Βιολογικά Μοντέλα

Μέρος 2ο

Συνεχή πληθυσμιακά μοντέλα ενός είδους

Διακριτά πληθυσμιακά μοντέλα ενός είδους

Μαθηματική Μοντελοποίηση

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

Μοντέλο με συγκομιδή (π.χ. ιχθυοκαλλιέργεια)

Υποθέσεις :

α) Το είδος σε αυτό το ελεγχόμενο περιβάλλον δεν έχει εχθρούς,

β) Το φαγητό βρίσκεται σε «αφθονία», και

γ) Τα περιβάλλον (η ιχθυοκαλλιέργεια) έχει μια συγκεκριμένη χωρητικότητα πληθυσμού.

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

E ρυθμός μείωσης πληθυσμού ανά μονάδα πληθυσμού και ανά μονάδα χρόνου **ρυθμός αλίευσης**

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1-\frac{N(t)}{K}) - EN(t) = F(N)$$

Σημεία ισορροπίας

$$N_1^* = 0$$

$$N_2^* = N_h(E) = K(1-\frac{E}{r})$$

Απόδοση συγκομιδής $Y(E)=N_h(E)$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1-\frac{N(t)}{K}) - EN(t) = F(N)$$

$$N_2^* = N_h(E) = K(1-\frac{E}{r})$$

$$E > r \Rightarrow N_h(E) < 0$$

Ο πληθυσμός πεθαίνει !!

$$E < r \Rightarrow N_h(E) > 0$$

Ο πληθυσμός σταθεροποιείται

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t) = F(N)$$

Ανάλυση Σημείου ισορροπίας N_2^*

$$\frac{d(N_2^* + \varepsilon - N_2^*)}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = F(N_2^* + \varepsilon) - F(N_2^*) \approx \varepsilon \left.\frac{dF(N)}{dN}\right|_{N=N_2^*}$$

$$\frac{dF(N)}{dN} = \left(r - 2\frac{rN}{K} - E\right)$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1-\frac{N(t)}{K}) - EN(t) = F(N)$$

$$F(N_2^* + \varepsilon) - F(N_2^*) = \frac{d\varepsilon}{dt} \approx \varepsilon \left.\frac{dF(N)}{dN}\right|_{N=N_2^*}$$

$$\frac{dF(N)}{dN} = \left(r - 2\frac{rN}{K} - E \right)$$

$$N_2^* = N_h(E) = K(1-\frac{E}{r})$$

$$\left.\frac{dF(N)}{dN}\right|_{N=N_2^*} = E - r$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \approx \varepsilon (E-r)\Big|_{N=N_2^*}$$

ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1-\frac{N(t)}{K}) - EN(t) = F(N)$$

$$N_2^* = N_h(E) = K(1-\frac{E}{r})$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \approx \varepsilon(E-r)\Big|_{N=N_2^*}$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{(E-r)t}$$

Για $E<r$ ευσταθές σημείο ισορροπίας

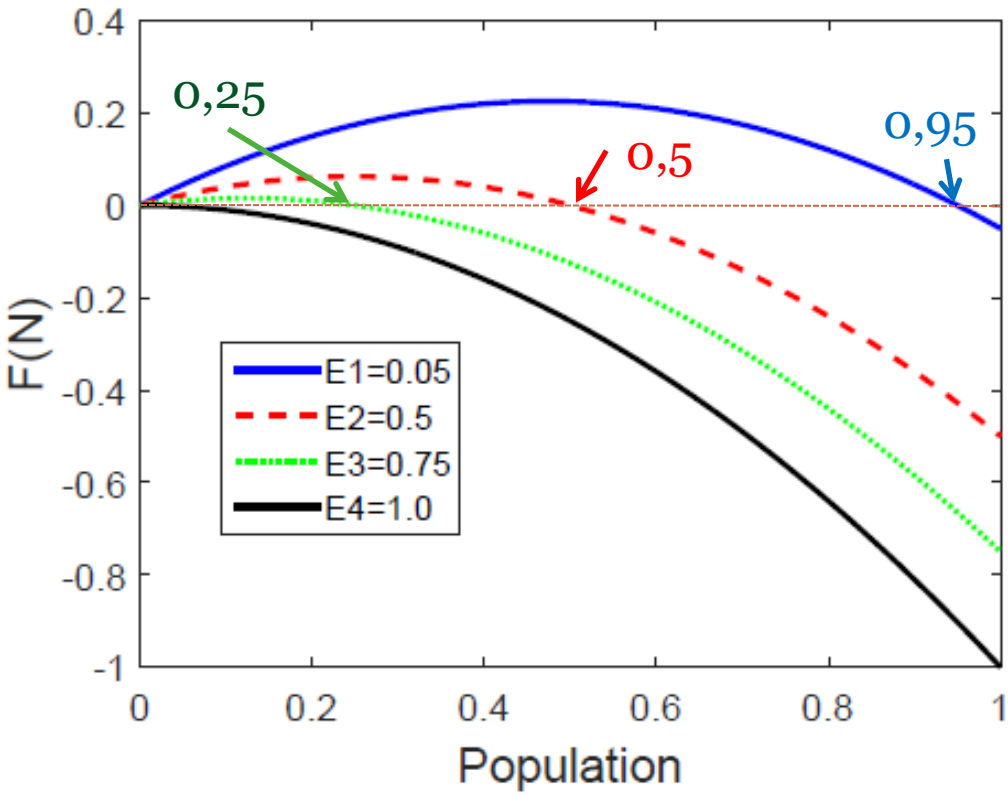
ΣΥΝΕΧΗ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

Παράδειγμα ΙΙ

$$r = 1$$

$$K = 1$$

$$N_2^* = K(1 - \frac{E}{r}) = 1 - E$$



ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στα διακριτά μοντέλα η τιμή μιας ποσότητας *P* εκφράζεται ως συνάρτηση της προηγούμενης τιμής της.

Για μια χρονική μεταβλητή αυτό εκφράζεται ως $P_{t+1} = F(P_t)$

Μαλθουσιανό Μοντέλο

Γεννήσεις bP
Θάνατοι dP

$$\Delta P = bP - dP = (b-d)P \qquad b > 0,\ 0 < d < 1$$

$$P_{t+1} = P_t + (b-d)P_t = (1+b-d)P_t = rP_t \qquad r = 1+b-d$$

Μαλθουσιανό συνεχές $r_m = b-d$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$P_{t+1} = rP_t$$

$$P(t=0) = P_0$$

Εάν θέλομε $P_{t+1} > P_t$ (αύξηση πληθυσμού) $r>1$

Συνεχές μοντέλο : $\dfrac{dN(t)}{dt} = (r-1)N(t)$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$P_{t+1} = rP_t \qquad P(t=0) = P_0$$

$$P_1 = rP_0,\ \ P_2 = rP_1 = r^2 P_0, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{P}_n = r^n P_0$$

Συνεχές μοντέλο :

$$N(t) = N_o e^{(r-1)t}$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΑΛΘΟΥΣΙΑΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Έστω οργανισμός με πολύ συγκεκριμένο κύκλο ζωής (π.χ. έντομα) στον οποίο κάθε θηλυκό γεννάει 100 αυγά. Κατόπιν **όλοι οι ενήλικες πεθαίνουν**. Μετά από τα αυγά **ένα ποσοστό** (π.χ. Το 10%) γίνεται ενήλικα **θηλυκά**, τα υπόλοιπα δεν προλαβαίνουν να ενηλικιωθούν (πεθαίνουν) ή γίνονται αρσενικά. Βρείτε τη μεταβολή του πληθυσμού.

Πληθυσμός Θηλυκών P_t

Νέα Θηλυκά :=0,1*100* P_t =10 P_t=bP_t d=1

$$P_{t+1} = (1+b-d)P_t = 10P_t$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$\frac{dN}{dt} = rN(1-\frac{N}{K}) \qquad \Delta P = rP(1-\frac{P}{K})$$

r: διακριτός ρυθμός μεταβολής πληθυσμού

$$P_{t+1} - P_t = rP_t(1-\frac{P_t}{K}) \Rightarrow P_{t+1} = P_t\left[1+r(1-\frac{P_t}{K})\right]$$

Δεν υπάρχει γενική λύση συναρτήσει του P_o του r και του K

Επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

$$P_{t+1} = F(P_t)$$

Τιμή Ισορροπίας (Τ.Ι.)

$$P^* = F(P^*)$$

$$P_t = P^* + \varepsilon_t \qquad P_{t+1} = P^* + \varepsilon_{t+1}$$

$$\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} = \frac{P_{t+1} - P^*}{P_t - P^*} = \frac{F(P_t) - F(P^*)}{P_t - P^*}$$

$$F'(P^*) = \lim_{P_t \to P^*} \frac{F(P_t) - F(P^*)}{P_t - P^*}$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Τιμή Ισορροπίας $$F'(P^*) = \lim_{P_t \to P^*} \frac{F(P_t) - F(P^*)}{P_t - P^*}$$

Θεώρημα. Αν ένα διακριτό μοντέλο της μορφής $P_{t+1} = F(P_t)$ έχει Τ.Ι. P^* τότε

- $\left|F'(P^*)\right| < 1$ *το σημείο είναι ευσταθές.*
- $\left|F'(P^*)\right| > 1$ *το σημείο είναι ασταθές.*
- $\left|F'(P^*)\right| = 1$ *δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ευστάθεια.*

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

$$P_{t+1} = P_t\left[1 + r(1 - \frac{P_t}{K})\right]$$

Τιμές Ισορροπίας $\quad P_1^* = 0 \quad P_2^* = K$

$$F'(P^*) = \left(1 + r - \frac{2rP^*}{K}\right)$$

$P_1^* = 0 \qquad \left|F'(P^*)\right| = \left|1 + r\right| > 1, \quad r > 0$ Ασταθές

$P_2^* = K \qquad \left|F'(P^*)\right| = \left|1 - r\right|$

$\left|1 - r\right| < 1$ Ευσταθές

$\left|1 - r\right| > 1$ Ασταθές

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

- Αν $0 < 1-r < 1$: το σημείο είναι ευσταθές.

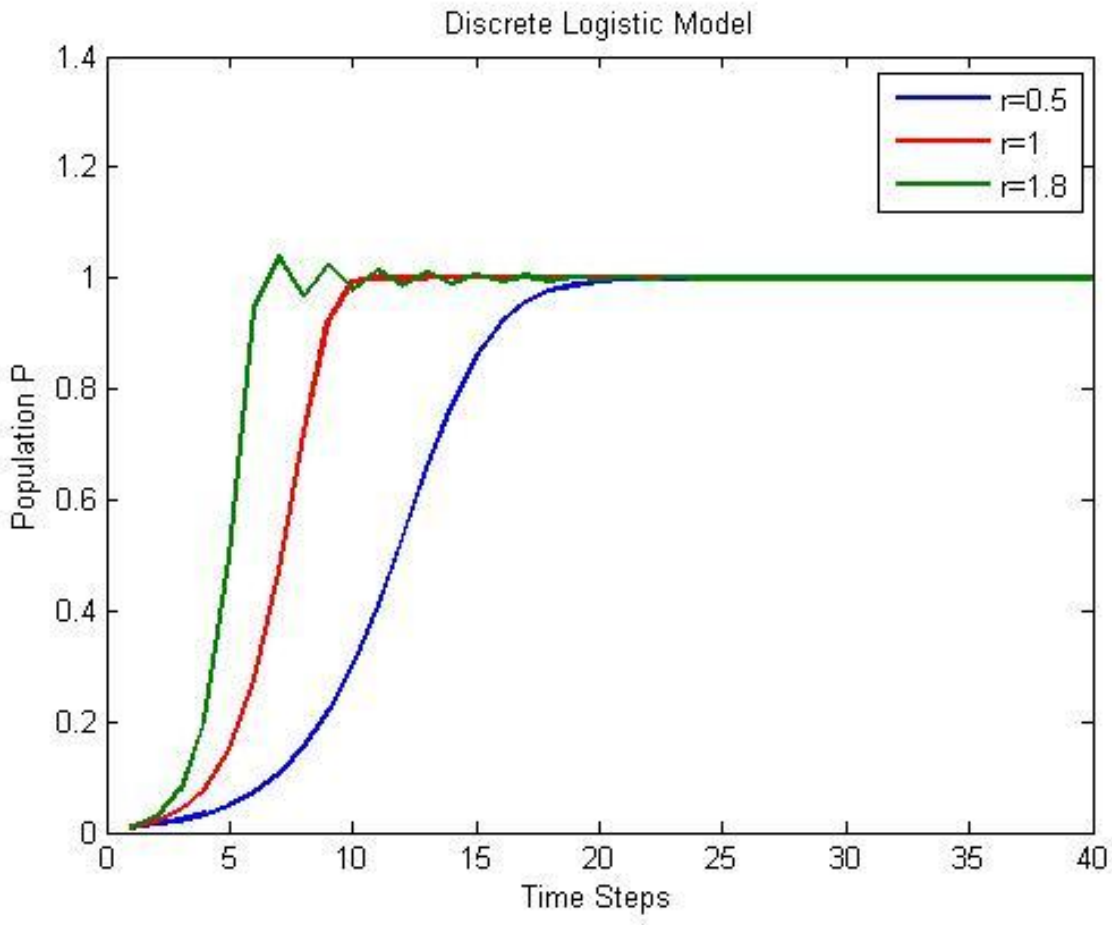
- Αν $1 < r < 2$: το σημείο είναι ευσταθές αλλά το πρόσημο της διαταραχής εναλλάσσεται όσο ο χρόνος αυξάνει. Δηλαδή ο πληθυσμός φτάνει στην Τ.Ι. με ταλάντωση.

- Αν $r > 2$: Ο πληθυσμός δεν έχει Τ.Ι. Το σημείο είναι ασταθές.

- Αν το r είναι αρκετά μεγάλο ο πληθυσμός δεν φτάνει σε ισορροπία, και ταυτόχρονα δεν μεταβάλλεται μονότονα. Εμφανίζει δηλαδή μη προβλέψιμη (χαοτική) συμπεριφορά.

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

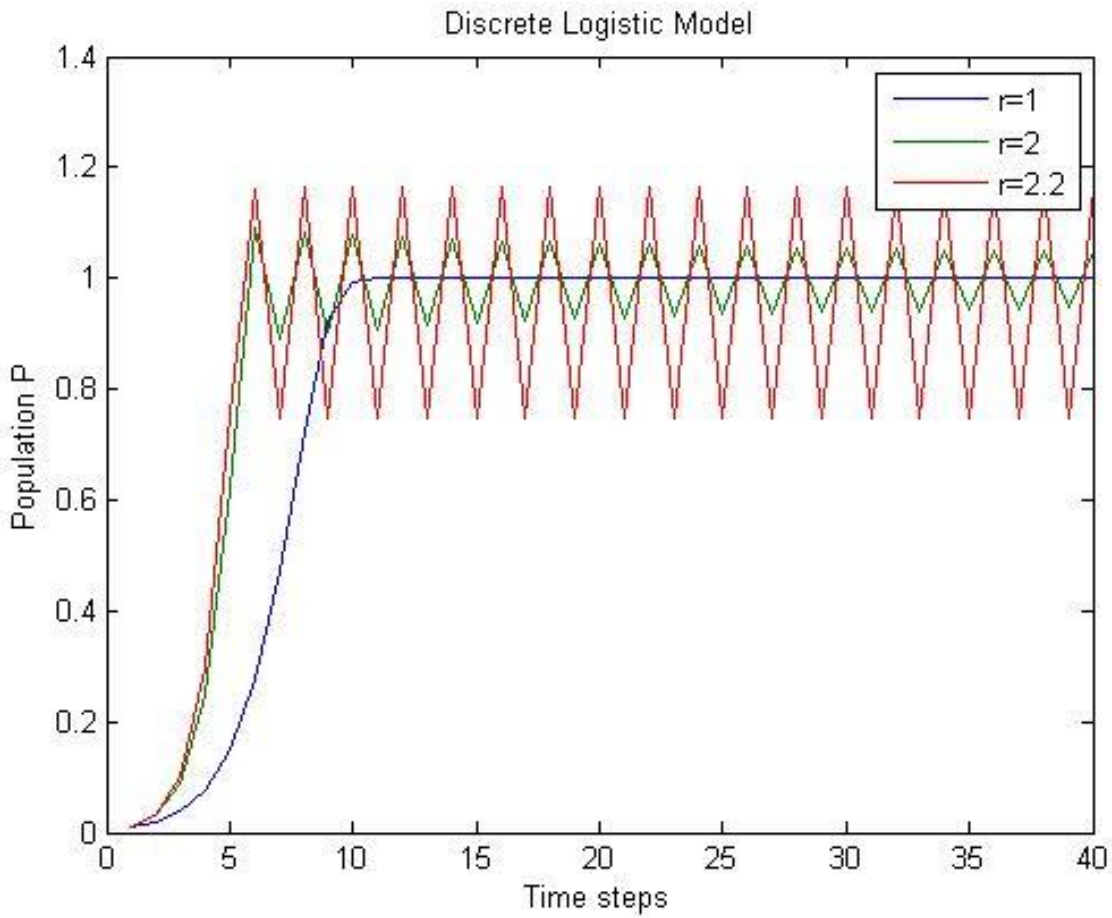
$$P_0 = 0.01,$$
$$K = 1$$

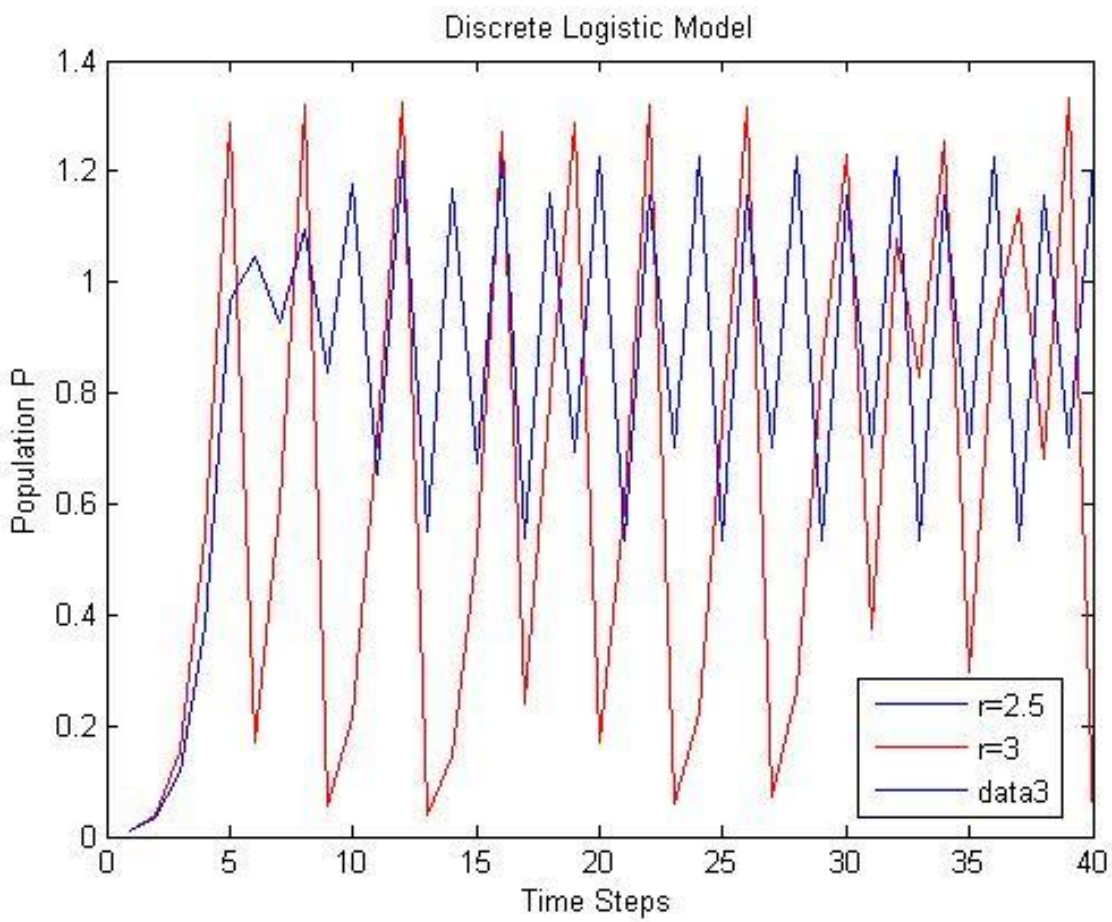


ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

$P_0 = 0.01,$

$K = 1$



ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΟΣ ΕΙΔΟΥΣ

$$P_0 = 0.01,$$
$$K = 1$$