ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

2021-2022

Διάλεξη 10

Κυκλώματα RL, Αμοιβαία Επαγωγή, Ταλαντώσεις

Μιχάλης Ταρουδάκης

Νόμος Faraday

Ηλεκτρεγερτική Δύναμη Επαγωγής (ΗΕΔ – EMF)

Για να δημιουργηθεί ΗΕΔ θα πρέπει να υπάρχει μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από ένα βρόχο

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

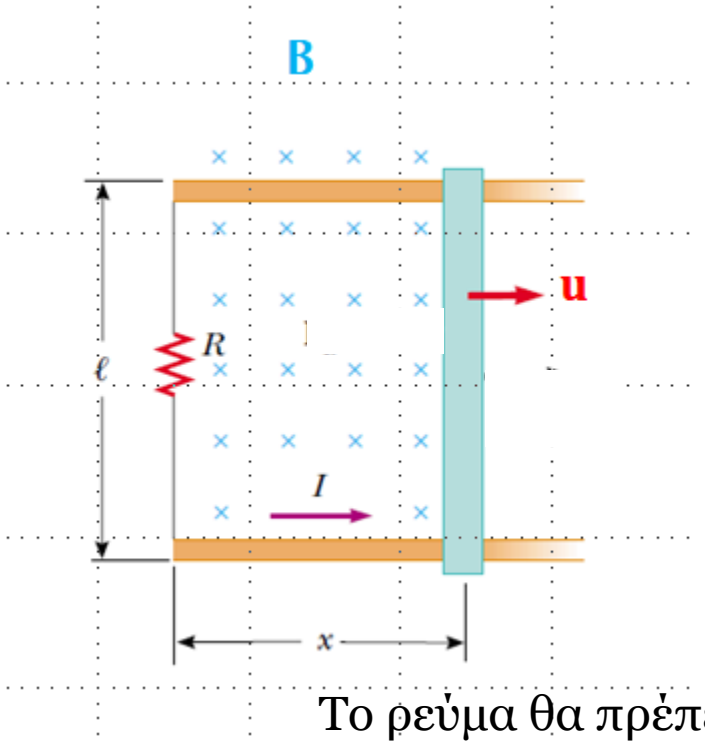
$$\Phi_{\mathrm{B}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

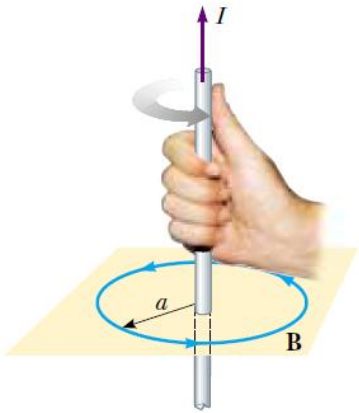
N βρόχοι σε σειρά (πηνίο)

$$\varepsilon = -N\frac{\partial \Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Νόμος Lenz

Το επαγόμενο ρεύμα σε ένα βρόχο είναι προς την κατεύθυνση που παράγει μαγνητικό πεδίο που αντιστέκεται στη μεταβολή της μαγνητικής ροής στην επιφάνεια του βρόχου





Το ρεύμα θα πρέπει να είναι τέτοιο που να μειώνει το αρχικό μαγνητικό πεδίο

Νόμος Faraday

Κίνηση πλαισίου και μεταβολή μαγνητικού πεδίου

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t} = -\oint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Αυτεπαγωγή

Φαινόμενο αυτεπαγωγής :

Σε ένα πλαίσιο, μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επομένως μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου του πλαισίου και συνεπώς εμφάνιση ΗΕΔ εξ επαγωγής

Η παρουσία χρονικά μεταβαλλόμενου ρεύματος σε ένα κύκλωμα επάγει ΗΕΔ αντίθετη προς την ΗΕΔ από την οποία προκλήθηκε το χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα.

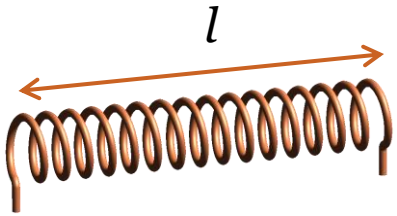
Αυτεπαγωγή Σωληνοειδούς

Ιδανικό σωληνοειδές μήκους l με επιφάνεια σπείρας S και αριθμό σπειρών N

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Bl$$

Από Νόμο Ampere : $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Bl = \mu_0 NI$

$$n = \frac{N}{l} \qquad B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

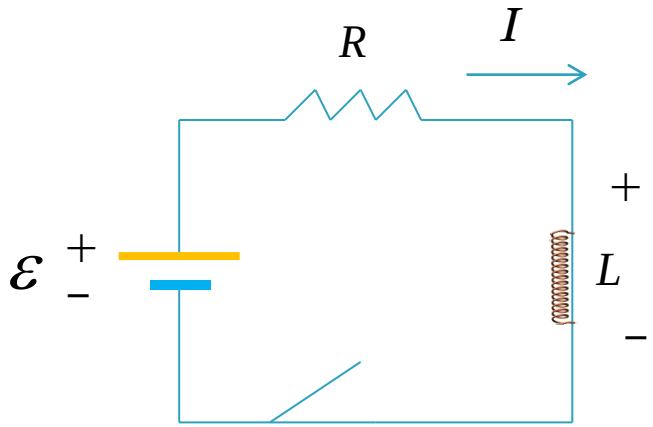


$$\Phi_B = BS = \mu_0 \frac{NS}{l} I$$

$$\varepsilon_{dL} = -N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -N \mu_0 nS \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Κυκλώματα RL

Η τοποθέτηση ενός πηνίου σε ένα κύκλωμα με υψηλό συντελεστή αυτεπαγωγής έχει ως συνέπεια την επιβράδυνση των αλλαγών που επέρχονται στο κύκλωμα λόγω π.χ. αιφνίδιας αύξησης ή μείωσης της τάσης του ρεύματος.



$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$ Νόμος Kirchhoff

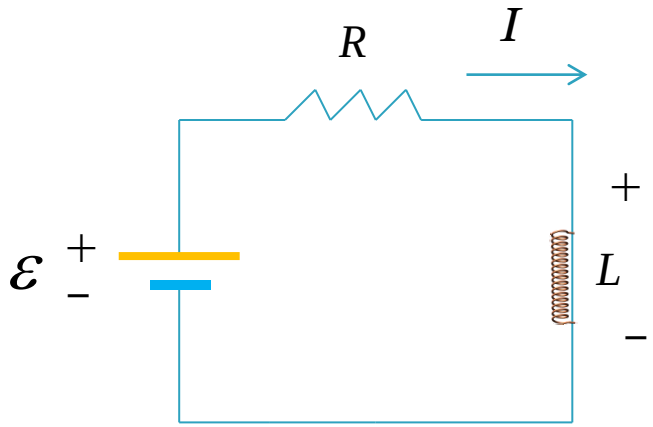
$$x = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) - I \qquad dx = -dI$$

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t$$

Κυκλώματα RL

Η τοποθέτηση ενός πηνίου σε ένα κύκλωμα με υψηλό συντελεστή αυτεπαγωγής έχει ως συνέπεια την επιβράδυνση των αλλαγών που επέρχονται στο κύκλωμα λόγω π.χ. αιφνίδιας αύξησης ή μείωσης της τάσης του ρεύματος.



$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$ Νόμος Kirchhoff

$$x = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) - I \qquad \ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t$$

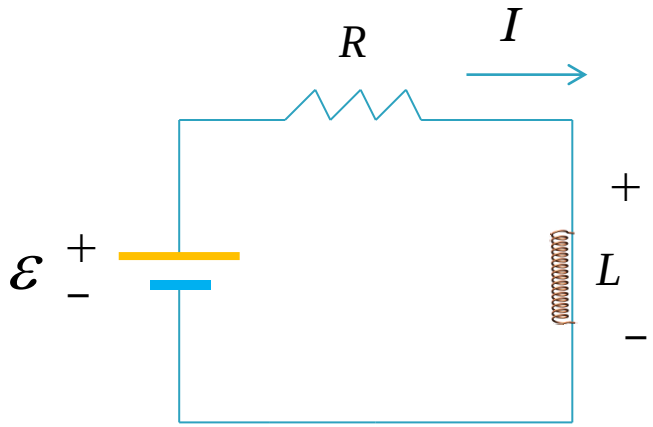
$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

$$t = 0,\ I = 0 \qquad x_0 = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) - I(0) = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) - I = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

Κυκλώματα RL

Η τοποθέτηση ενός πηνίου σε ένα κύκλωμα με υψηλό συντελεστή αυτεπαγωγής έχει ως συνέπεια την επιβράδυνση των αλλαγών που επέρχονται στο κύκλωμα λόγω π.χ. αιφνίδιας αύξησης ή μείωσης της τάσης του ρεύματος.



$$\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) - I = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) e^{-Rt/L}$$

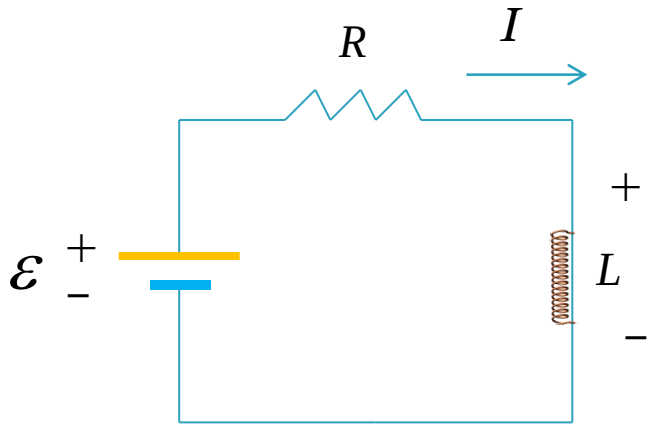
$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$ Σταθερά κυκλώματος

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Κυκλώματα RL

Η τοποθέτηση ενός πηνίου σε ένα κύκλωμα με υψηλό συντελεστή αυτεπαγωγής έχει ως συνέπεια την επιβράδυνση των αλλαγών που επέρχονται στο κύκλωμα λόγω π.χ. αιφνίδιας αύξησης ή μείωσης της τάσης του ρεύματος.



$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

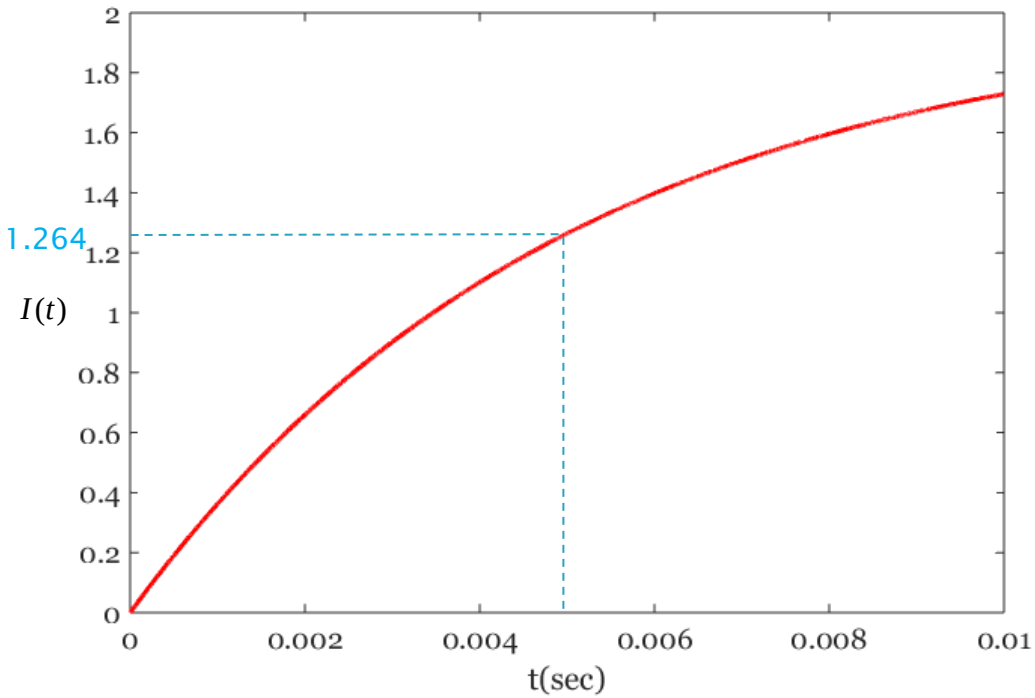
$$t = \tau$$

$$I(\tau) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = 0.632\frac{\varepsilon}{R}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-t/\tau}$$

Κυκλώματα RL



$$\varepsilon = 12V$$

$$R = 6\Omega$$

$$L = 30\times10^{-3}\ H$$

$$\frac{\varepsilon}{R} = 2 \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\tau = 5\times10^{-3} = 0.005$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$I(\tau) = 0.632\frac{\varepsilon}{R} = 1.264$$

Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

$$\varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt}$$

$$I\varepsilon = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dU_L}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Ισχύς που αποθηκεύεται στο πηνίο

$$U_L = \int dU_L = \int_0^I LIdI = L\int_0^I IdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Ενέργεια αποθηκευμένη σε πυκνωτή

$$U_c = \frac{1}{2}C\left(\Delta V\right)^2$$

Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

$$L = \mu_0 n^2 S l$$ Συντελεστής επαγωγής σωληνοειδούς

$$B = \mu_0 n I \qquad I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

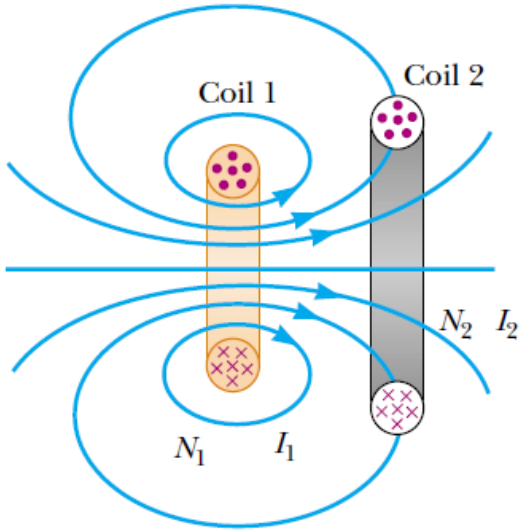
$$U_L = \frac{1}{2} L I^2$$

$$U_L = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S l \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} S l$$

Ενέργεια ανά μονάδα όγκου $u_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ $\qquad u_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Από κοινού επαγωγή

$1 \rightarrow 2: \quad \Phi_{12}$ Μαγνητική ροή από το ρεύμα του πηνίου 1 στο 2.



Serway

Έχουμε δει $L = N \dfrac{\Phi_B}{I}$

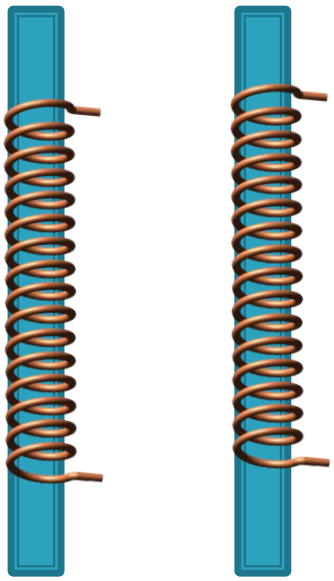
Ορίζουμε ως συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής $M_{12} = N_2 \dfrac{\Phi_{12}}{I_1}$

Όσο αυξάνει η απόσταση ανάμεσα στα πηνία μειώνεται η μαγνητική ροή

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $M_{12} = M_{21} = M$

Από κοινού επαγωγή

I_1 I_2



N_1 N_2

$$1 \rightarrow 2: \quad \Phi_{12}$$

Μαγνητική ροή από το ρεύμα του πηνίου 1 στο 2.

$$M_{12} = N_2 \frac{\Phi_{12}}{I_1} \qquad M_{12} = M_{21} = M$$

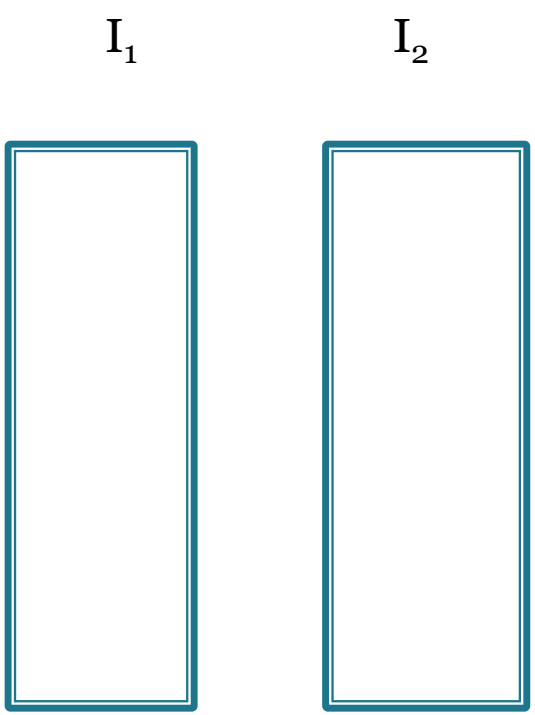
Εάν μεταβάλλεται το ρεύμα στο πηνίο 1

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} = -N_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M_{12} I_1}{N_2}\right) = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

Αντίστοιχα, εάν έχομε ρεύμα στο πηνίο 2 που μεταβάλλεται

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} = -N_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M_{21} I_2}{N_1}\right) = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

Γενίκευση σε δύο πλαίσια



$$1 \rightarrow 2: \quad \Phi_{12}$$

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1 \qquad \Phi_{21} = L_{21} I_2$$

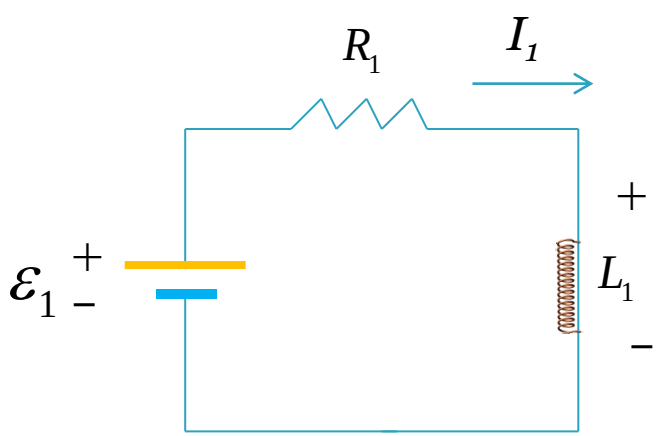
$$\varepsilon_2 = \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

$$L_{12} = L_{21}$$

Γενίκευση σε δύο πλαίσια

Θεωρούμε δύο πλαίσια με αντίστοιχες αντιστάσεις και αυτεπαγωγές



$$\varepsilon_1 - I_1 R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Μόνο το πρώτο

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0$$

Μόνο το δεύτερο

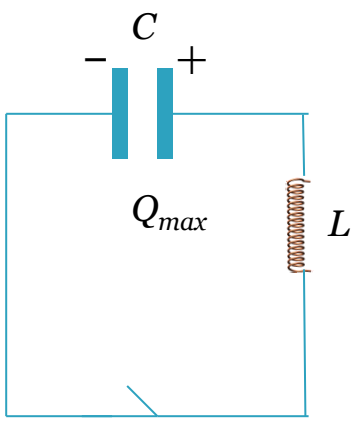
$$\varepsilon_1 - I_1 R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{21} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

Και τα δύο μαζί

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

$$L_{12} = L_{21}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



Δεν υπάρχει αντίσταση

Δεν υπάρχει εκπομπή ενέργειας

Αρχική ενέργεια αποθηκευμένη στον πυκνωτή

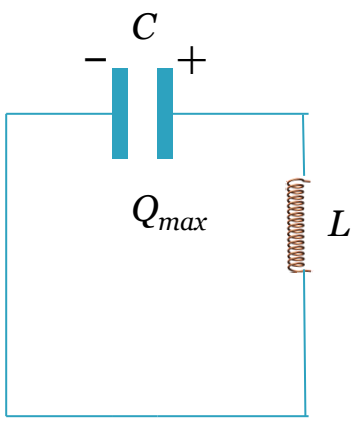
$$U_{c\max} = \frac{Q_{\max}^2}{2C}$$

Με το κλείσιμο του διακόπτη αρχίζει η εκφόρτιση του πυκνωτή

Ενέργεια στον πυκνωτή κατά τη διάρκεια της εκφόρτισης

$$U_c(t) = \frac{Q(t)^2}{2C}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



Δεν υπάρχει αντίσταση

Δεν υπάρχει εκπομπή ενέργειας

Ενέργεια στο πηνίο κατά τη διάρκεια φόρτισής του

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$

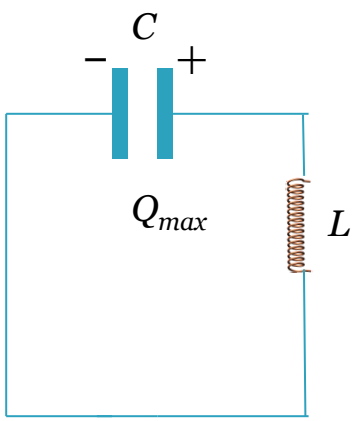
Μέγιστη ενέργεια στο πηνίο

$$U_{L\max} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

$$U(t) = U_C(t) + U_L(t)$$

$$U(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2} L I(t)^2$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



$$U(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2}LI(t)^2$$

Η ενέργεια παραμένει σταθερή

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

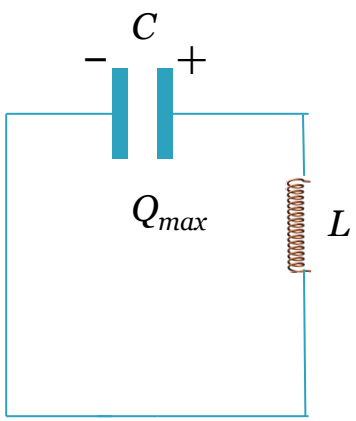
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2}LI(t)^2\right) = 0$$

$$\frac{Q(t)}{C}\frac{dQ(t)}{dt} + LI(t)\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



$$U(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2} L I(t)^2$$

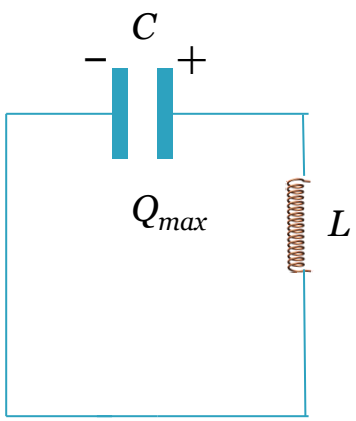
$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$$



Γενική λύση $\quad Q = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

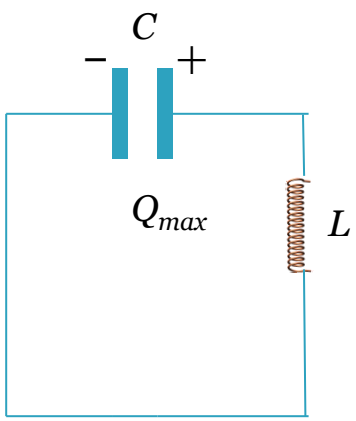
ή $\quad Q = A_1 e^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

Αρχικές συνθήκες $\quad t = 0, \quad Q = Q_{\max}, \quad I = 0$

$$Q = A\cos\omega t + B\sin\omega t \Downarrow A = Q_{\max}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \Downarrow B = 0$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0$$

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t$$

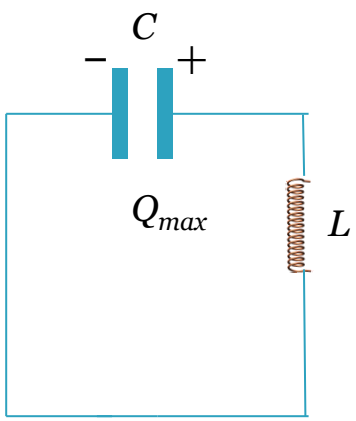
$$I(t) = -\omega Q_0 \sin \omega t$$

$$U_{c\max} = \frac{Q_{\max}{}^2}{2C} \qquad U_{L\max} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

$$U_{c\max} = U_{L\max}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα

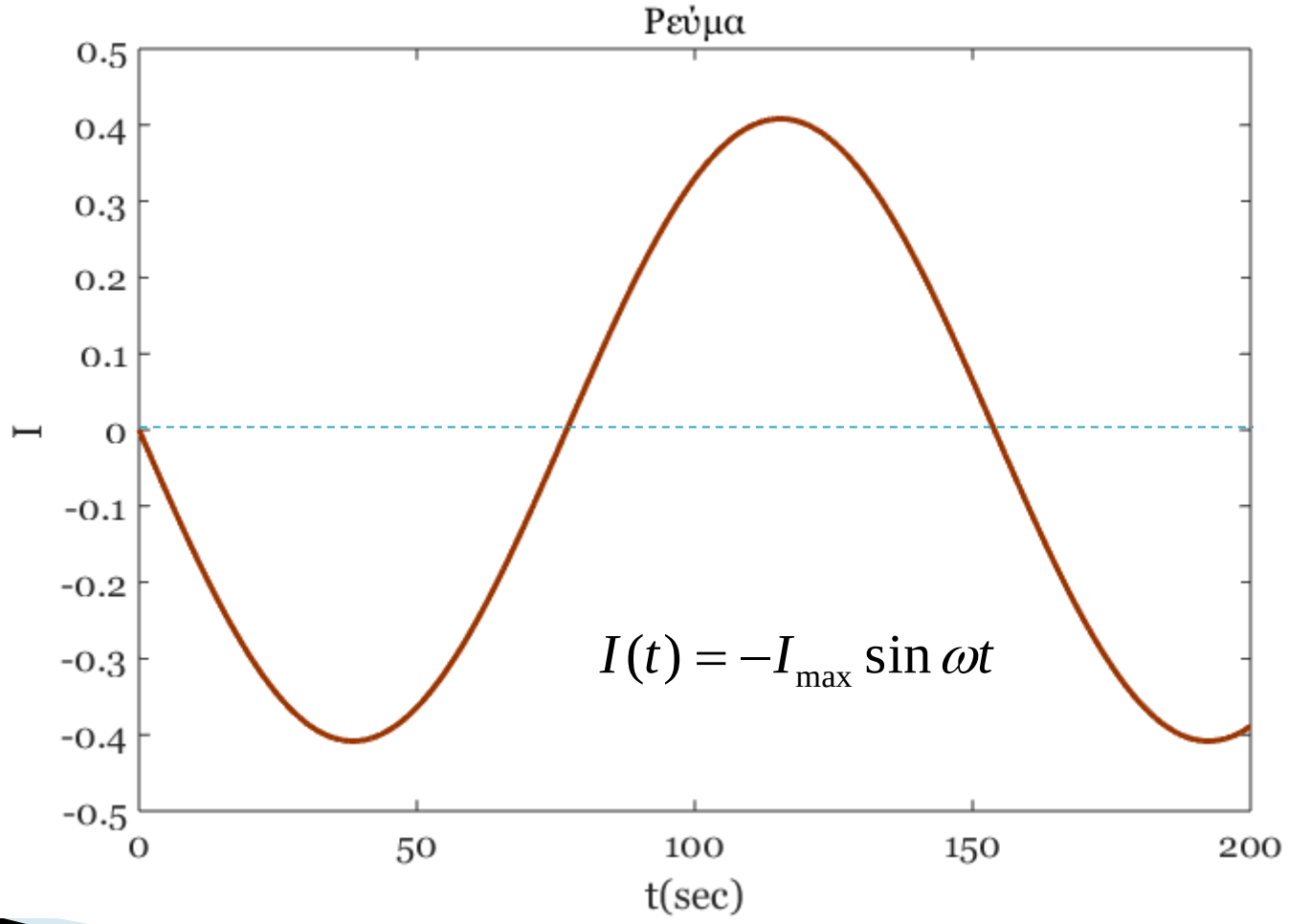
$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t \qquad I(t) = -I_{\max} \sin \omega t$$



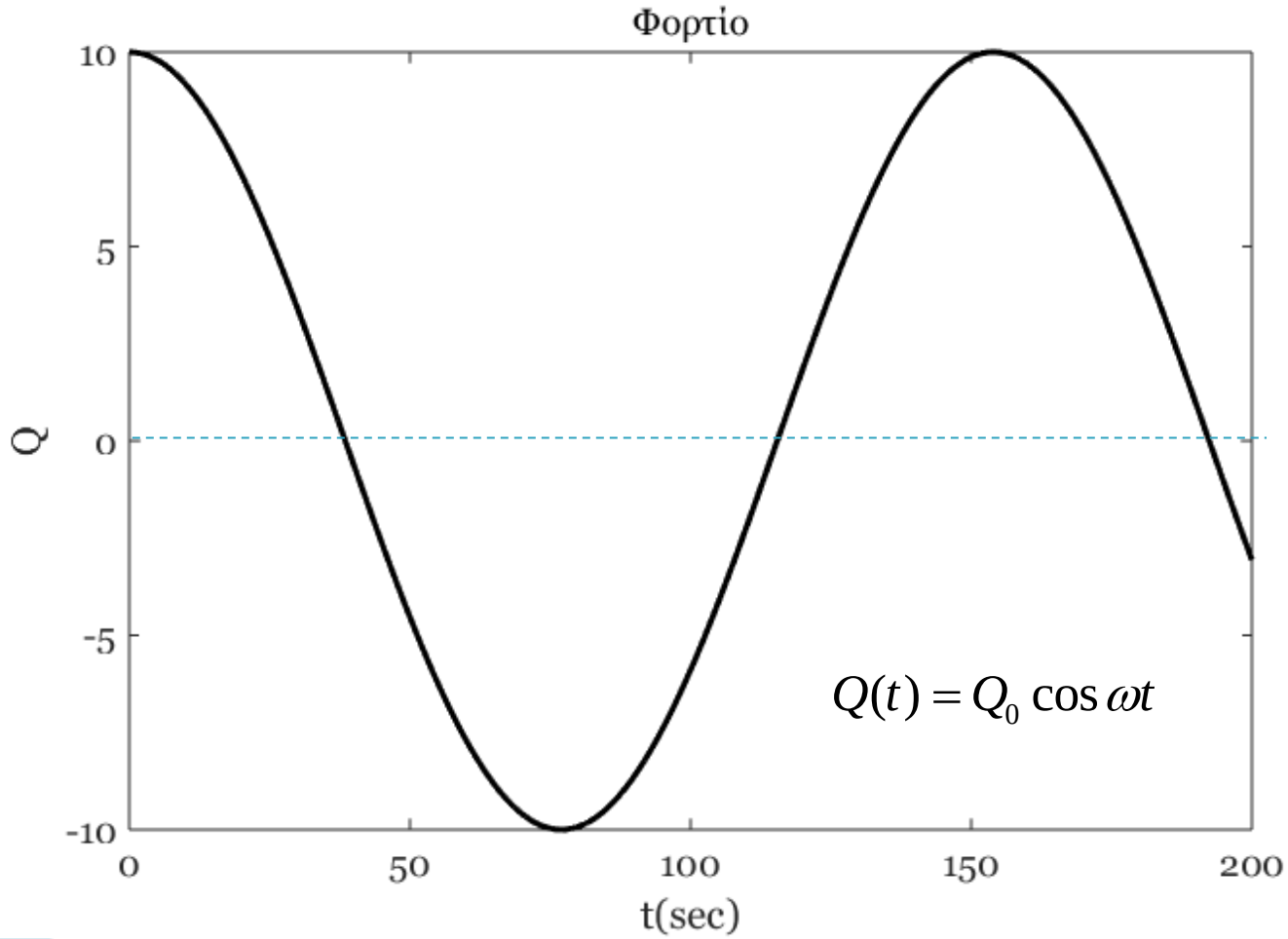
Ατέρμων μη αποσβενύμενη ταλάντωση

Q=10, L=30, C=20

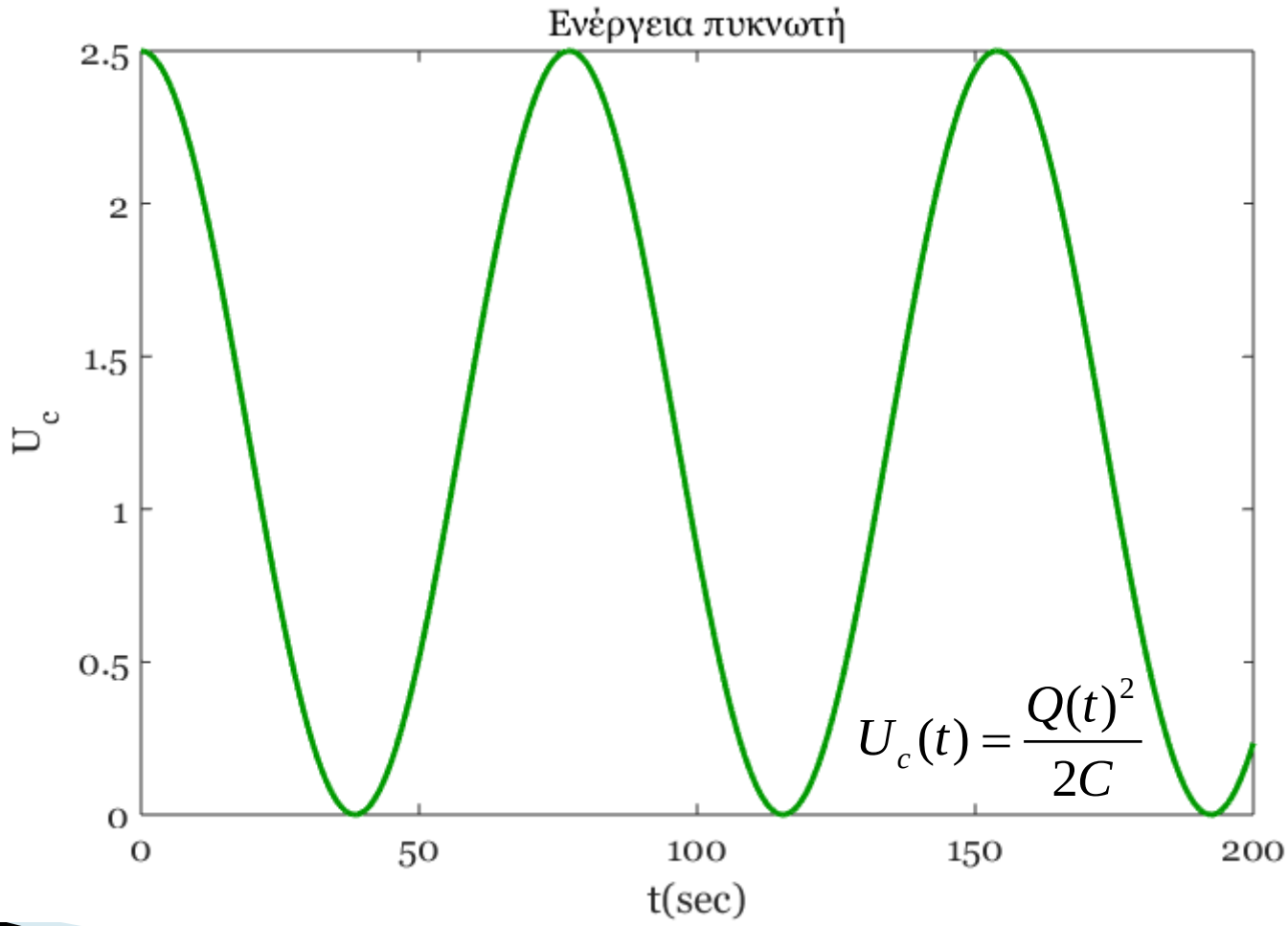
Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα

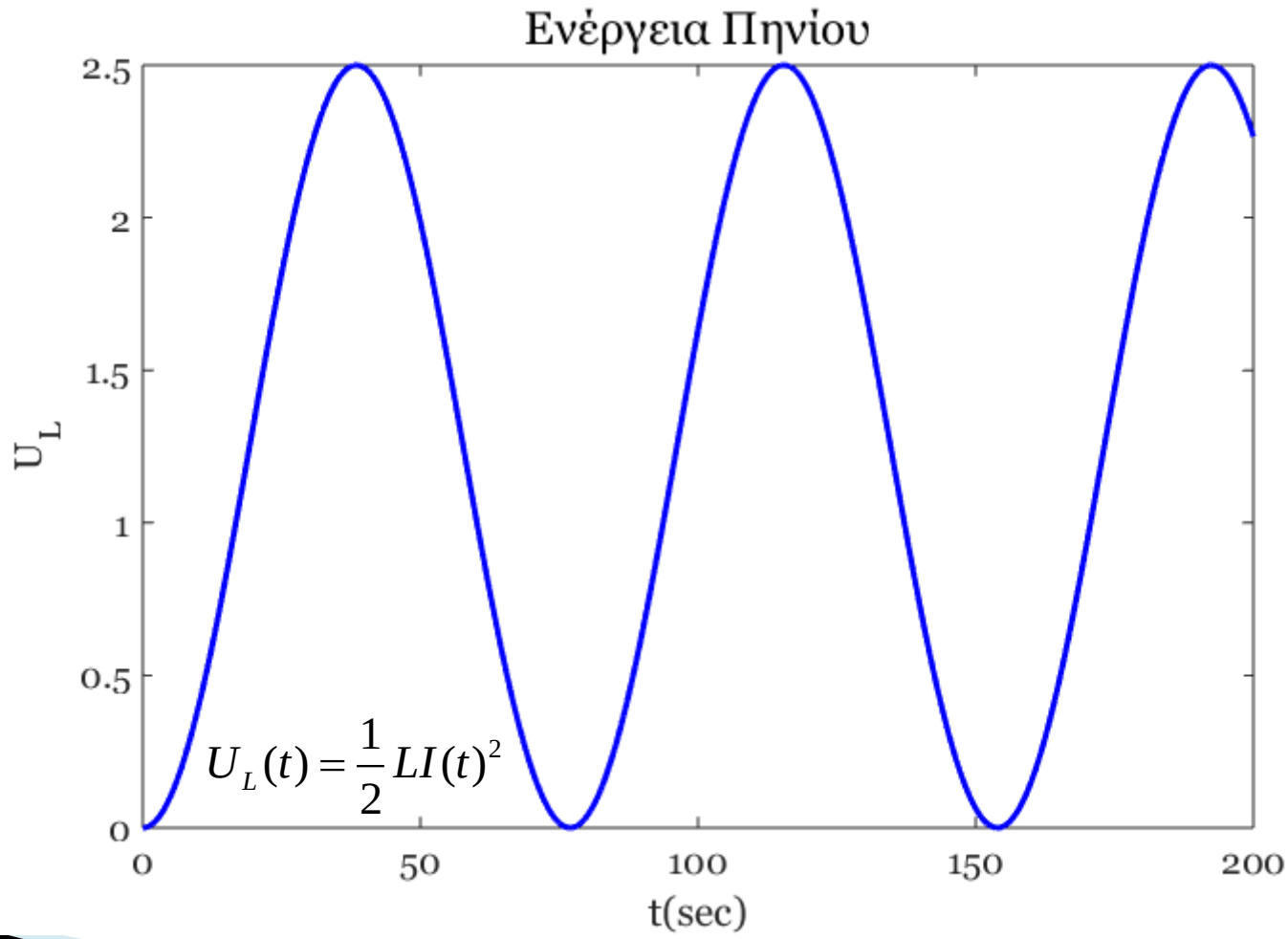


Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα

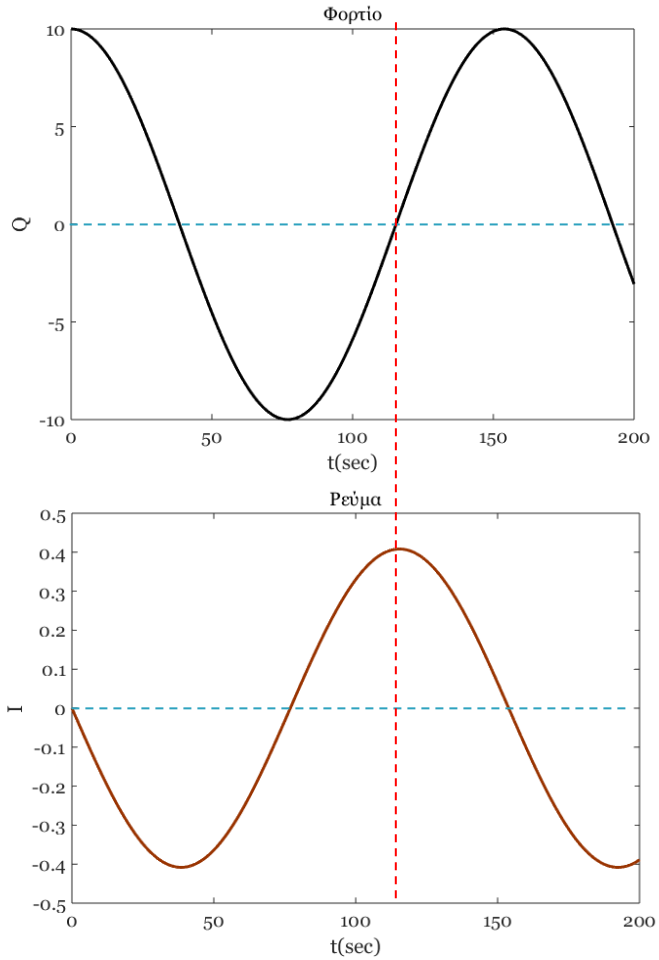


$$U_c(t) = \frac{Q(t)^2}{2C}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



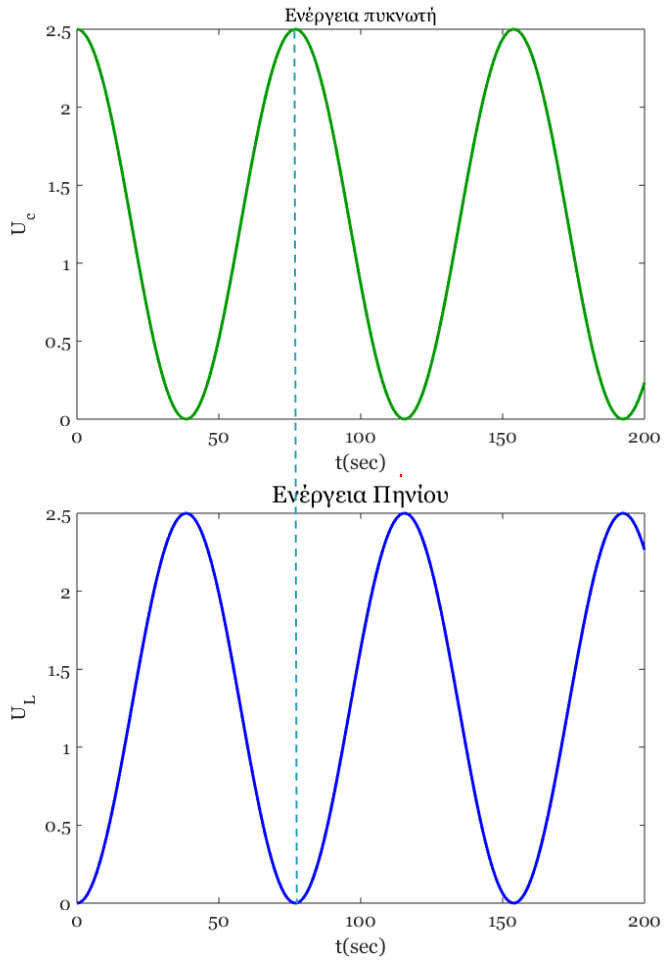
Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = -I_{\max} \sin \omega t$$

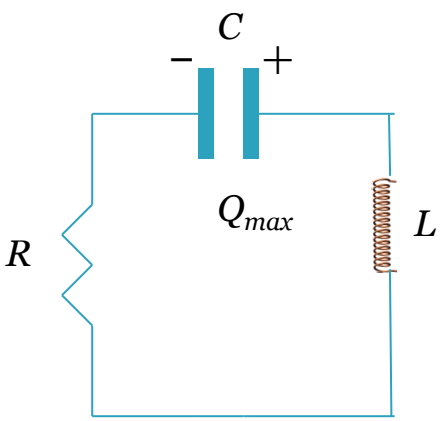
Ταλαντώσεις σε ένα LC κύκλωμα



$$U_c(t) = \frac{Q(t)^2}{2C}$$

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



Δεν υπάρχει εκπομπή ενέργειας

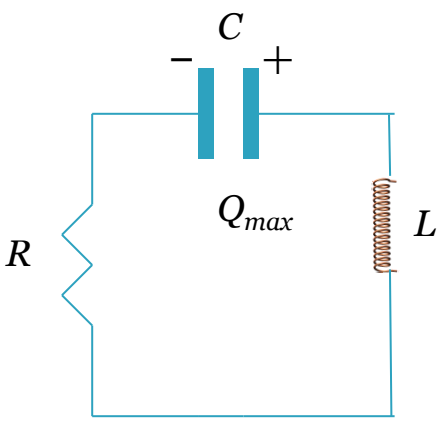
$$U_{c\max} = \frac{Q_{\max}{}^2}{2C} \qquad U_c(t) = \frac{Q(t)^2}{2C}$$

$$U_{L\max} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 \qquad U_L(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$

$$U_{LC}(t) = U_C(t) + U_L(t)$$

$$U_{LC}(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2} L I(t)^2$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$U_{LC}(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2}LI(t)^2$$

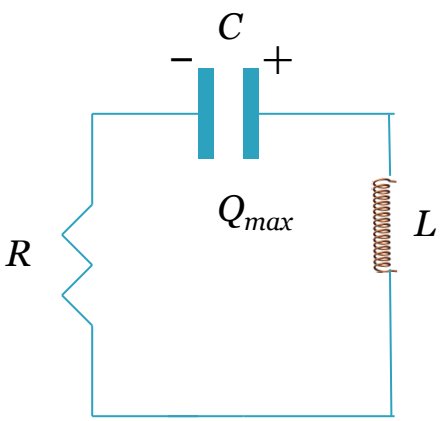
Ο αντιστάτης απορροφά ενέργεια

$$\frac{dU_{LC}}{dt} = \frac{dU_R}{dt}$$

$$\frac{dU_R}{dt} = -I(t)^2 R$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{2C} + \frac{1}{2}LI(t)^2\right) = -I(t)^2 R$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{2C}+\frac{1}{2}LI(t)^2\right)=-I(t)^2R$$

$$\frac{Q}{C}I+LI\frac{d^2Q}{dt^2}+I^2R=0$$

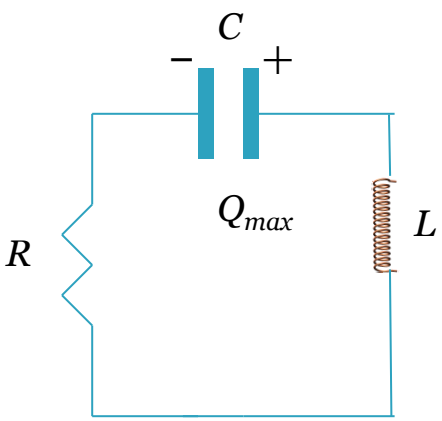
$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}R+\frac{Q}{C}=0$$

Υποθέτουμε R μικρό

$$Q(t)=Q_{\max}e^{-Rt/2L}\cos\omega_d t$$

$$\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\quad\in\mathbb{R}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{2C}+\frac{1}{2}LI(t)^2\right)=-I(t)^2R$$

$$Q(t)=Q_{\max}e^{-Rt/2L}\cos\omega_d t$$

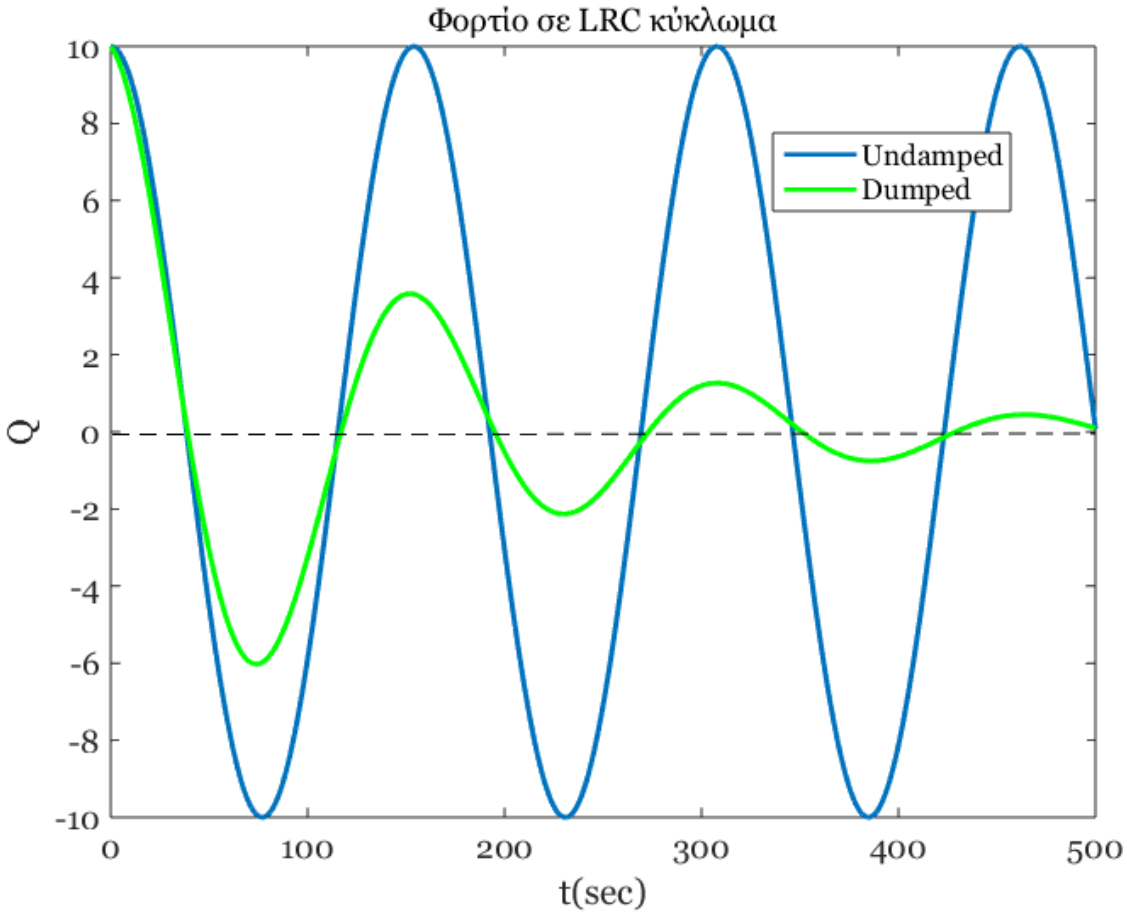
$$\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\gamma=\frac{R}{2L}\qquad \omega_0{}^2=\frac{1}{LC}$$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\qquad Q(t)=Q_{\max}e^{-\gamma t}\cos\omega_d t$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα

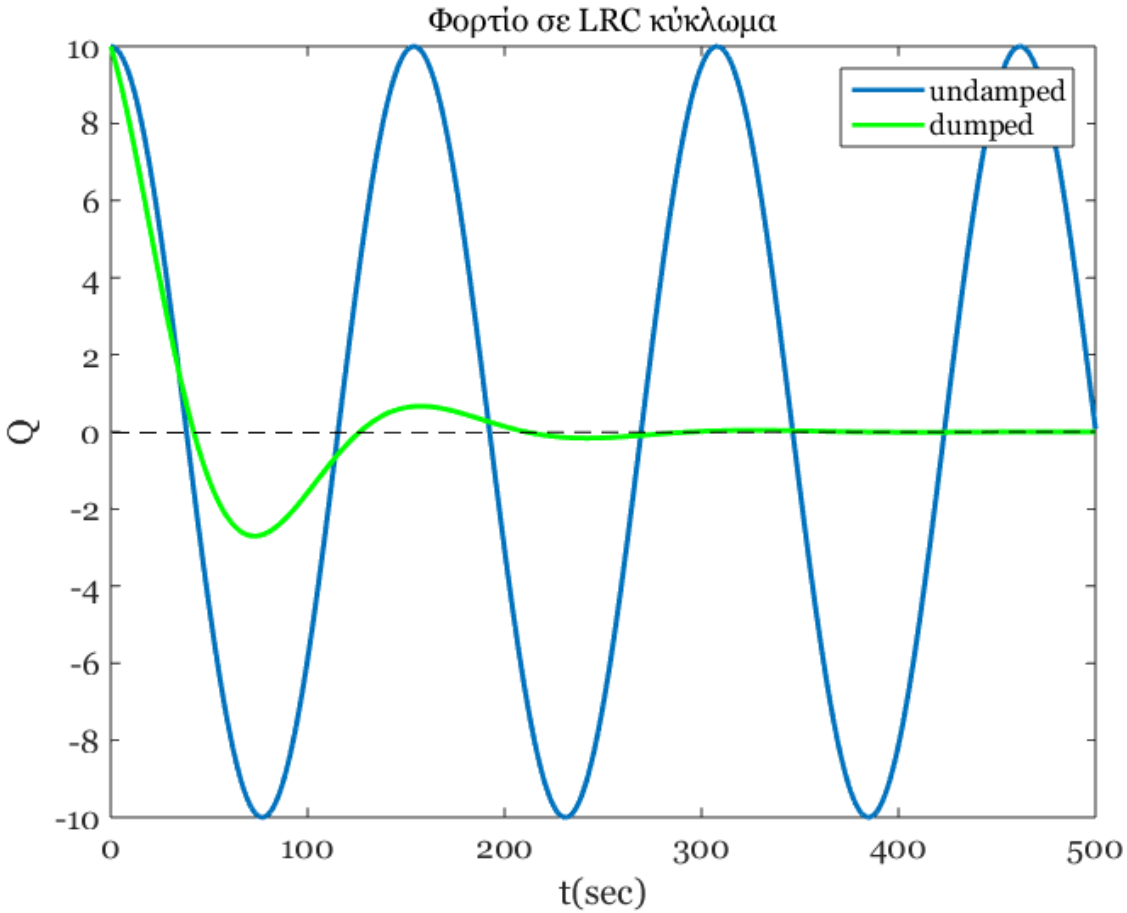
Q_{max}=10, L=30, C=20



R=0.4

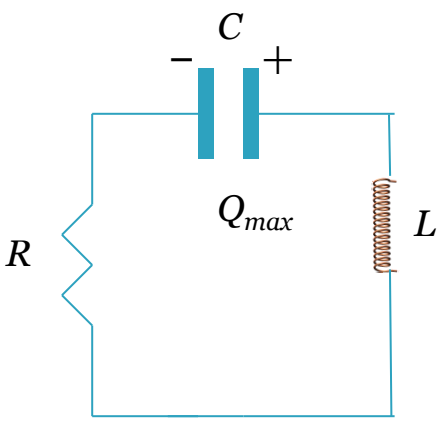
Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα

Q_{max}=10, L=30, C=20



R=1

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

$$Q(t)=e^{rt}$$

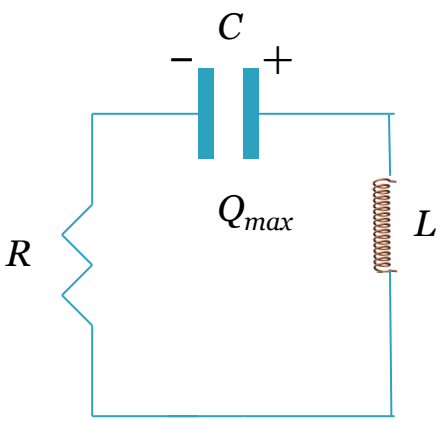
$$Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0$$

$$R^2-4\frac{L}{C}<0$$

$$r=-\frac{R}{2L}\pm i\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$r = a \pm ib$$

$$Q(t) = e^{at}\left(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt\right)$$

$$a = -\frac{R}{2L}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \omega_d$$

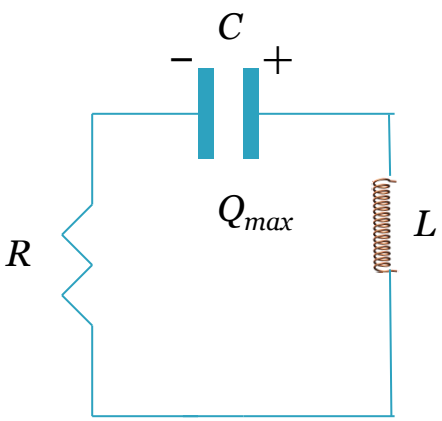
$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t\right)$$

$$t = 0, \quad Q = Q_{\max}, \quad I = 0$$

$$Q(t) = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα

$$a = -\frac{R}{2L}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \omega_d$$



$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t\right)$$

Με διαφορετικές αρχικές συνθήκες

$$Q(t) = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos\left(\omega_d t + \varphi\right)$$

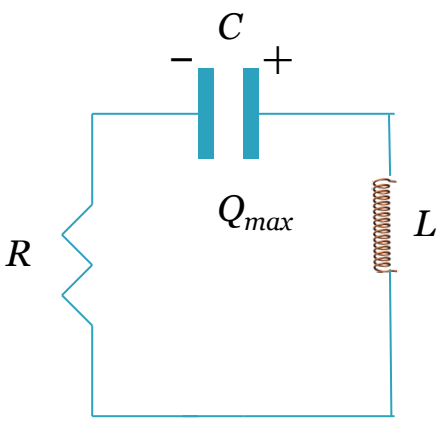
$$\gamma = -a$$

$$Q(t) = Q_{\max} e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_d t + \varphi\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

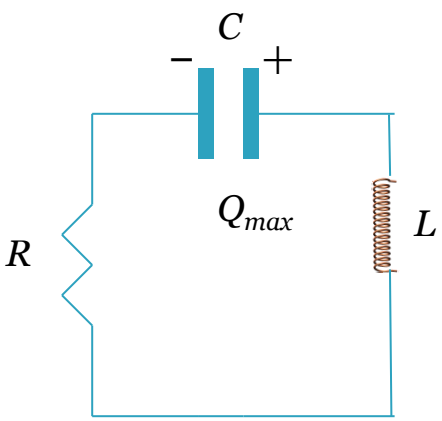
$$Q(t)=e^{rt}$$

$$Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0$$

$$R^2-4\frac{L}{C}>0$$

$$r=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα



$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

$$Q(t)=e^{rt} \qquad R^2-4\frac{L}{C}>0$$

$$r=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$Q(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t} \qquad r_1,r_2<0$$

Υπεραπόσβεση

Μη περιοδική μεταβολή (μείωση)

$$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$$ Κρίσιμη αντίσταση