ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

2021-2022

Διάλεξη 12

Εξισώσεις Maxwell- Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Μιχάλης Ταρουδάκης

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

- Η διάδοση των μηχανικών κυμάτων προϋποθέτει την ύπαρξη ενός υλικού μέσου.
- Αντιθέτως, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται και στο κενό.
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται από την ταλάντωση ηλεκτρικών φορτίων.
- Η διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων βασίζεται στις εξισώσεις του Maxwell.

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

- Maxwell είχε εκφράσει την εικασία περί ύπαρξης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.
- Ο Hertz επιβεβαίωσε την εικασία του Maxwell, όταν το 1887 παρήγαγε και ανίχνευσε ηλεκτρομαγνητικά κύματα.
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα φέρουν ενέργεια και ορμή.
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων.

https://science.nasa.gov/ems/02_anatomy

Εξισώσεις Maxwell

Κενό

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Νόμος Gauss στον Ηλεκτρισμό

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Νόμος Gauss στον Μαγνητισμό

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Νόμος Faraday

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + I_d \right) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

Γενικευμένος Νόμος Ampère (Ampère-Maxwell)

Εξισώσεις Maxwell

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + I_d \right) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

James Maxwell
1831-1879
Wikipedia

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

Δύναμη Lorenz για ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο μη εξαρτώμενα από το χρόνο

Εξισώσεις Maxwell

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E})\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho dV}{\varepsilon_0}$$

James Maxwell
1831-1879
Wikipedia

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Διαφορική έκφραση των εξισώσεων Maxwell στο κενό με πηγές

Εξισώσεις Maxwell

Σε περίπτωση που έχομε μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο σε υλικό, φορτίο και ένταση ρεύματος έχουν άλλη τιμή.

James Maxwell
1831-1879
Wikipedia

$$\frac{\rho_{net}}{\rho_{free}} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}, \quad < 1 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{net}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{free}}{\varepsilon}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$ Ηλεκτρική μετατόπιση

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{free}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu \qquad \mu \simeq \mu_0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Maxwell

James Maxwell
1831-1879
Wikipedia

Σε περίπτωση που έχομε μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο σε υλικό, φορτίο και ένταση ρεύματος έχουν άλλη τιμή.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{free}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Διαφορική έκφραση των εξισώσεων Maxwell σε υλικό με πηγές

Εξισώσεις Maxwell

James Maxwell
1831-1879
Wikipedia

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Οι εξισώσεις Maxwell στο κενό χωρίς πηγές

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Maxwell στο κενό χωρίς πηγές

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) =$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}}$$

Εξισώσεις κύματος (ομογενείς)

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Maxwell στο κενό

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Ταχύτητα διάδοσης Η/Μ κυμάτων

$c = 2.99792 \times 10^8$ m/s

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Maxwell στο κενό με πηγές

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) =$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Η/Μ κυμάτων

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\left(\nabla\times\mathbf{J}\right)$$

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\left(\nabla\times\mathbf{J}\right)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Ταχύτητα διάδοσης Η/Μ κυμάτων

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Η/Μ κυμάτων με χρήση δυναμικών

$$\varphi, \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$ Διανυσματικό Δυναμικό $\mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$ Αστρόβιλο

Επομένως υπάρχει φ

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Η/Μ κυμάτων με χρήση δυναμικών

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \varphi, \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \left(-\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \left(-\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Η/Μ κυμάτων με χρήση δυναμικών

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \varphi, \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Συνθήκη βαθμίδας (gauge) Lorentz

$$\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Η/Μ κυμάτων με χρήση δυναμικών

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\varphi, \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$	$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0$
$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho+\mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$	$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=-\mu_0\left(\nabla\times\mathbf{J}\right)$
$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\left[\nabla\cdot\mathbf{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=0$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{E} = \left(E_x, E_y, E_z \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)$$

Αντίστοιχα για **B**

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

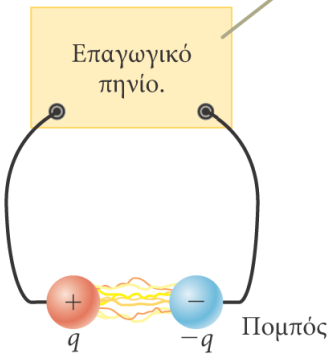
- Ανακαλύφθηκαν το 1887 από τον Hertz.
- Ήταν ο πρώτος που παρήγαγε και ανίχνευσε ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε εργαστηριακό περιβάλλον.
- Έδειξε επίσης και άλλες κυματικές ιδιότητες του φωτός.

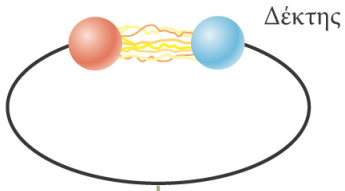
Heinrich Rudolf Hertz
1857-1894

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

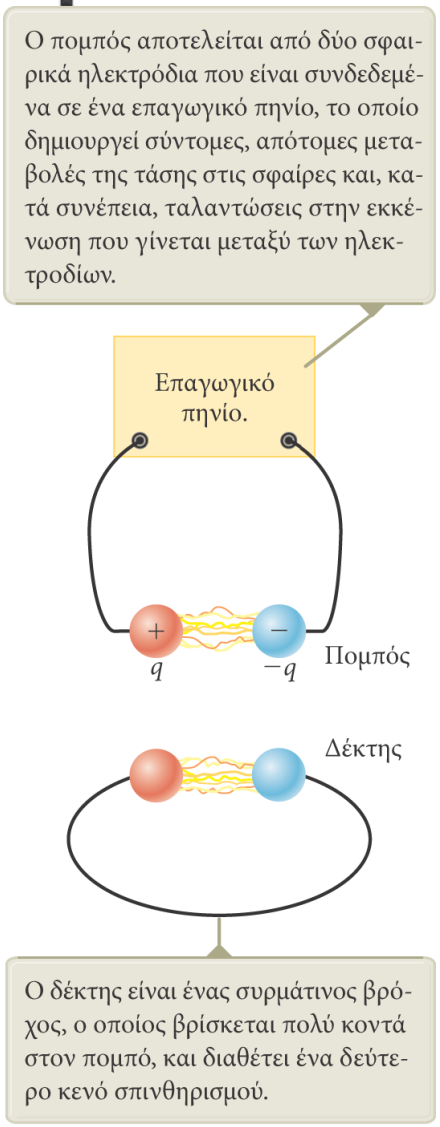
- Ένα επαγωγικό πηνίο είναι συνδεδεμένο με έναν πομπό.
- Ο πομπός αποτελείται από δύο σφαιρικά ηλεκτρόδια, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα μικρό διάκενο.
- Το πηνίο τροφοδοτεί τα ηλεκτρόδια με σύντομες και απότομες μεταβολές της τάσης.
- Καθώς ο αέρας στο διάκενο ιοντίζεται, γίνεται καλύτερος αγωγός του ηλεκτρισμού.
- Η εκκένωση μεταξύ των ηλεκτροδίων παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά πολύ υψηλής συχνότητας.
- Αυτή η πειραματική διάταξη ισοδυναμεί με ένα κύκλωμα *LC*.

Ο πομπός αποτελείται από δύο σφαιρικά ηλεκτρόδια που είναι συνδεδεμένα σε ένα επαγωγικό πηνίο, το οποίο δημιουργεί σύντομες, απότομες μεταβολές της τάσης στις σφαίρες και, κατά συνέπεια, ταλαντώσεις στην εκκένωση που γίνεται μεταξύ των ηλεκτροδίων.





Ο δέκτης είναι ένας συρμάτινος βρόχος, ο οποίος βρίσκεται πολύ κοντά στον πομπό, και διαθέτει ένα δεύτερο κενό σπινθηρισμού.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

- Όταν η συχνότητα του δέκτη ρυθμίστηκε σύμφωνα με εκείνη του πομπού, στο διάκενο μεταξύ των ηλεκτροδίων του δέκτη προκλήθηκαν σπινθήρες.
- Με μια σειρά άλλων πειραμάτων, ο Hertz έδειξε επίσης ότι η ακτινοβολία που παρήγαγε αυτή η διάταξη παρουσίαζε κυματικές ιδιότητες.
  - Συμβολή, περίθλαση, ανάκλαση, διάθλαση, και πόλωση.
- Επιπλέον μέτρησε την ταχύτητα διάδοσης αυτής της ακτινοβολίας.
  - Η ταχύτητα αυτή ήταν πολύ κοντά στη γνωστή τιμή της ταχύτητας του φωτός.