G_{23}^{'} & G_{24}^{'} & . & G_{2M}^{'} \\ 0 & 0 & G_{33}^{'} & G_{34}^{'} & . & G_{3M}^{'} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{MM}^{'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1^{'} \\ m_2^{'} \\ m_3^{'} \\ . \\ m_M^{'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1^{'} \\ d_2^{'} \\ d_3^{'} \\ . \\ d_M^{'} \\ . \\ . \\ d_N^{'} \end{bmatrix} \qquad (6.12)$$

Στην περίπτωση αυτή βλέπομε ότι οποιαδήποτε επιλογή των $m_i^{'est}$ δεν επηρεάζει τις τελευταίες *N-M* εξισώσεις . Επομένως μπορούμε να ζητήσομε να μηδενίζονται οι πρώτες *M* τιμές του $\mathbf{e}'$ οπότε ικανοποιούνται ακριβώς οι πρώτες Μ εξισώσεις του συστήματος που παίρνουν τη μορφή $\mathbf{d}' = \mathbf{G}^{'}\mathbf{m}^{'}$. Επί πλέον λόγω της μορφής του πίνακα $\mathbf{G}'$ μπορούμε να λύσουμε το σύστημα με αντίστροφη διαδικασία Το συνολικό λάθος λοιπόν είναι :

$$E' = \sum_{i=M+1}^{N} e_i^{'2} = \sum_{i=M+1}^{N} d_i^{'2} \,. \qquad (6.13)$$

Με το μετασχηματισμό, διαχωρίσαμε το αντίστροφο πρόβλημα σε ένα μέρος το οποίο αφορά μετρήσεις που ικανοποιούνται επακριβώς και σε ένα άλλο μέρος που αφορά μετρήσεις που δεν μπορούν να ικανοποιηθούν. Η λύση επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το λάθος πρόβλεψης και συνεπώς είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων.