ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

2021-2022

Διάλεξη 13

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Μιχάλης Ταρουδάκης

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Maxwell στο κενό

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Ταχύτητα διάδοσης Η/Μ κυμάτων

c = 2.99792 x 10^8 m/s

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξισώσεις Η/Μ κυμάτων με πηγές

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\left(\nabla\times\mathbf{J}\right)$$

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\left(\nabla\times\mathbf{J}\right)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Ταχύτητα διάδοσης Η/Μ κυμάτων

c = 2.99792 x 10^8 m/s

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$	$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0$
$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho+\mu_0\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}$	$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=-\mu_0\left(\nabla\times\mathbf{J}\right)$
$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\left[\nabla\cdot\mathbf{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=0$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

Θα πάρουμε την εξίσωση χωρίς πηγές

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\mathbf{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$$

$$\nabla^2 E_x = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)$$

Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\frac{1}{c^2} = \nabla^2 E_x = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)$$

Χωρισμός μεταβλητών

$$E_x = E_{1x}(\mathbf{r})T_1(t) \qquad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$E_{1x}(\mathbf{r})\frac{\partial^2 T_1(t)}{\partial t^2}\frac{1}{c^2} = T_1(t)\nabla^2 E_{1x}$$

$$\frac{\partial^2 T_1(t)}{\partial t^2}\frac{1}{T_1(t)} = \frac{\nabla^2 E_{1x}}{E_{1x}(\mathbf{r})}c^2 = -\omega^2$$

Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

$$\frac{\partial^2 T_1(t)}{\partial t^2}\frac{1}{T_1(t)} = \frac{\nabla^2 E_{1x}}{E_{1x}(\mathbf{r})}c^2 \quad = -\omega^2$$

$$\frac{\partial^2 T_1(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T_1(t) = 0$$

Θα θεωρήσουμε λύση της μορφής

$$T_1(t) = A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{-i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$T_1(t) = e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 E_{1x} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_{1x} = 0$$

Εξίσωση Helmholtz

Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

$$T_1(t) = e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\omega}{c} = |\mathbf{k}|$$

Αριθμός κύματος

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

Χωρισμός μεταβλητών στην E_{1x}

$$E_{1x} = E_{1xx}(x)E_{1xy}(y)E_{1xz}(z)$$

$$E_{1xx} = C_1 e^{ik_x x} + C_2 e^{-ik_x x}$$

Κύμα οδεύον στα θετικά x

Κύμα οδεύον στα αρνητικά x

Αντίστοιχα και για τις υπόλοιπες συνιστώσες

Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

$$T_1(t) = e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\omega}{c} = |\mathbf{k}|$$

Αριθμός κύματος

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

Χωρισμός μεταβλητών στην E_{1x}

$$E_{1x} = E_{1xx}(x)E_{1xy}(y)E_{1xz}(z)$$

Για κύματα οδεύοντα σε θετικές διευθύνσεις:

$$E_{1x} = C_{1x}e^{ik_x x}D_{1x}e^{ik_y y}E_{1x}e^{ik_z z} = E_{0x}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, E_{1z})$$

$$\mathbf{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(E_x(\mathbf{r},t), E_y(\mathbf{r},t), E_z(\mathbf{r},t)\right)$$

$$E_x(\mathbf{r},t) = E_{1x}(\mathbf{r})T_1(t) \qquad T_1(t) = e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(E_{1x}(\mathbf{r}), E_{1y}(\mathbf{r}), E_{1z}(\mathbf{r})\right)e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{-i\omega t}$$

Για κύματα οδεύοντα στις θετικές διευθύνσεις

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

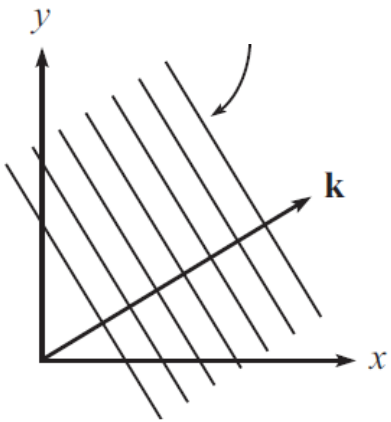
Επίλυση των κυματικών εξισώσεων

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \rightarrow \text{σταθερό}$$

Επιφάνεια σταθερής φάσης (Σταθερή τιμή του **E** ή **B**)

Επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση του **k**



Περιορισμοί από τις εξισώσεις Maxwell

Οι συντελεστές των κυμάτων πρέπει να δίδουν κύματα που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad ik_x E_x + ik_y E_y + ik_z E_z = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Διάνυσμα **E** κάθετο στο διάνυσμα **k**

Περιορισμοί από τις εξισώσεις Maxwell

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \longrightarrow \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$$

Διάνυσμα **B** κάθετο στο διάνυσμα **k**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \left(ik_x, ik_y, ik_z\right) \times \mathbf{E} = -(-i\omega)\mathbf{B}$$

$$\longrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$$

Διάνυσμα **B** κάθετο στο διάνυσμα **k** και στο **E**

Περιορισμοί από τις εξισώσεις Maxwell

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$$

k κάθετο στο **E** → $|\mathbf{k} \times \mathbf{E}| = |\mathbf{k}||\mathbf{E}| = kE$

↓

Ισχύει για Η/Μ κύμα οδεύον σε μία διεύθυνση

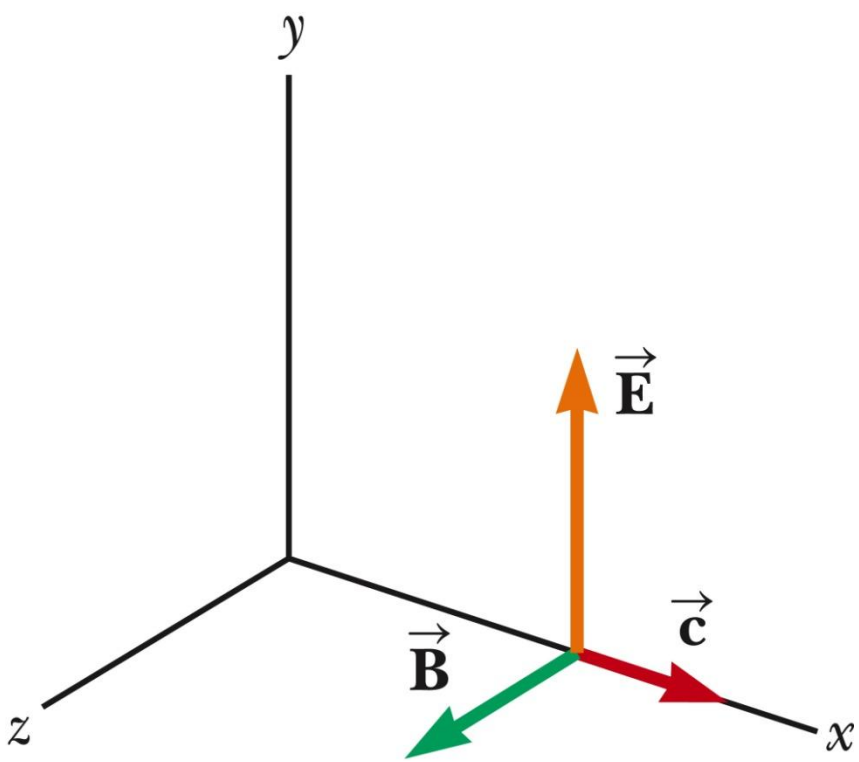
$$kE = \omega B$$

↓

$$E = cB$$

Ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι σε φάση !

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα



Επίπεδα Η/Μ κύματα

Έστω διάδοση προς τον άξονα *x*

$c = 2.99792 \times 10^8$ m/s

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Έκφραση λύσης $$\mathbf{E} = E_y = E_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$\mathbf{B} = B_z = B_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

Ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι σε φάση !

Συχνότητα $$\omega = 2\pi f$$

Περίοδος $$T = \frac{1}{f}$$

Μήκος κύματος $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k}$$

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

$$\mathbf{E} = E_y = E_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$\mathbf{B} = B_z = B_0 e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$\mathbf{E} = E_y = E_0 \left[\cos(k_x x - \omega t) + i \sin(k_x x - \omega t)\right]$$

$$\mathbf{B} = B_z = B_0 \left[\cos(k_x x - \omega t) + i \sin(k_x x - \omega t)\right]$$

$$E_0, B_0 \in \mathbb{C}$$

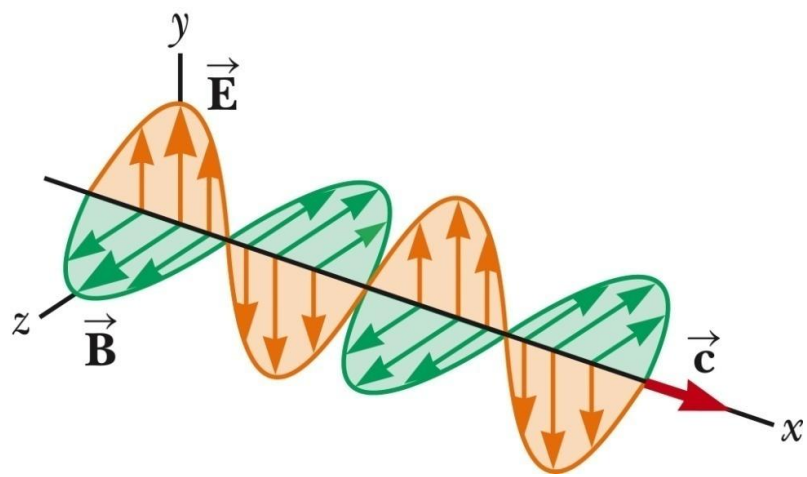
Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Έκφραση λύσης

$$\mathrm{Real}(\mathbf{E}) = E_0^{'} \cos(k_x x - \omega t + \varphi) \equiv E$$

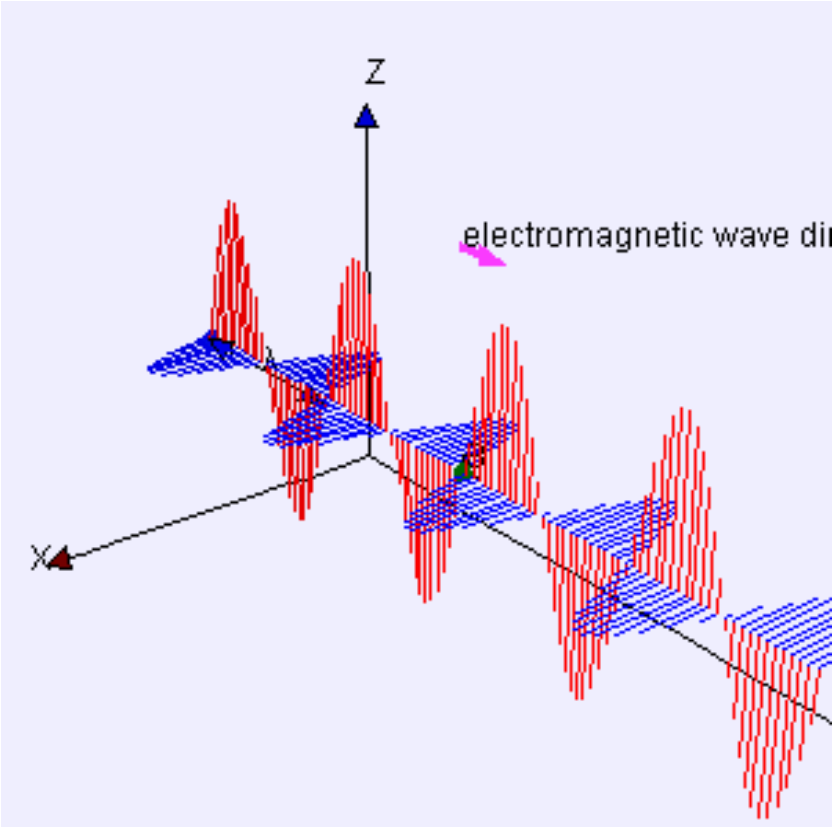
$$\mathrm{Real}(\mathbf{B}) = B_0^{'} \cos(k_x x - \omega t + \varphi) \equiv B$$

$$\mathrm{Real}(\mathbf{B}) = \frac{E_0^{'}}{c} \cos(k_x x - \omega t + \varphi)$$



Γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα



Επίπεδα γραμμικά πολωμένα Η/Μ κυματα

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Ιδιότητες

Ακτίνα : Καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας το διάνυσμα του αριθμού κύματος είναι εφαπτόμενο.

Για σταθερή ταχύτητα διάδοσης, οι ακτίνες είναι **ευθείες**

Η επιφάνεια που συνδέει τα σημεία ίσης φάσης όλων των κυμάτων είναι ένα γεωμετρικό επίπεδο, το οποίο ονομάζεται **μέτωπο κύματο**ς.

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Ιδιότητες

Μια σημειακή πηγή ακτινοβολίας εκπέμπει κύματα ακτινικά προς όλες τις κατευθύνσεις.

Σε αυτή την περίπτωση, η επιφάνεια που συνδέει τα σημεία ίσης φάσης είναι σφαιρική.

Αυτό το κύμα ονομάζεται **σφαιρικό κύμα**.

Ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Μπορούμε να συνθέσουμε ένα νέο Η/Μ κύμα αθροίζοντας τις εκφράσεις των επί μέρους κυμάτων

Στάσιμα Η/Μ κύματα

Εφαρμογή

Στάσιμα κύματα

Υπέρθεση δύο κυμάτων ίδιου πλάτους που οδεύουν σε αντίθετες διευθύνσεις

$$E_1 = E_0^{'} \cos(k_x x - \omega t)$$

$$E_2 = E_0^{'} \cos(-k_x x - \omega t)$$

$$B_1 = B_0^{'} \cos(k_x x - \omega t) = \frac{E_0^{'}}{c} \cos(k_x x - \omega t)$$

$$B_2 = -B_0^{'} \cos(-k_x x - \omega t) = -\frac{E_0^{'}}{c} \cos(-k_x x - \omega t)$$

Στάσιμα Η/Μ κύματα

Εφαρμογή

Στάσιμα κύματα

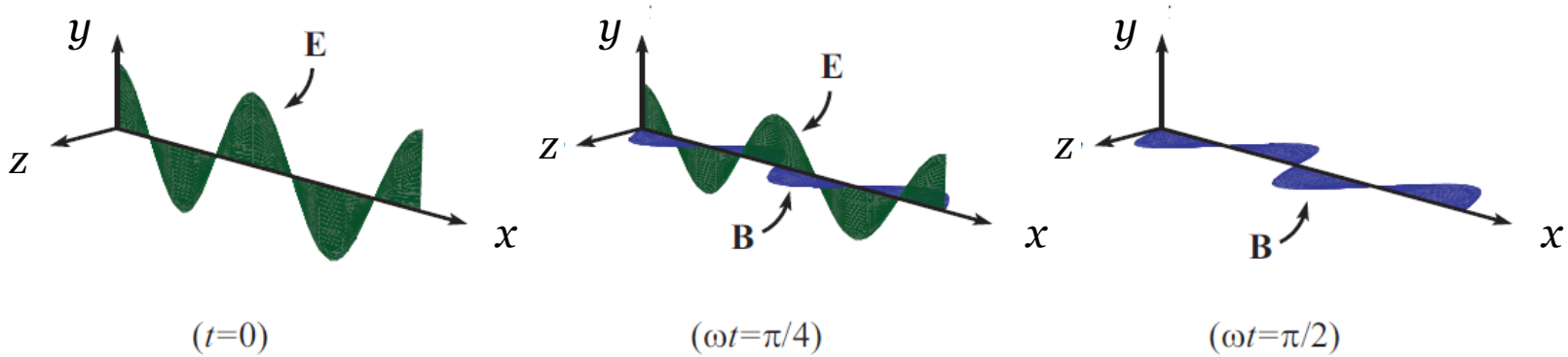
$$E_t = E_1 + E_2 = 2E_0^{'} \cos k_x x \cos \omega t$$

$$B_t = B_1 + B_2 = \frac{2E_0^{'}}{c} \sin k_x x \sin \omega t$$

$$B_t = \frac{2E_0^{'}}{c} \cos(k_x x - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Ηλεκτρικό πεδίο σε διαφορά φάσης π/2 ως προς το μαγνητικό πεδίο

Στάσιμα Η/Μ κύματα



$$E_t = 2E_0^{'} \cos k_x x \cos \omega t$$

$$B_t = \frac{2E_0^{'}}{c} \cos(k_x x - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Το διάνυσμα Pointing

- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια.
- Κατά τη διάδοσή τους στον χώρο, μπορούν να μεταφέρουν αυτή την ενέργεια στα σώματα στα οποία προσπίπτουν.
- Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα περιγράφεται με το διάνυσμα, το οποίο ονομάζεται **διάνυσμα Poynting**.

Το διάνυσμα Pointing

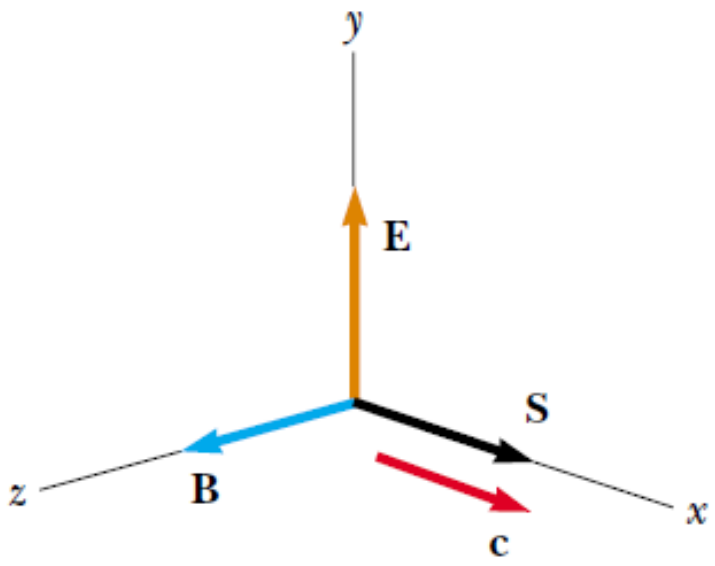
Το διάνυσμα Poynting ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_o} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Η κατεύθυνσή του είναι ίδια με την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.
- Το μέτρο του μεταβάλλεται με τον χρόνο.
- Το μέτρο του παίρνει τη μέγιστη τιμή του τότε ακριβώς που φτάνουν στις δικές τους μέγιστες τιμές το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο .

Το διάνυσμα Pointing

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_o}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$



Το διάνυσμα Pointing

Το μέτρο του διανύσματος Poynting αντιπροσωπεύει τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια διέρχεται από μια επιφάνεια μοναδιαίου εμβαδού κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Επομένως, το μέτρο του αντιπροσωπεύει ***ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας.***

Οι μονάδες του διανύσματος Poynting στο σύστημα SI είναι $J/s.m^2 = W/m^2$

Το διάνυσμα Pointing

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_o}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

$$|\mathbf{S}| \equiv \frac{1}{\mu_o}|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|$$

Για επίπεδα Η/Μ κύματα $|\mathbf{E}\times\mathbf{B}| = EB$

$$|S| = \frac{EB}{\mu_0} \qquad B = E/c$$

$$|S| = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0}B^2$$

Στιγμιαίος ρυθμός

Ένταση Η/Μ κύματος

Μέσος ρυθμός

Ένταση Η/Μ κύματος

$$E = E_0^{'} \cos(k_x x - \omega t) = E_{\max} \cos(k_x x - \omega t)$$

$$B = B_0^{'} \cos(k_x x - \omega t) = B_{\max} \cos(k_x x - \omega t)$$

$$I = \int_0^T S(t)dt = \int_0^T \frac{E(t)B(t)}{\mu_0} dt$$

$$I = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{c}{2\mu_0} B_{max}^2$$

Ένταση Η/Μ κύματος

Στιγμιαία πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας $$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Στιγμιαία πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας $$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$u_B = \frac{1}{2c^2\mu_0} E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_E$$

Συνεπώς σε ένα δεδομένο όγκο η ενέργεια είναι ίσα μοιρασμένη μεταξύ των δύο πεδίων.

Η συνολική στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας είναι το άθροισμα των δύο πυκνοτήτων

Ένταση Η/Μ κύματος

Στιγμιαία πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας $$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Στιγμιαία πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας $$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Συνολική στιγμιαία πυκνότητα Η/Μ ενέργειας $$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Μέση συνολική στιγμιαία πυκνότητα Η/Μ ενέργειας

$$u_{av} = \varepsilon_0 \left(E^2\right)_{av} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{B_{max}^2}{\mu_0}$$

$$I = S_{av} = c u_{av}$$

Η ένταση του Η/Μ κύματος είναι η μέση πυκνότητα ενέργειας πολλαπλασιασμένη με την ταχύτητα του φωτός