Βιολογικά Μοντέλα

Μέρος 2ο

Συνεχή πληθυσμιακά μοντέλα ενός είδους

Μαθηματική Μοντελοποίηση

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

- Ο ρυθμός γεννήσεων περιγράφεται με ένα γραμμικό όρο, ως προς τον αριθμό του πληθυσμού N, bN, όπου $b > 0$.
- Ο ρυθμός θανάτων περιγράφεται με ένα γραμμικό όρο, ως προς τον αριθμό του πληθυσμού N, dN, όπου $1 > d > 0$.
- Η πιθανή μετανάστευση δεν συνεισφέρει στην εξέλιξη του πληθυσμού, δηλαδή ο ρυθμός εισαγωγής ατόμων του είδους στο οικοσύστημα είναι ίσος με τον ρυθμό εξαγωγής.

Ρυθμός αύξησης

$$r = b - d$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b-d)N(t) = rN(t)$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Thomas Robert Malthus 1766 –1834

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

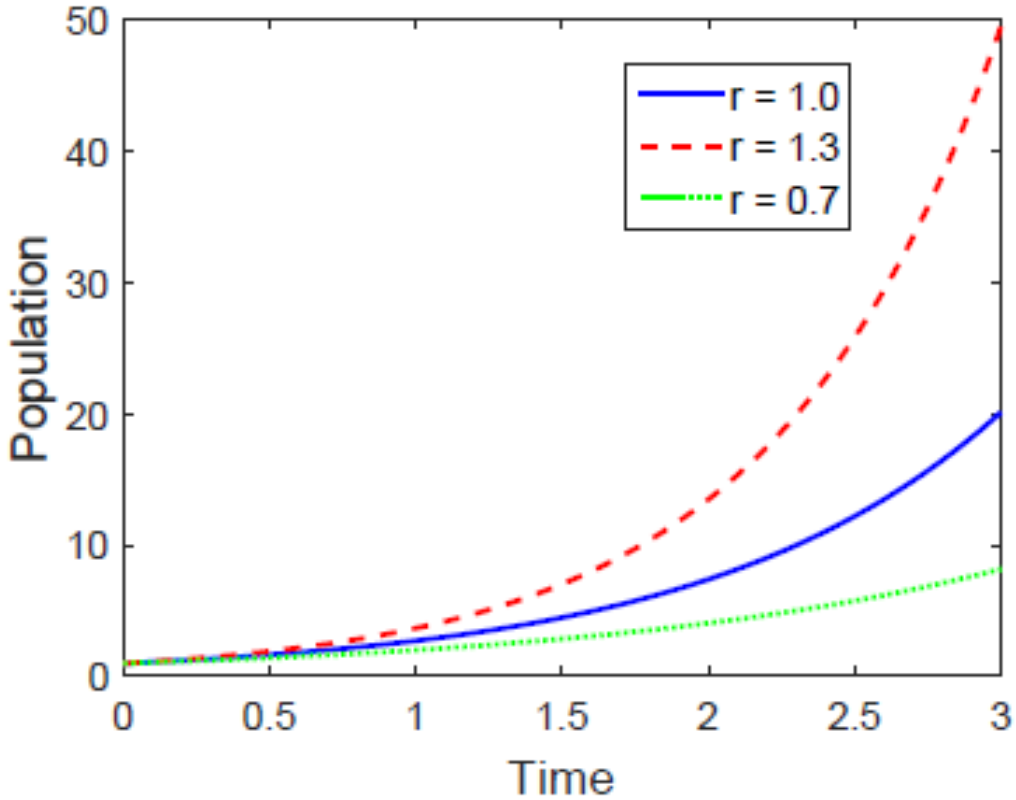
r: Κατά κεφαλή ρυθμός μεταβολής

$$r = \frac{dN(t)}{dt}\frac{1}{N}$$

Thomas Robert Malthus 1766 –1834

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ



ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΕΠΕΚΤΑΣΗ GOMPERTZ (1825)

Η αντίσταση του ατόμου στο θάνατο μειώνεται με την αύξηση της ηλικίας

$$\frac{dN}{dt} = r(t)N(t)$$

$$\frac{dr}{dt} = ar(t), \quad a < 0$$

$$N(0) = N_0$$

$$r(0) = b$$

$$r(t) = be^{at}$$

$$N(t) = N_0 e^{\frac{b}{a}(e^{at}-1)}$$

$$c = -a, \quad c > 0$$

$$N(t) = N_0 e^{\frac{b}{c}(1-e^{-ct})}$$

BENJAMIN GOMPERTZ

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΕΠΕΚΤΑΣΗ COMPERTZ (1825)

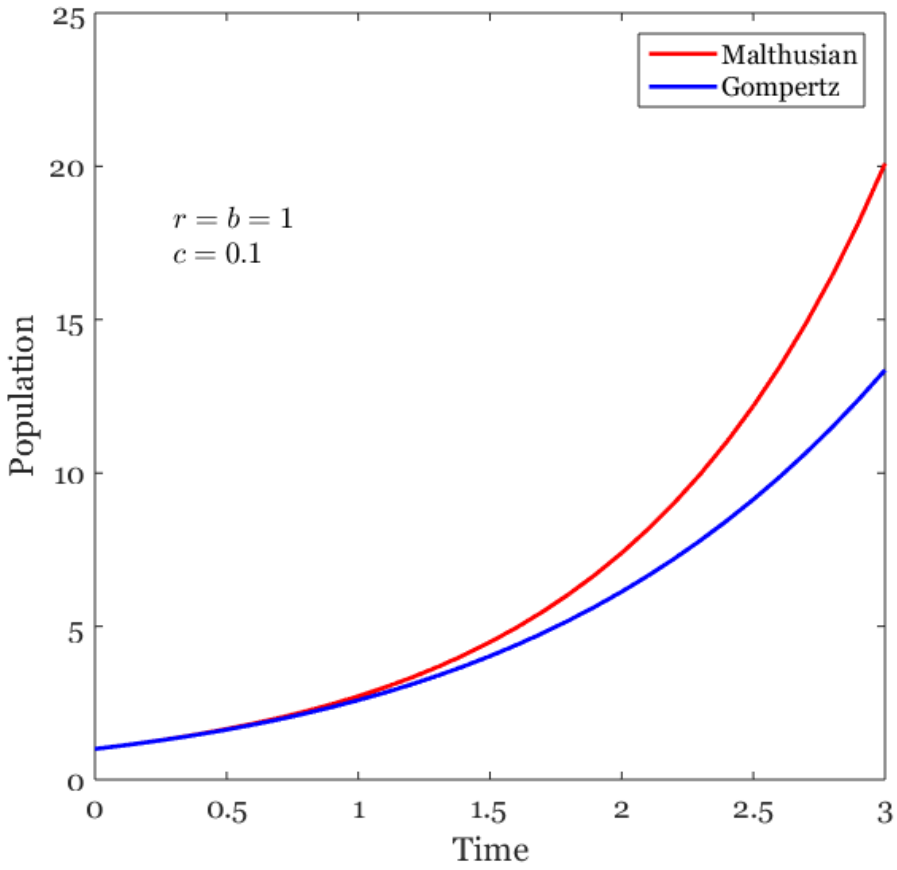
Η αντίσταση του ατόμου στο θάνατο μειώνεται με την αύξηση της ηλικίας

$$N(t) = N_0 \exp(-\frac{b}{c}(\exp(-ct)-1)) = N_0 e^{\frac{b}{c}(1-e^{-ct})}$$

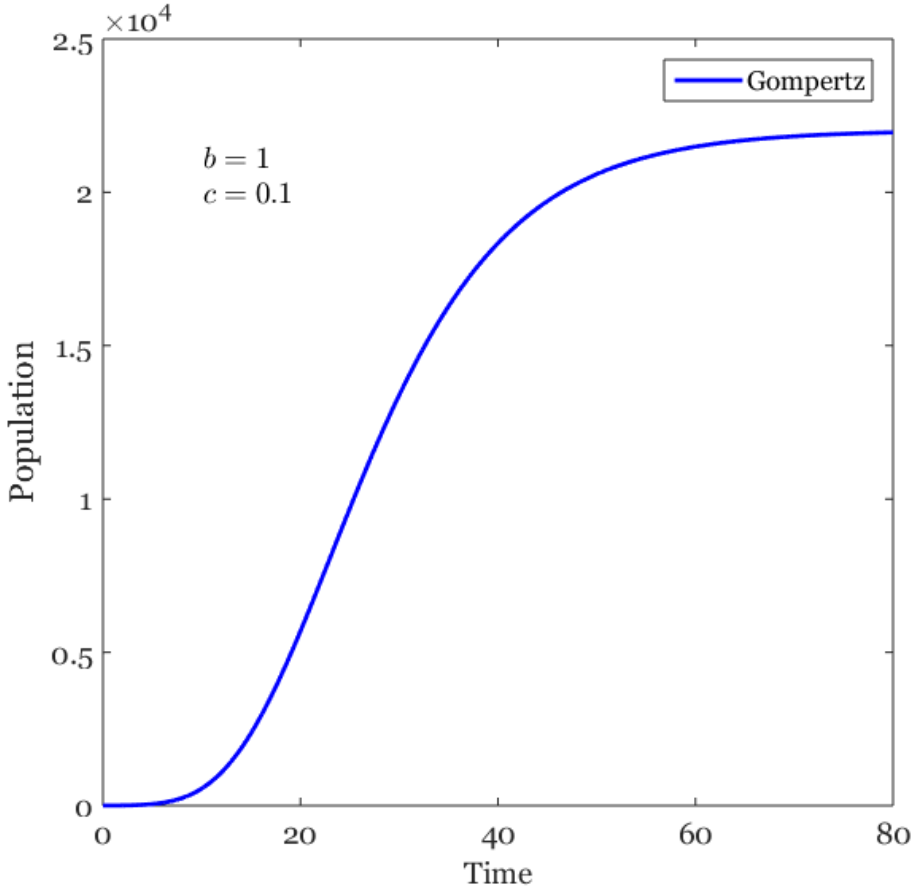
Μαλθουσιανό μοντέλο : r σταθερά

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ



ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ



ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Verlhust (1838)

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - aN^2(t)$$

$$a = \frac{r}{K}$$

K : Χωρητικότητα περιβάλλοντος $K>o$

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Κατά κεφαλή ρυθμός μεταβολής :

$$G(N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})$$

$$F(N) = \frac{dN(t)}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$$

Σημεία ισορροπίας $\frac{dN(t)}{dt} = 0$

$$N_1^* = 0,\ N_2^* = K$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Μελέτη ευστάθειας των σημείων ισορροπίας

Ανάπτυγμα Taylor

$$F(N^* + \varepsilon) = F(N^*) + \varepsilon \left.\frac{dF(N)}{dN}\right|_{N=N^*} + \mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

$$F(N^* + \varepsilon) \approx F(N^*) + \varepsilon \left.\frac{dF(N)}{dN}\right|_{N=N^*}$$

$$F(N) = \frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) \qquad \frac{dF(N)}{dN} = r(1 - \frac{2N}{K})$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$F(N^* + \varepsilon) = \frac{d(N^* + \varepsilon)}{dt} = \frac{dN^*}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$F(N^*) = \frac{dN^*}{dt}$$

$$F(N^* + \varepsilon) - F(N^*) = \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon \left.\frac{dF(N)}{dN}\right|_{N=N^*}$$

$$\frac{dF(N)}{dN} = r(1 - \frac{2N^*}{K}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon r(1 - \frac{2N^*}{K})$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon r(1 - \frac{2N^*}{K})$$

$N^* = 0$ $\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon r \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{rt}$

$r > 0$ $\quad t \to \infty \Rightarrow \varepsilon \to \infty$ Ασταθές Σ.Ι.

$N^* = K$ $\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon r \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-rt}$

$r > 0$ $\quad t \to \infty \Rightarrow \varepsilon \to 0$ Ευσταθές Σ.Ι.

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

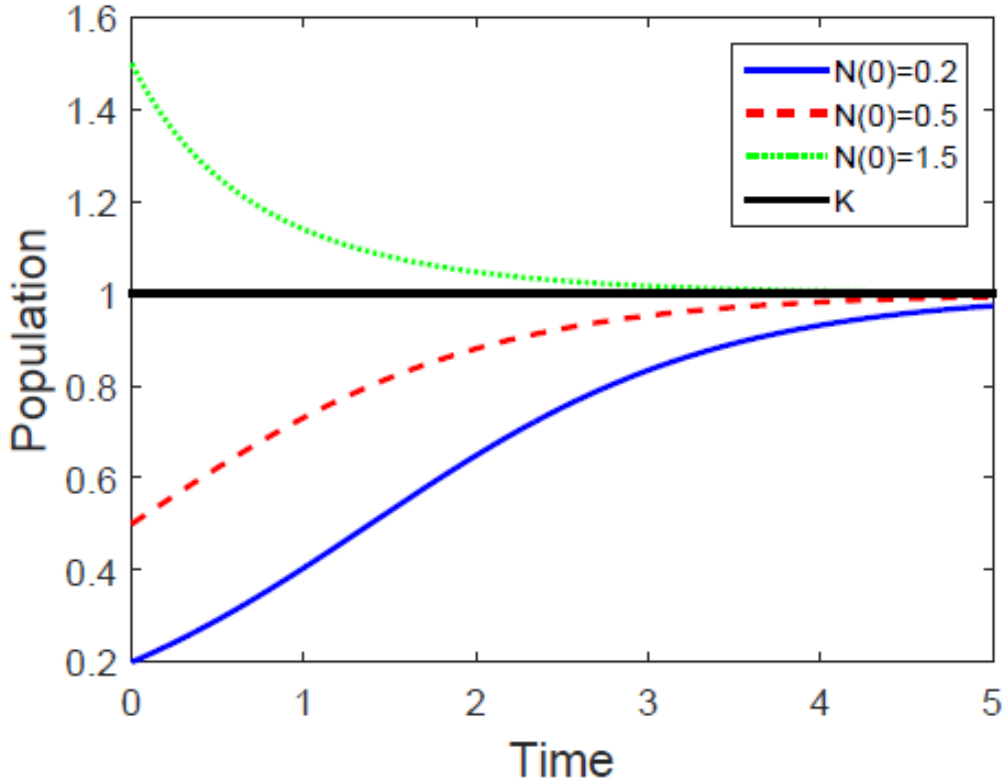
$$F(N) = \frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$$

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

$$t \to \infty \Rightarrow N(t) \to K$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

$r = 1$

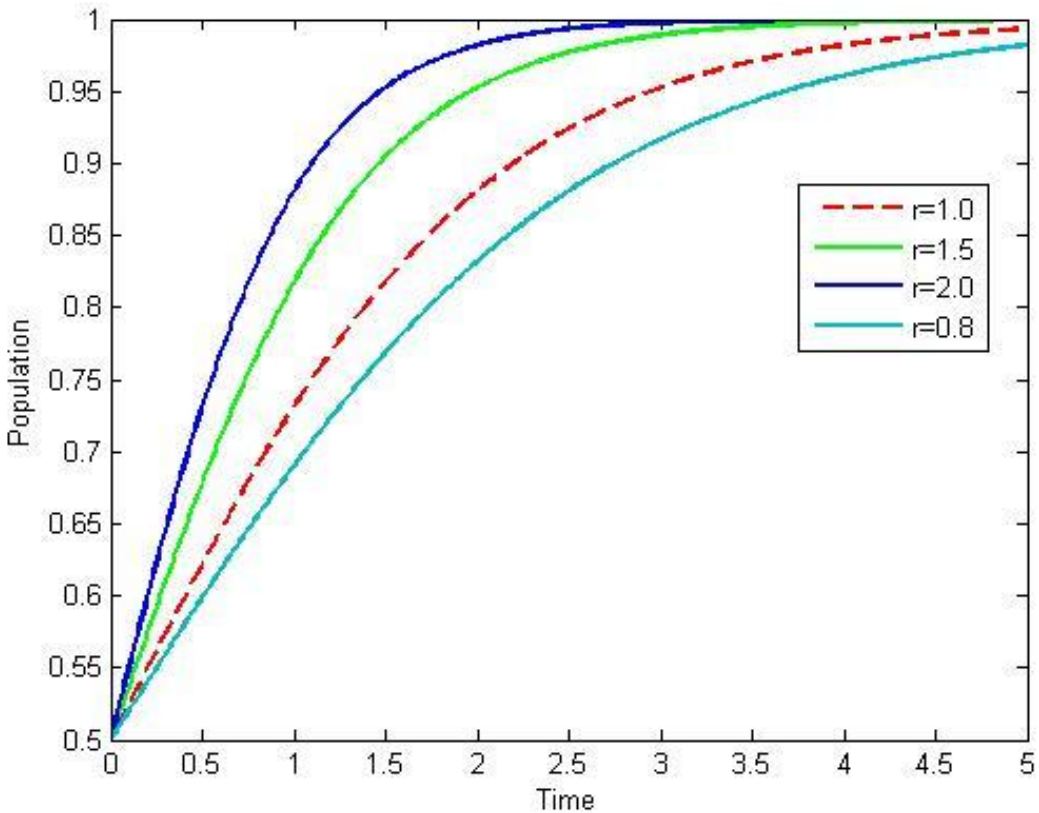


$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)}$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

$$N(0) = 0.5$$

$$K = 1$$



$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)}$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παρατήρηση

Για την εφαρμογή του μοντέλου σε ένα πραγματικό σύστημα, όπως και για κάθε άλλο μοντέλο, χρειαζόμαστε τιμές για τις σταθερές N_o , r και K. Οι τιμές αυτές βρίσκονται μέσα από στατιστικά δεδομένα – πειραματικές παρατηρήσεις που αφορούν ένα είδος.

Κύρια πρακτική δυσκολία στην ακριβή εκτίμηση των σταθερών είναι ότι συνήθως υπάρχουν στατιστικά στοιχεία για μια συγκεκριμένη περίοδο για την οποία μπορεί μεν οι προβλέψεις του μοντέλου να είναι καλές (ακριβείς), αλλά μπορεί να μην είναι καλές για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα.