# ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

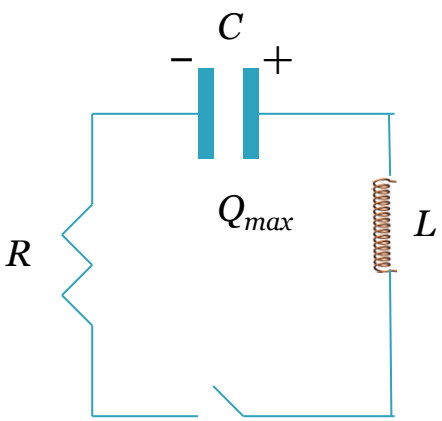
## 2021-2022

## Διάλεξη 11

## Εναλλασσόμενο ρεύμα

Μιχάλης Ταρουδάκης

# Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα




$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

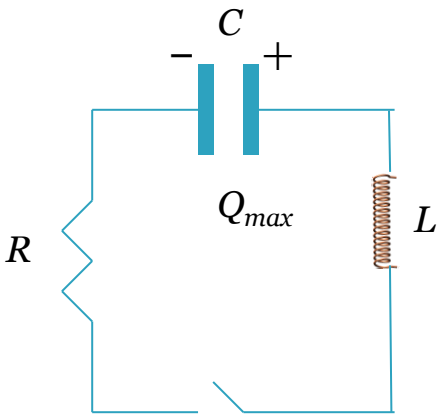
$$Q=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1\cos\omega_d t+C_2\sin\omega_d t\right)$$

$$\gamma=-\frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

$$\omega_d=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$Q(t)=Q_{\max}e^{-\gamma t}\cos\left(\omega_d t+\varphi\right)$$

# Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα

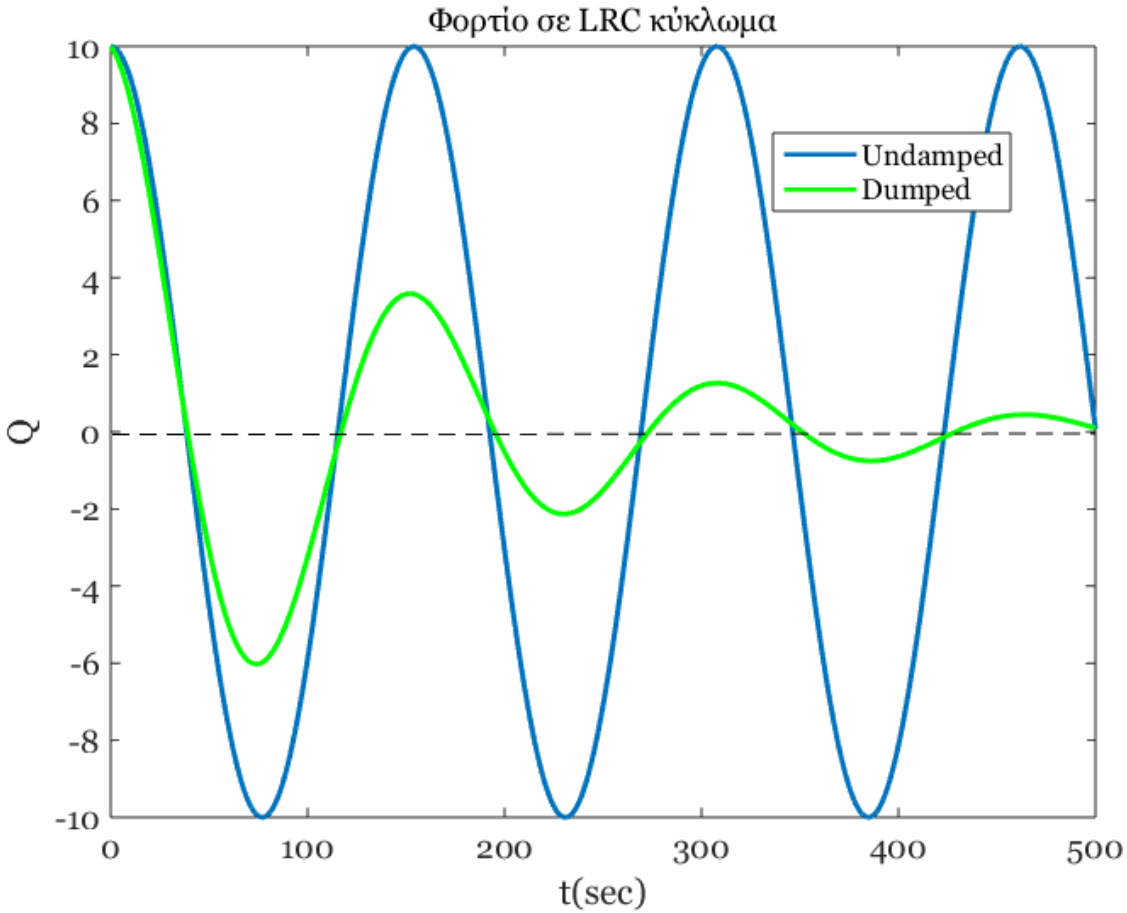



$$t = 0, \quad Q = Q_{\max}, \quad I = 0$$

$$Q(t) = Q_{\max} e^{-\gamma t} \cos \omega_d t$$

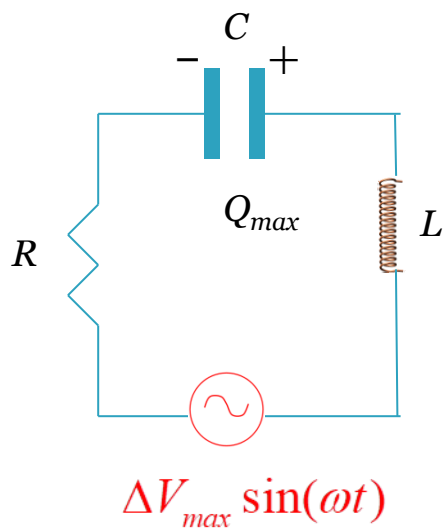
# Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα

$Q$=10, $L$=30, $C$=20




$R$=0.4

# Ταλαντώσεις σε ένα LRC κύκλωμα




$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=\varepsilon$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=\Delta V_{\max}\sin(\omega t)$$

$$Q_h(t)=Q_{\max}e^{-Rt/2L}\cos\left(\omega_d t+\theta\right)$$

$$Q_t=Q_h+Q_f$$

$$Q_f(t)=Q_{f\max}\sin\left(\omega t-\varphi\right)$$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\qquad \gamma=-\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

$$Q_{f\max}=\frac{\Delta V_{\max}/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+4\gamma^2\omega^2}}\qquad \tan\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

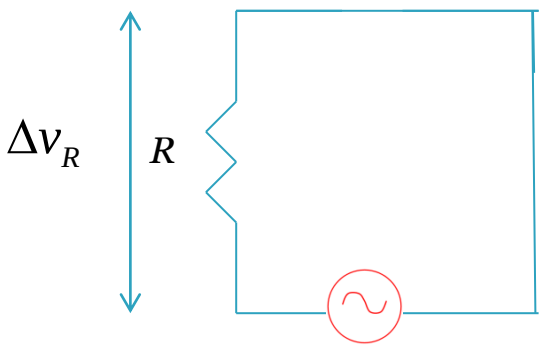
# Κύκλωμα με αντίσταση

$$\Delta v_R + \Delta v = 0$$

$$\Delta v = \Delta V_{\max} \sin(\omega t)$$

$$\Delta v_R = -I_R R$$

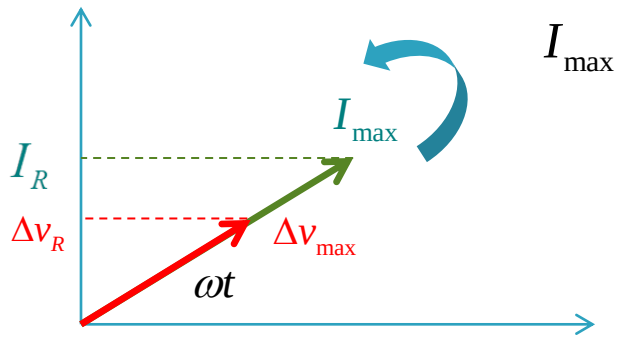
$$I_R = -\frac{\Delta v_R}{R} = \frac{\Delta V_{\max} \sin \omega t}{R} = I_{\max} \sin \omega t$$




$$\Delta V_{max} \sin(\omega t)$$

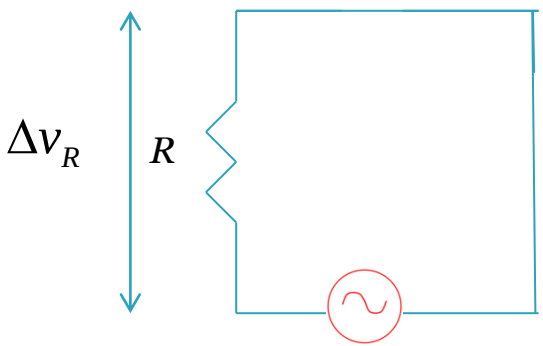
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$I_{\max} = \frac{\Delta V_{\max}}{R}$$

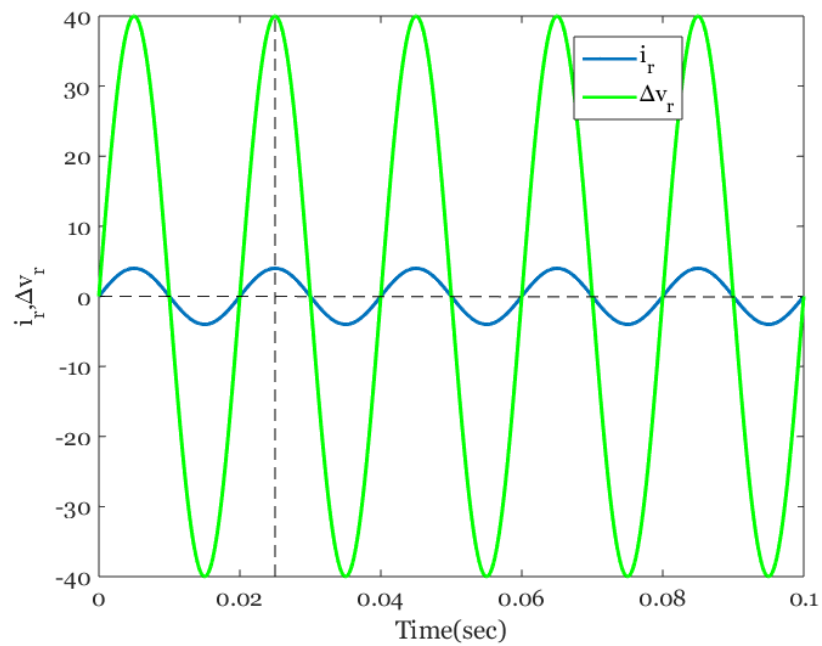



Διάγραμμα φάσορα

# Κύκλωμα με αντίσταση




$\Delta V_{max} \sin(\omega t)$




$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Ρεύμα και τάση είναι σε φάση

# Κύκλωμα με αντίσταση

Μέση τετραγωνική ένταση ρεύματος

$$I_{rms}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{\max}^2 \sin^2(\omega t)dt = \frac{1}{T} I_{\max}^2 \int_0^T \sin^2(\omega t)dt =$$

$$= \frac{I_{\max}^2}{T}\left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right)\Bigg|_0^T = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

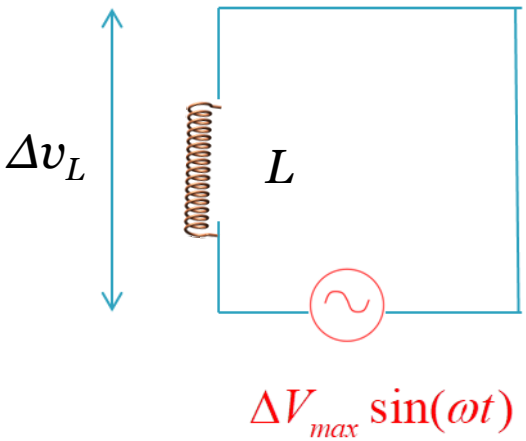
$$I_{rms} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 I_{\max}$$

$$\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 \Delta V_{\max}$$

Μέση ενέργεια που μεταφέρεται σε μία αντίσταση από εναλλασσόμενο ρεύμα

$$P_{av} = I_{rms}^2 R$$

# Κύκλωμα με πηνίο




$$\Delta v_L = -L\frac{dI}{dt}$$

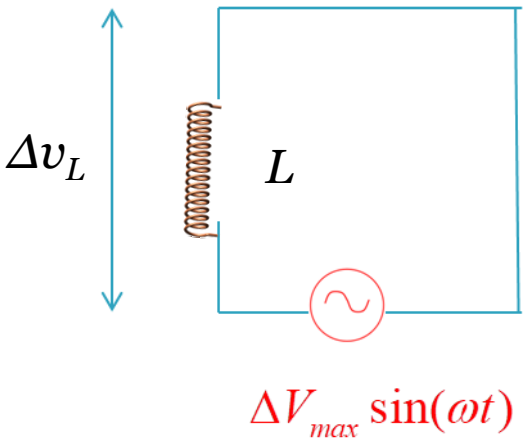
Κανόνας βρόγχου Kirchhoff

$$\Delta v + \Delta v_L = 0$$

$$\Delta v - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Delta v = L\frac{dI}{dt} = \Delta V_{\max}\sin\omega t$$

# Κύκλωμα με πηνίο




$$\Delta v = L\frac{dI}{dt} = \Delta V_{\max}\sin\omega t$$

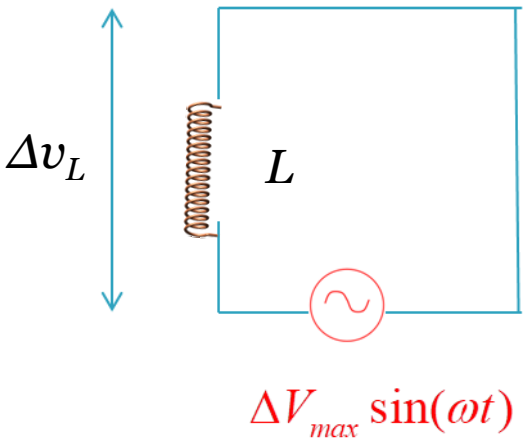
$$dI = \frac{\Delta V_{\max}}{L}\sin\omega t\, dt$$

$$I_L = \frac{\Delta V_{\max}}{L}\int \sin\omega t\, dt = -\frac{\Delta V_{\max}}{\omega L}\cos\omega t$$

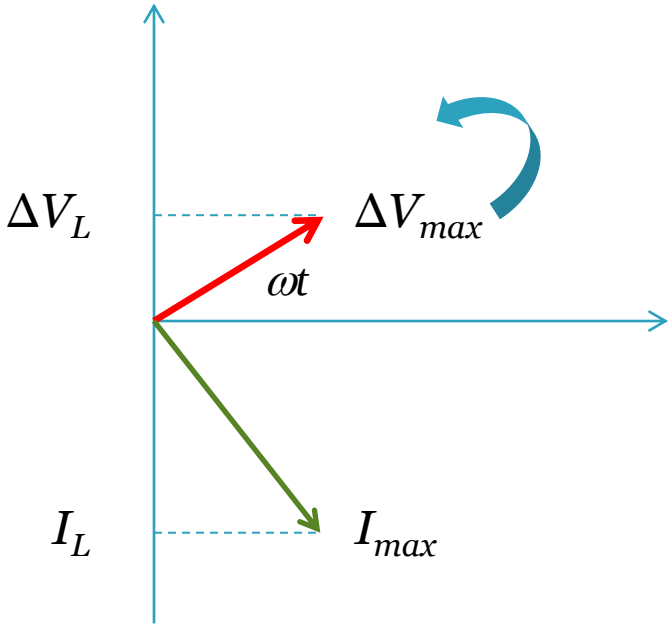
$$I_L = -I_{\max}\cos\omega t \qquad I_{\max} = \frac{\Delta V_{\max}}{\omega L}$$

$$I_L = I_{\max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

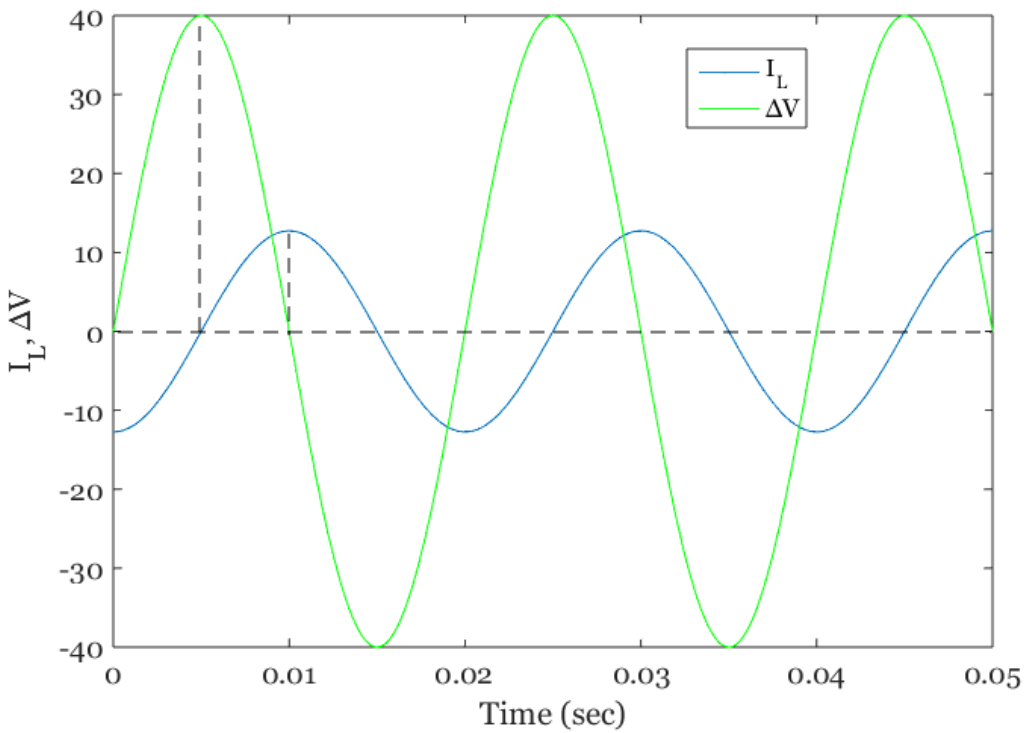
# Κύκλωμα με πηνίο




$$I_L = I_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



# Κύκλωμα με πηνίο




Επαγωγική ανάδραση

$$X_L \equiv \omega L$$

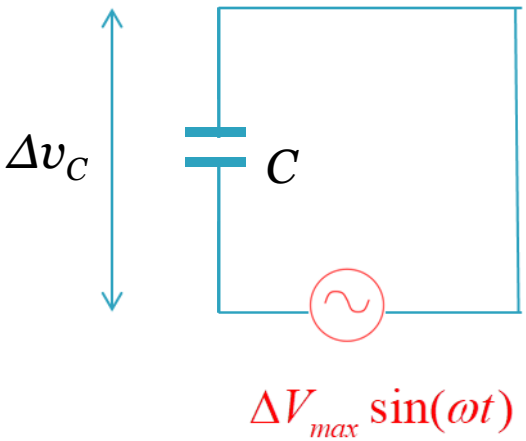
$$I_{\max} = \frac{\Delta V_{\max}}{\omega L} = \frac{\Delta V_{\max}}{X_L}$$

$$\Delta v_L = -L\frac{dI}{dt}$$

Ρεύμα και τάση βρίσκονται σε διαφορά φάσης -π/2

$$\Delta v_L = -\Delta V_{\max} \sin \omega t = -I_{\max} X_L \sin \omega t$$

# Κύκλωμα με πυκνωτή




Κανόνας βρόγχου Kirchhoff

$$\Delta v + \Delta v_C = 0$$

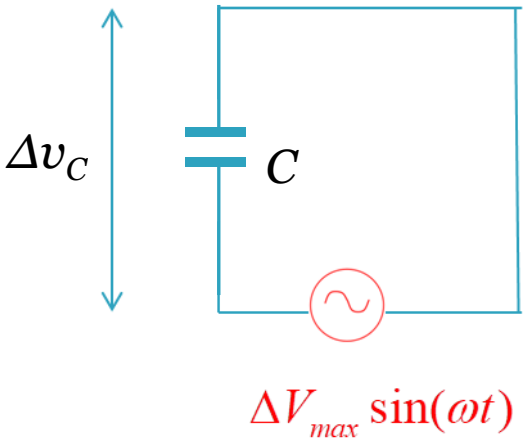
$$\Delta v_C = -\frac{q}{C}$$

$$\Delta v = \frac{q}{C} = \Delta V_{\max} \sin \omega t$$

$$q(t) = C\Delta V_{\max} \sin \omega t$$

$$I_C = \frac{dq}{dt} = \omega C \Delta V_{\max} \cos \omega t$$

# Κύκλωμα με πυκνωτή




$$I_C = \frac{dq}{dt} = \omega C \Delta V_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{\max} = \omega C \Delta V_{\max}$$

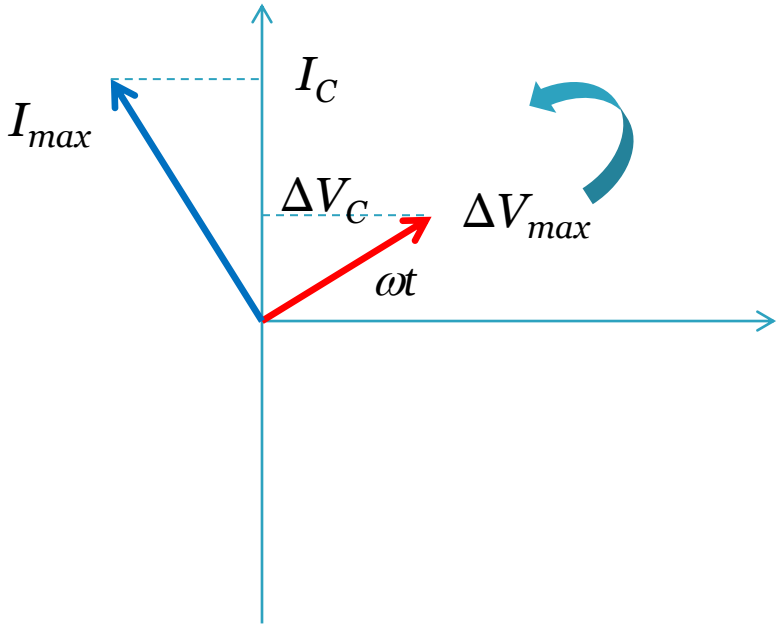
$$I_C = I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Χωρητική ανάδραση $\quad X_C \equiv \frac{1}{\omega C}$

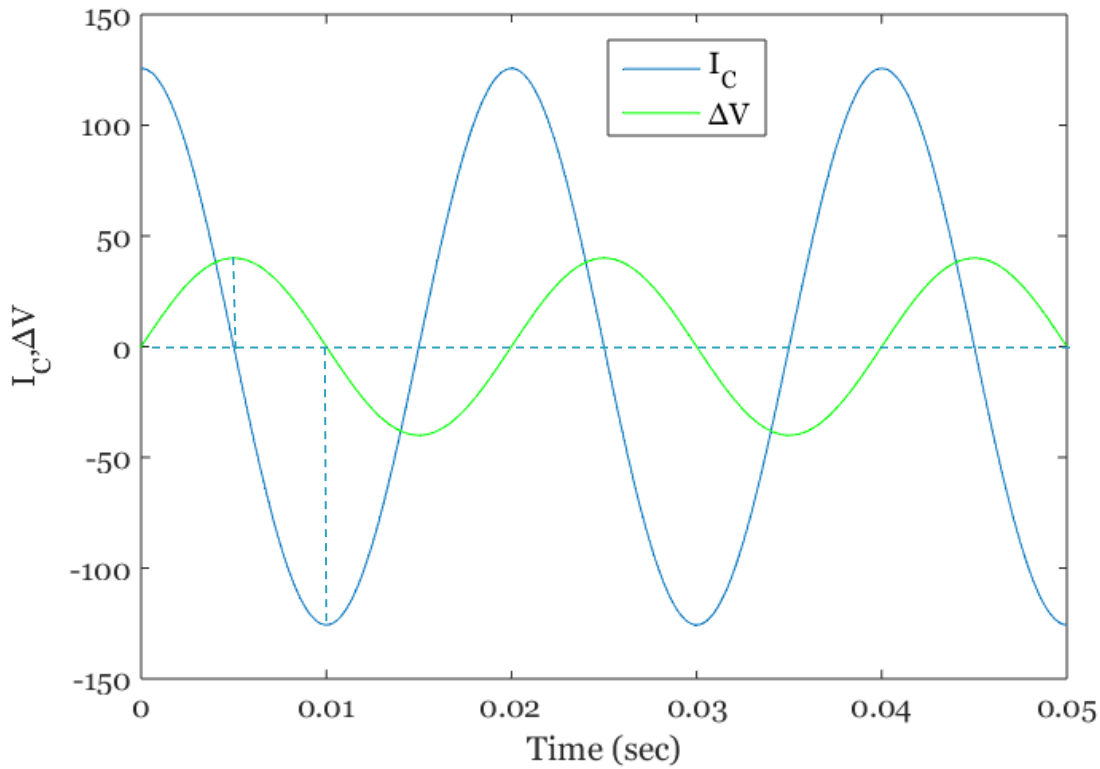
$$I_{\max} = \frac{\Delta V_{\max}}{X_C}$$

# Κύκλωμα με πυκνωτή

$$\Delta V_C = \Delta V_{\max} \sin \omega t = I_{\max} X_C \sin \omega t$$

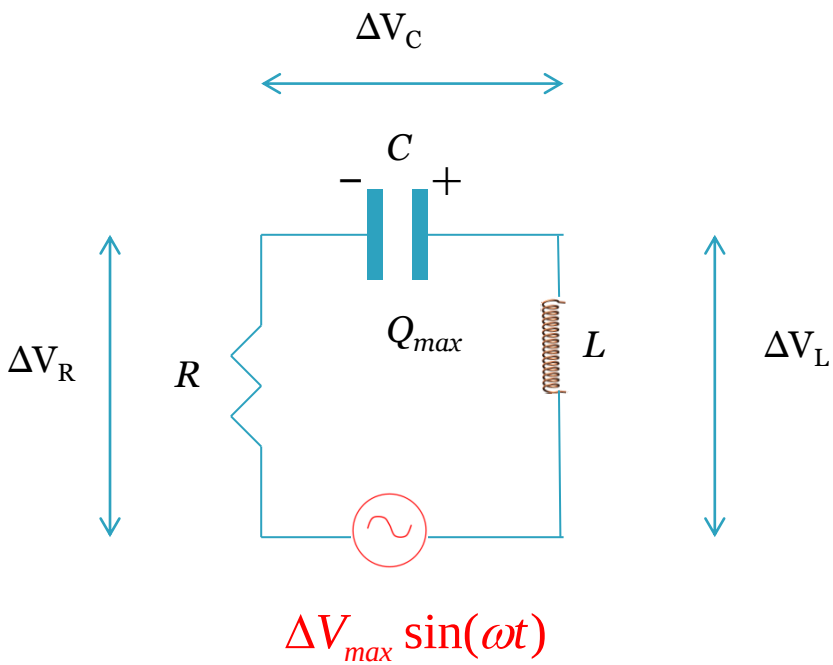


# Κύκλωμα με πυκνωτή




Ρεύμα και τάση βρίσκονται σε διαφορά φάσης π/2

# Κύκλωμα RLC εν σειρά

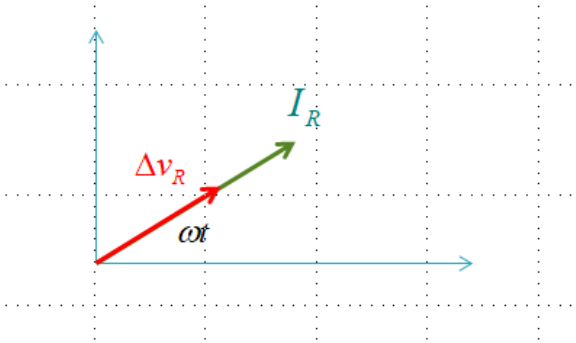



Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

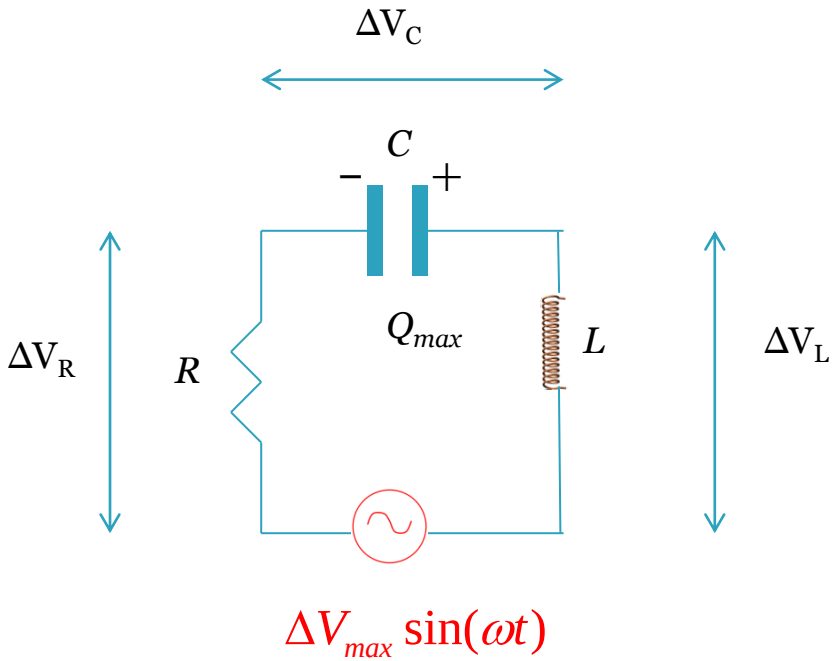
Γνωρίζουμε τη διαφορά φάσης που έχουν οι τάσεις στα διάφορα στοιχεία σε σχέση με το ρεύμα

$$\Delta v_R = I_{\max} R \sin \omega t = \Delta V_R \sin \omega t$$

$$I = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$$



# Κύκλωμα RLC εν σειρά

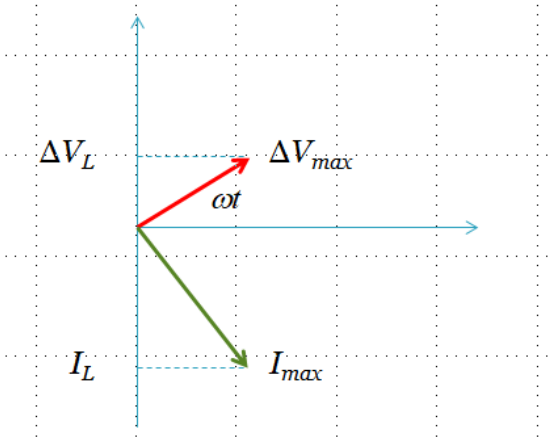



Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

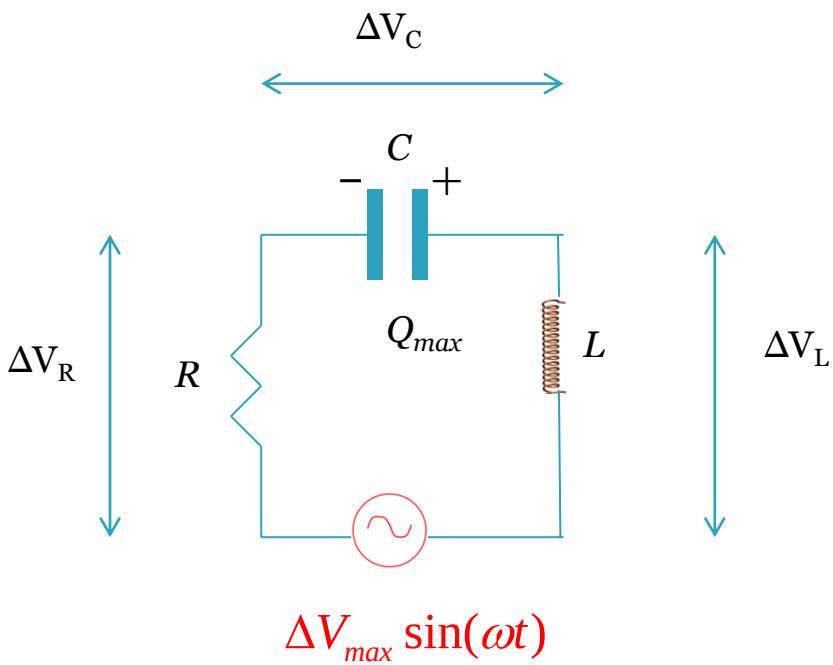
Γνωρίζουμε τη διαφορά φάσης που έχουν οι τάσεις στα διάφορα στοιχεία σε σχέση με το ρεύμα

$$\Delta v_L = I_{\max} X_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \Delta V_L \cos \omega t$$

$$I = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$$



# Κύκλωμα RLC εν σειρά

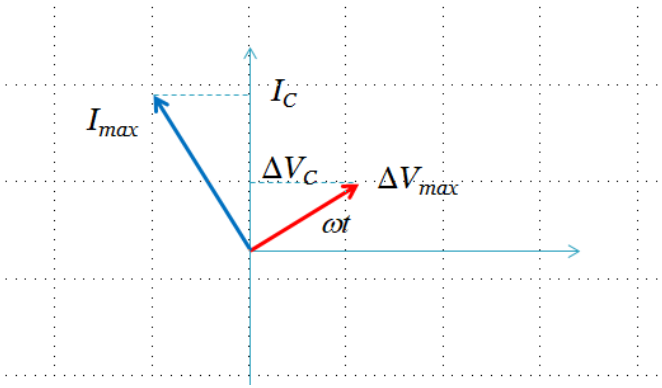



Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

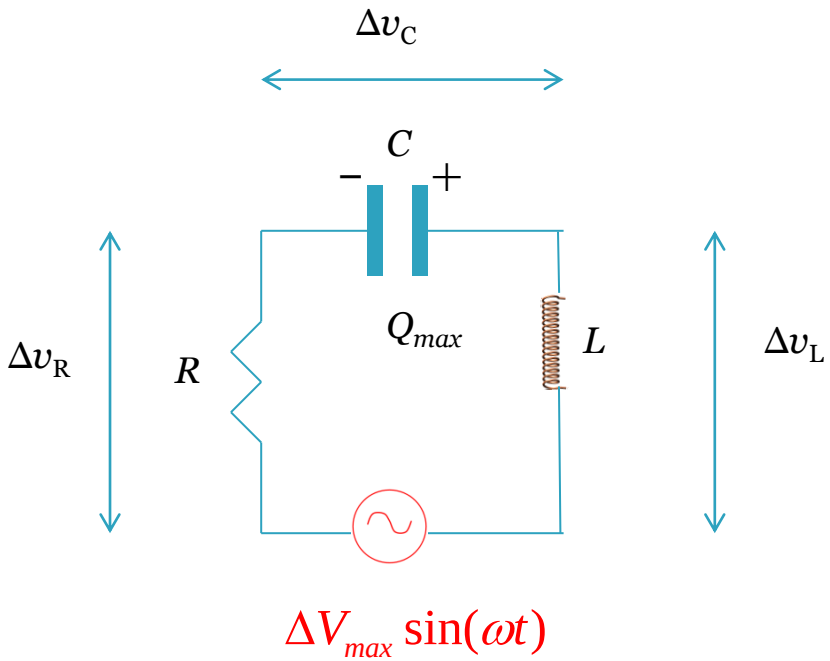
Γνωρίζουμε τη διαφορά φάσης που έχουν οι τάσεις στα διάφορα στοιχεία σε σχέση με το ρεύμα

$$\Delta v_c = I_{\max} X_C \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -\Delta V_C \cos \omega t$$

$$I = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$$

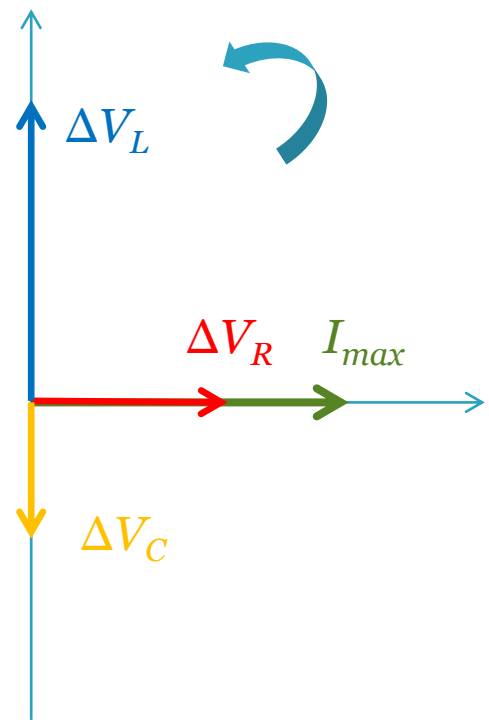


# Κύκλωμα RLC εν σειρά



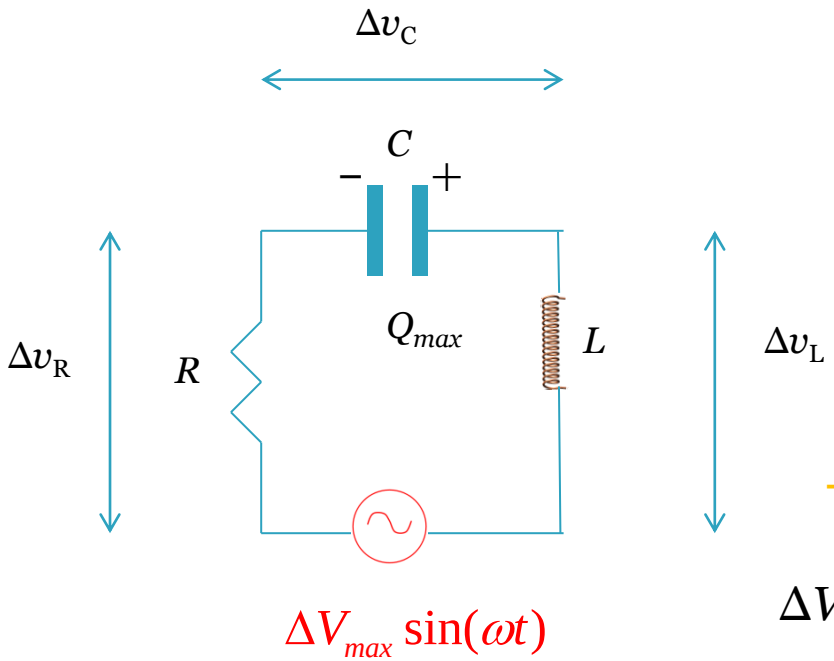

Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

$$\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$$



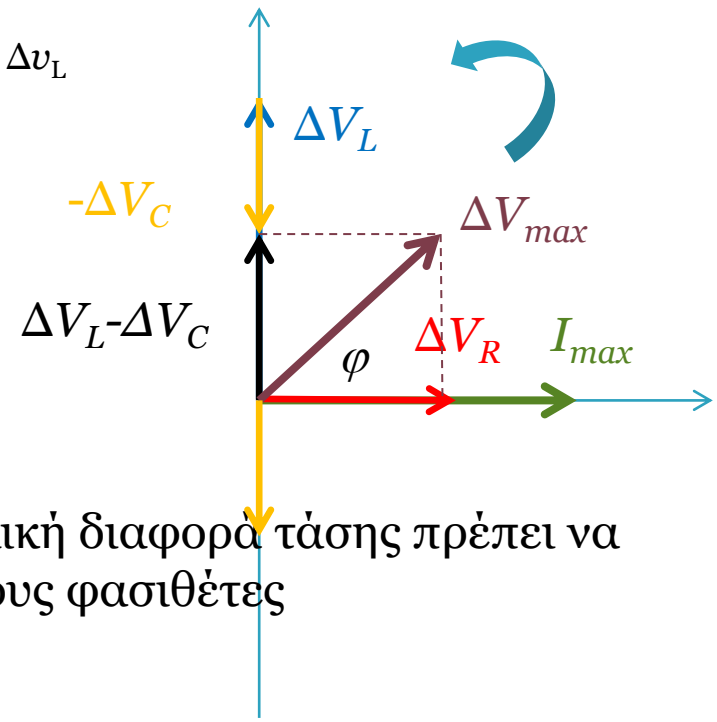

Διάγραμμα φάσορα (phasor)

# Κύκλωμα RLC εν σειρά



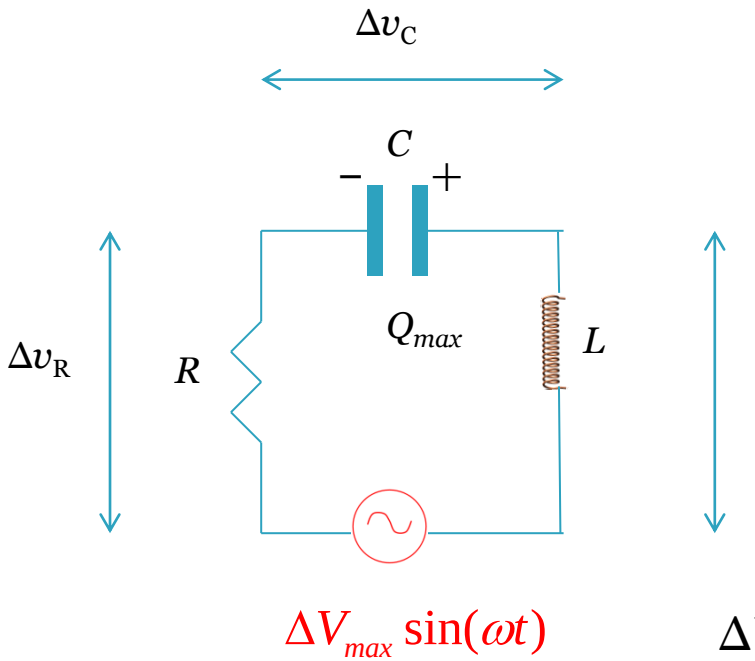

Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

$$\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$$



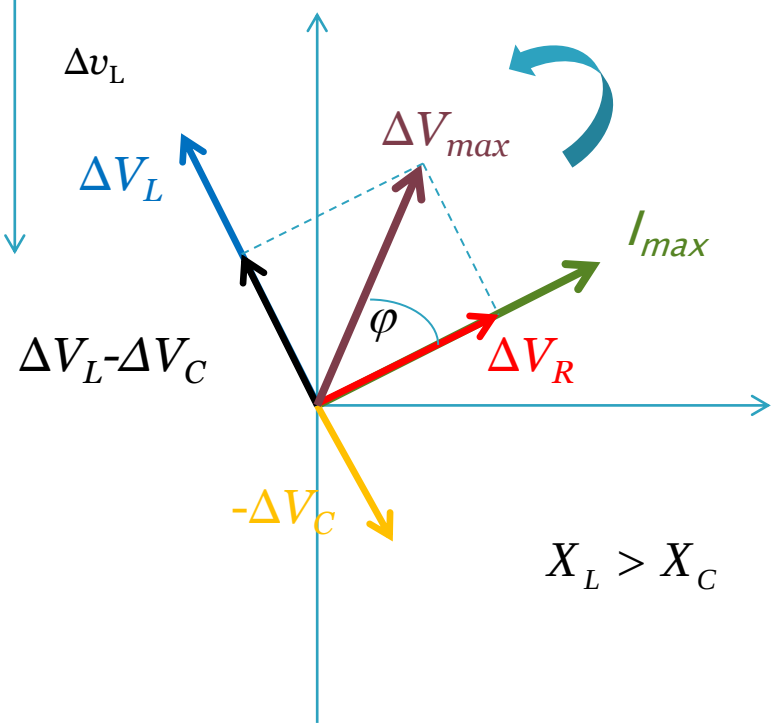

Για να υπολογίσουμε τη συνολική διαφορά τάσης πρέπει να προσθέσουμε διανυσματικά τους φασιθέτες

# Κύκλωμα RLC εν σειρά



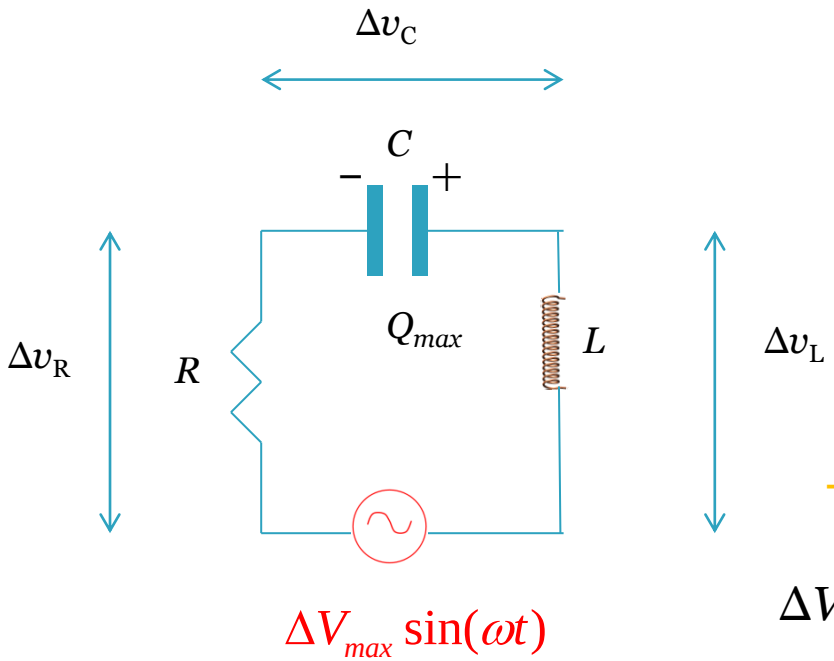

Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

$$\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$$



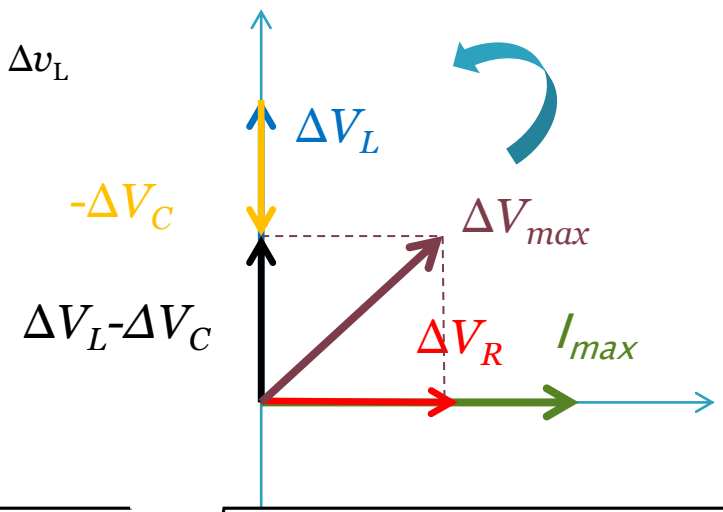

$$X_L > X_C$$

# Κύκλωμα RLC εν σειρά




Το ρεύμα παντού πρέπει να είναι το ίδιο

$$\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$$



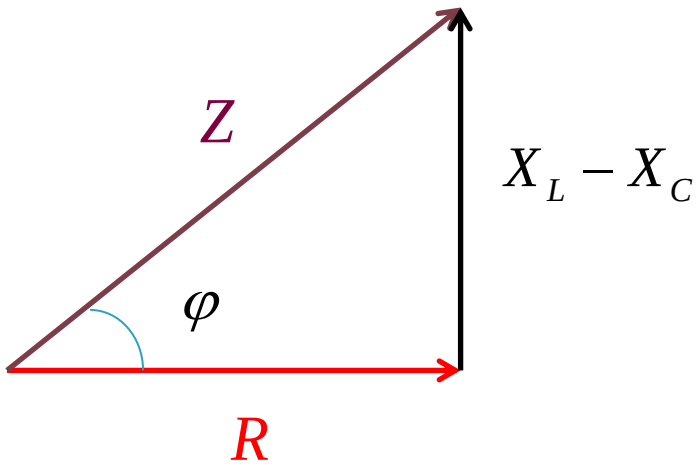

$$\Delta V_{\max} = \sqrt{\Delta V_R^2 + \left(\Delta V_L - \Delta V_C\right)^2} = \sqrt{\left(I_{\max} R\right)^2 + \left(I_{\max} X_L - I_{\max} X_C\right)^2}$$

$$\Delta V_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

# Κύκλωμα RLC εν σειρά

$$\Delta V_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

$$I_{\max} = \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}$$




Εμπέδηση (Σύνθετη αντίσταση) κυκλώματος (impedance)

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

$$\Delta V_{\max} = I_{\max} Z$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

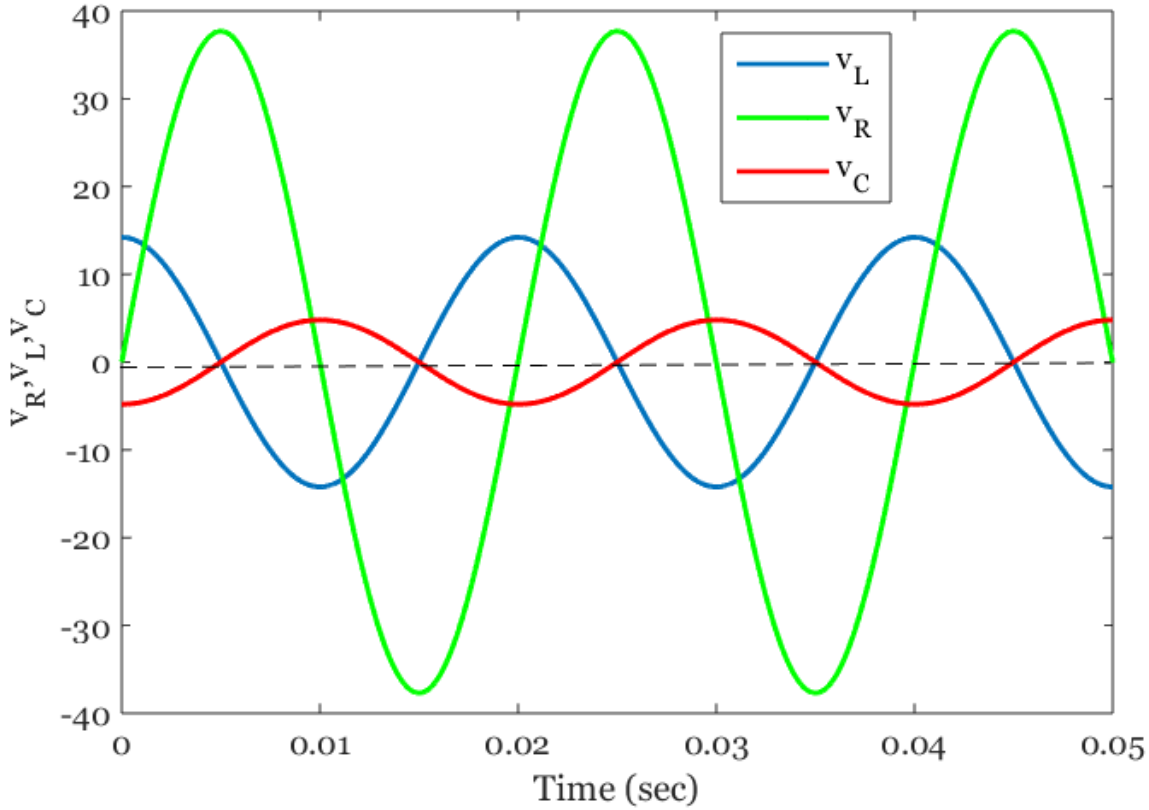
$$I = I_{\max}\sin(\omega t - \varphi)$$

# Κύκλωμα RLC εν σειρά

| Στοιχείο | Σύμβολο | Εμπέδηση | Ρεύμα | Τάση | Πλάτος τάσης |
|---|---|---|---|---|---|
| Πηγή | $\Delta V$ | $r$ | $I = I_{\max} \sin \omega t$ | $\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$ | $\Delta V_{\max}$ |
| Αντίσταση | $R$ | $R$ | $I = I_{\max} \sin \omega t$ | $\Delta v_R = \Delta V_R \sin \omega t$ | $\Delta V_R = I_{\max} R$ |
| Πηνίο | $L$ | $\omega L$ | $I = I_{\max} \sin \omega t$ | $\Delta v_L = \Delta V_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ | $\Delta V_L = I_{\max} \omega L$ |
| Πυκνωτής | $C$ | $1/\omega C$ | $I = I_{\max} \sin \omega t$ | $\Delta v_C = \Delta V_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ | $\Delta V_C = \frac{I_{\max}}{\omega C}$ |

# Κύκλωμα RLC εν σειρά

$f$=50 Hz
$C$=0.001 F
$\Delta V_{max}$=40 V
$L$=0.03 H
$R$=25 Ω



# Κύκλωμα RLC εν σειρά

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

- Αν η γωνία $\varphi$ είναι θετική:
  - $X_L > X_C$ (κάτι που συμβαίνει σε υψηλές συχνότητες).
  - Το ρεύμα υστερεί της εφαρμοζόμενης τάσης.
  - Το κύκλωμα είναι ***περισσότερο επαγωγικό παρά χωρητικό***.
- Αν η γωνία $\varphi$ είναι αρνητική:
  - $X_L < X_C$ (κάτι που συμβαίνει σε χαμηλές συχνότητες).
  - Το ρεύμα προηγείται της εφαρμοζόμενης τάσης.
  - Το κύκλωμα είναι ***περισσότερο χωρητικό παρά επαγωγικό***.
- Αν η γωνία $\varphi$ είναι ίση με μηδέν:
  - $X_L = X_C$
  - Το κύκλωμα είναι ***αμιγώς ωμικό***.

# Ισχύς σε ένα RLC κύκλωμα

Στιγμιαία Ισχύς $$P(t) = I(t)\Delta v(t) = I_{\max}\sin(\omega t - \varphi)\Delta V_{\max}\sin(\omega t)$$

Μέση Ισχύς $$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_{\max}\Delta V_{\max}\cos\varphi$$

Ενεργό ρεύμα $$I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

Ενεργός τάση $$\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$P_{av} = I_{rms}\Delta V_{rms}\cos\varphi$$

Συντελεστής ισχύος $\cos\varphi$

# Ισχύς σε ένα RLC κύκλωμα

Μέση Ισχύς $$P_{av} = I_{rms}\Delta V_{rms}\cos\varphi$$

$$\Delta V_R = \Delta V_{\max}\cos\varphi = I_{\max}R \Rightarrow \cos\varphi = \frac{I_{max}R}{\Delta V_{max}}$$

$$P_{av} = I_{rms}\left(\frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{2}}\right)\frac{I_{\max}R}{\Delta V_{\max}} = I_{rms}\frac{I_{\max}R}{\sqrt{2}} = I_{rms}^2 R$$

Η ισχύς αποδίδεται στην αντίσταση

Η μέση ισχύς σε πυκνωτή και πηνίο είναι ο

# Συντονισμός

$$I_{\max} = \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}$$

$\left(I_{\max}\right)_{\max}$ για $X_L = X_C$ $\qquad X_L = \omega L \qquad X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

Συχνότητα συντονισμού $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\qquad \left(X_L - X_C\right)^2 = \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2 = \dfrac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2$

# Συντονισμός

Συχνότητα συντονισμού $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$P_{av} = I_{rms}^2 R = \frac{\left(\Delta V_{rms}\right)^2}{Z^2} R = \frac{\left(\Delta V_{rms}\right)^2 R}{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

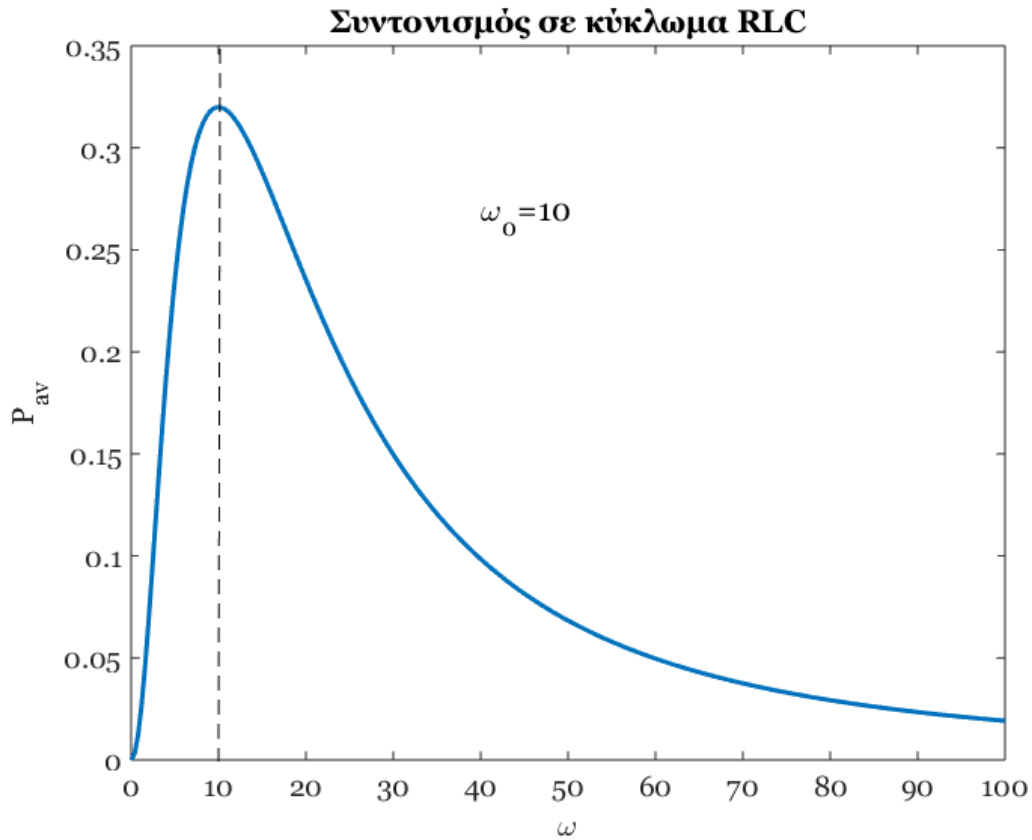
$$\left(X_L - X_C\right)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2$$

Μέση ισχύς συναρτήσει της συχνότητας $$P_{av} = \frac{\left(\Delta V_{rms}\right)^2 R\omega^2}{R^2\omega^2 + L^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

Συντονισμός $$P_{av} = \frac{\left(\Delta V_{rms}\right)^2 R\omega^2}{R^2\omega^2} = \frac{\left(\Delta V_{rms}\right)^2}{R}$$

# Συντονισμός

$C$=0.01 F
$\Delta V_{max}$=4 V
$L$=1 H
$R$=25 Ω



# Συντονισμός

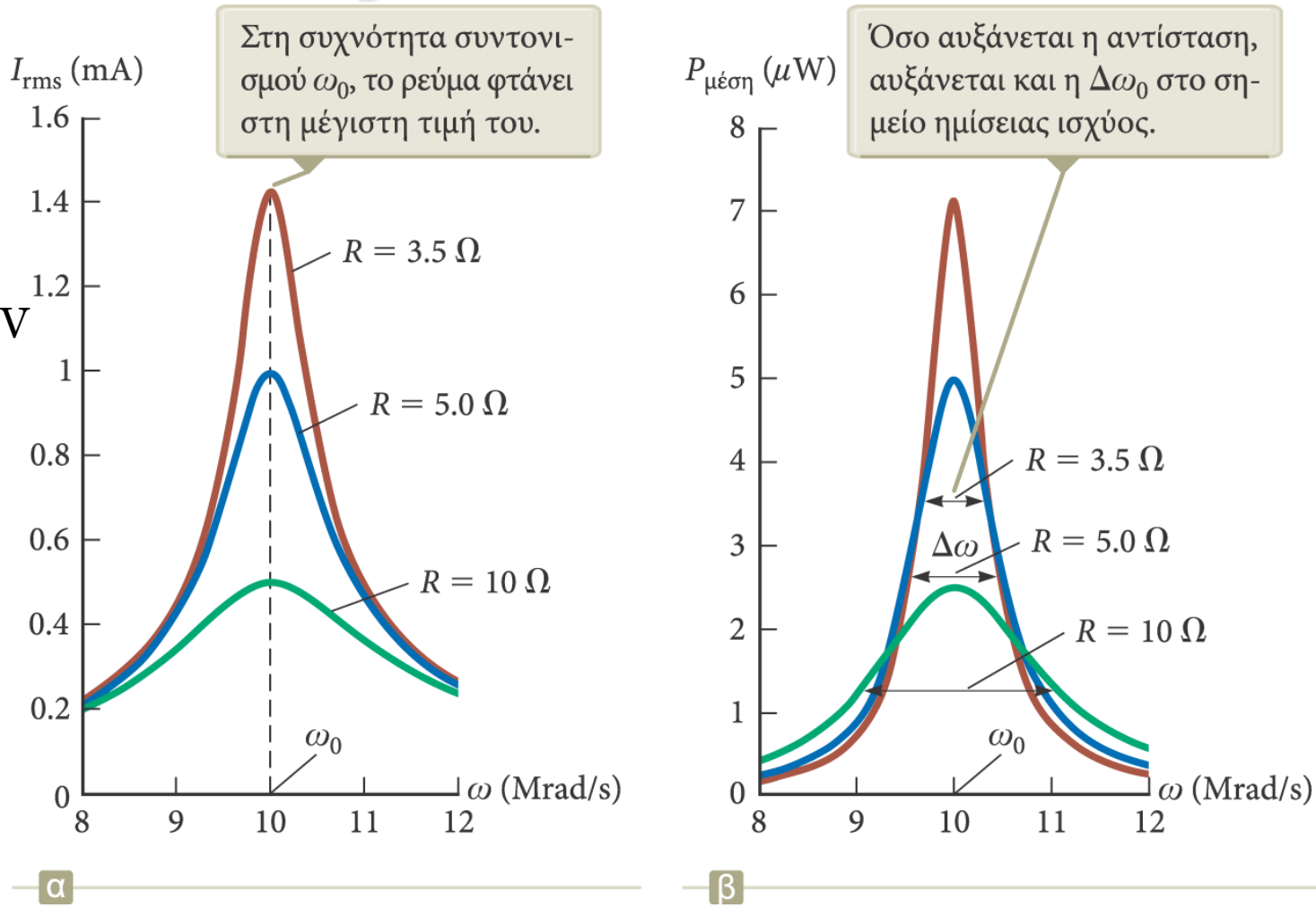
Η οξύτητα της καμπύλης συντονισμού περιγράφεται από την παράμετρο Q που ονομάζεται «συντελεστής ποιότητας»

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$\Delta\omega$ είναι το εύρος (άνοιγμα) της καμπύλης στο σημείο που αυτή έχει το ήμισυ της μέγιστης τιμής της

Μπορείτε να δείξετε (άσκηση) ότι $\Delta\omega = R/L$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

# Συντονισμός

$C$=2.0 nF
$\Delta V_{max}$=10 mV
$L$=5.0 μH