Βιολογικά Μοντέλα

Μοντέλα αλληλεπιδρώντων πληθυσμών

Μαθηματική Μοντελοποίηση

ΣΥΝΕΧΗ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΟΝΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Θηρευτής–Θήραμα (Predator-Pray): Αν το ένα είδος τρέφεται με το άλλο, ο πληθυσμός του ενός (θηράματος) μειώνεται και του άλλου (θηρευτή) αυξάνεται.

Ανταγωνισμός (Competition): Τα δύο είδη ανταγωνίζονται μεταξύ τους για κάποια κοινή τροφή στο οικοσύστημα. Σε αυτή την περίπτωση ο πληθυσμός και των δύο ειδών μειώνεται λόγω ανταγωνισμού.

Συμβίωση (Mutualism ή Symbiosis): Τα δύο είδη βρίσκονται σε αρμονική συμβίωση καθώς το ένα «βοηθάει» το άλλο. Ο πληθυσμός και των δύο ειδών αυξάνει.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Υποθέσεις Ι:

(α) ο θηρευτής δεν μπορεί να τραφεί παρά μόνο με το θήραμα, ενώ

(β) για το θήραμα υπάρχει «απεριόριστη» τροφή στο περιβάλλον.

Πληθυσμός Θηράματος $N(t)$

Πληθυσμός Θηρευτή $P(t)$

Vito Volterra 1860-1940

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Υποθέσεις ΙΙ:

1. Ο πληθυσμός του θηράματος, απουσία του θηρευτή μεγαλώνει εκθετικά.
2. Αντίστοιχα ο πληθυσμός του θηρευτή, απουσία του θηράματος μειώνεται εκθετικά.
3. Η μείωση του πληθυσμού του θηράματος λόγω του θηρευτή είναι ανάλογη των «επαφών» θηράματος-θηρευτή.
4. Αντίστοιχα η αύξηση του πληθυσμού του θηρευτή λόγω του θηράματος είναι ανάλογη των «επαφών» θηράματος-θηρευτή, και μάλιστα είναι γραμμικής μορφής ως προς το γινόμενο.

$$\frac{dN}{dt} = aN + \ldots.$$

$$\frac{dP}{dt} = -dP + \ldots.$$

$$\frac{dN}{dt} = -bPN + \ldots.$$

$$\frac{dP}{dt} = cPN + \ldots.$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

$$\frac{dN}{dt} = aN - bPN = N(a - bP)$$

$$\frac{dP}{dt} = cPN - dP = P(cN - d)$$

Συνεχές μοντέλο θηράματος-θηρευτή Lotka-Volterra

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Αδιαστατοποίηση

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = kv(u-1)$$

$$\tau = at, \quad k = \frac{d}{a}, \quad u(\tau) = \frac{cN(t)}{d}, \quad v(\tau) = \frac{bP(t)}{a}$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Σημεία ισορροπίας

$$\frac{du}{d\tau} = u(1-v) = 0$$

$$\frac{dv}{d\tau} = kv(u-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (u_1^*, v_1^*) = (0,0)$$

$$(u_2^*, v_2^*) = (1,1)$$

Μελέτη Σημείων ισορροπίας $(u_1^*, v_1^*) = (0,0)$

Διαταραχή (x,y)

$$u = u_1^* + x = x$$

$$v = v_1^* + y = y$$

Γραμμικοποίηση

$$\frac{dx}{d\tau} \approx x, \quad \frac{dy}{d\tau} \approx -ky$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

$$\frac{dx}{d\tau} \approx x, \quad \frac{dy}{d\tau} \approx -ky \qquad (u_1^*, v_1^*) = (0,0)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = x, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -ky$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -k$$

Σαγματικό σημείο (k>0)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{B}e^{\lambda\tau}$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Μελέτη Σημείων ισορροπίας $(u_2^*, v_2^*) = (1,1)$

Διαταραχή (x,y)

$$u = u_2^* + x = 1 + x$$

$$v = v_2^* + y = 1 + y$$

Γραμμικοποίηση

$$\frac{d(x+1)}{d\tau} \approx -y$$

$$\frac{d(y+1)}{d\tau} \approx kx$$

$$xy \ll x, \quad xy \ll y$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = i\sqrt{k}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{k}$$

Κέντρο

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

$$(u_1^*, v_1^*) = (0,0)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -k$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = m_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 e^{\lambda_1 \tau} + m_2 \tilde{\mathbf{u}}_2 e^{\lambda_2 \tau}$$

$$\mathbf{x} = m_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 e^{\tau} + m_2 \tilde{\mathbf{u}}_2 e^{-k\tau}$$

$$(u_2^*, v_2^*) = (1,1)$$

$$\lambda_1 = i\sqrt{k}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{k}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = l_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 e^{\lambda_1 \tau} + l_2 \tilde{\mathbf{u}}_2 e^{\lambda_2 \tau}$$

$$\mathbf{x} = l_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 e^{i\sqrt{k}\tau} + l_2 \tilde{\mathbf{u}}_2 e^{-i\sqrt{k}\tau}$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

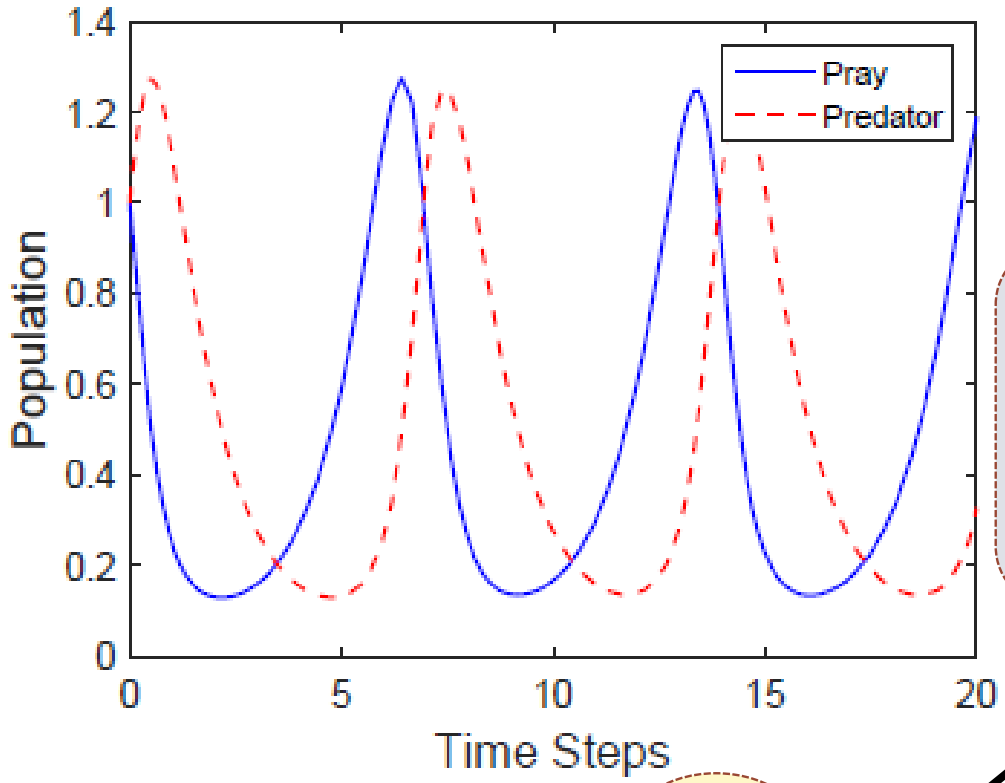
Πρόβλημα Μεθόδου :

Μικρή διαταραχή μπορεί να οδηγήσει σε άλλη λύση !

Επίλυση συστήματος αριθμητικά

π.χ. Με μέθοδο Runge-Kutta

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

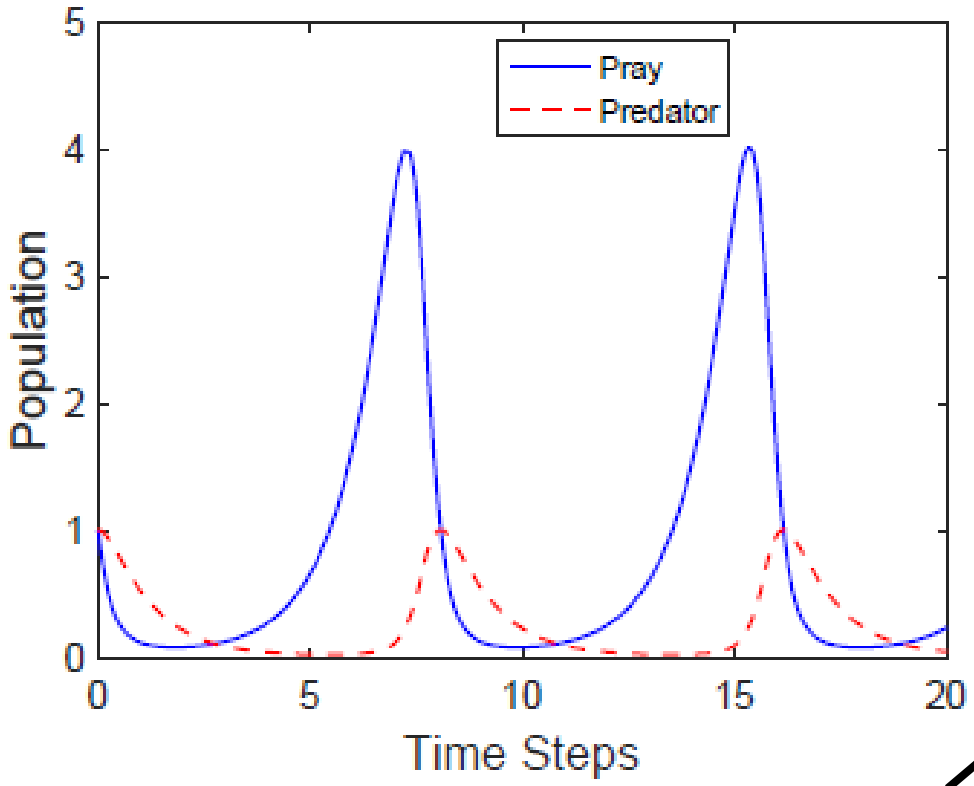


Μείωση πληθυσμού θηράματος – Αύξηση πληθυσμού θηρευτή με αλληλεπίδραση

$$a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$$

$$N(0) = P(0) = 1$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ



Μείωση πληθυσμού θηράματος αναλογικά μεγαλύτερη από την αύξηση του πληθυσμού του θηρευτή με αλληλεπίδραση

$$a = 1, b = 4, c = 1, d = 1$$

$$N(0) = P(0) = 1$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Καμπύλες στο χώρο των φάσεων

$$\frac{dv}{du} = \frac{kv(u-1)}{u(1-v)}$$

$$\frac{dP}{dN} = \frac{P(cN-d)}{N(a-bP)}$$

$$\frac{dP(a-bP)}{P} = \frac{dN(cN-d)}{N} \qquad \frac{dN(d-cN)}{N} + \frac{dP(a-bP)}{P} = 0$$

$$d\ln N - cx + a\ln P - bP = C$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

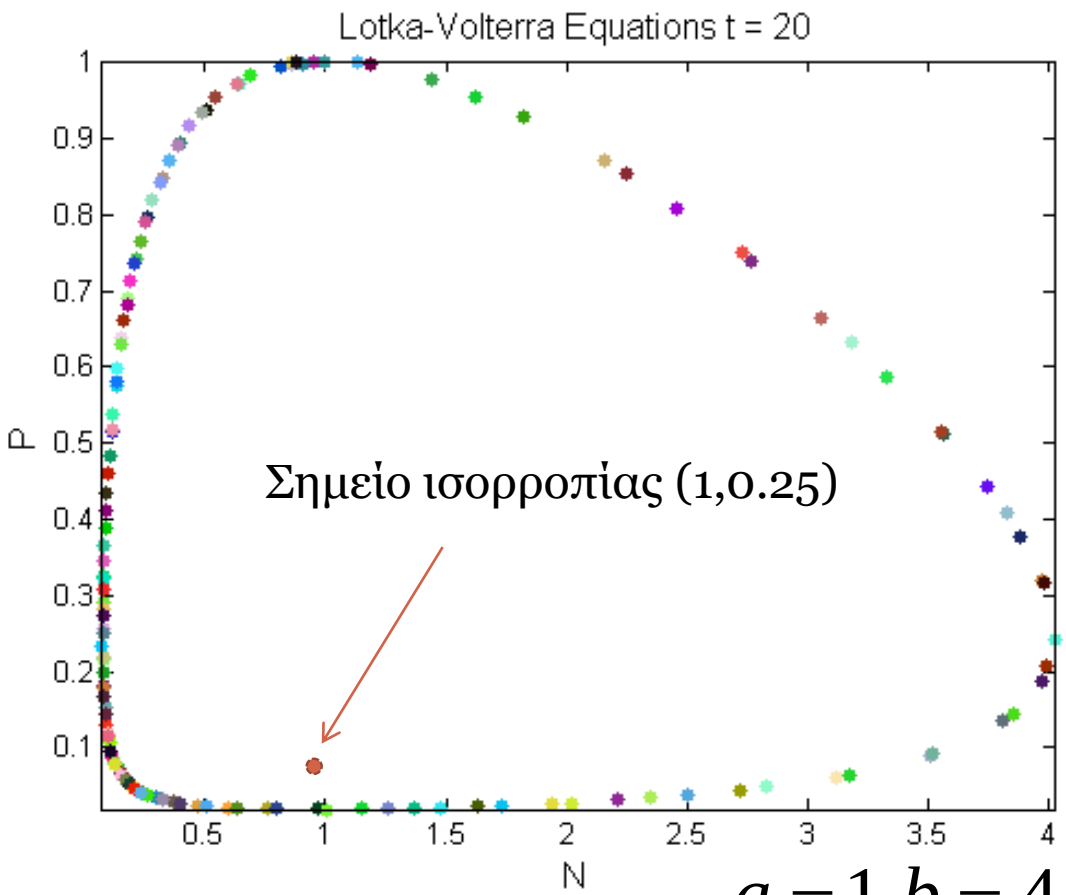
2ο σημείο ισορροπίας

$$(u_2^*, v_2^*) = (1,1)$$

$$N = \frac{ud}{c}, \quad P = \frac{av}{b}$$

$$N^* = \frac{d}{c}, \quad P^* = \frac{a}{b}$$

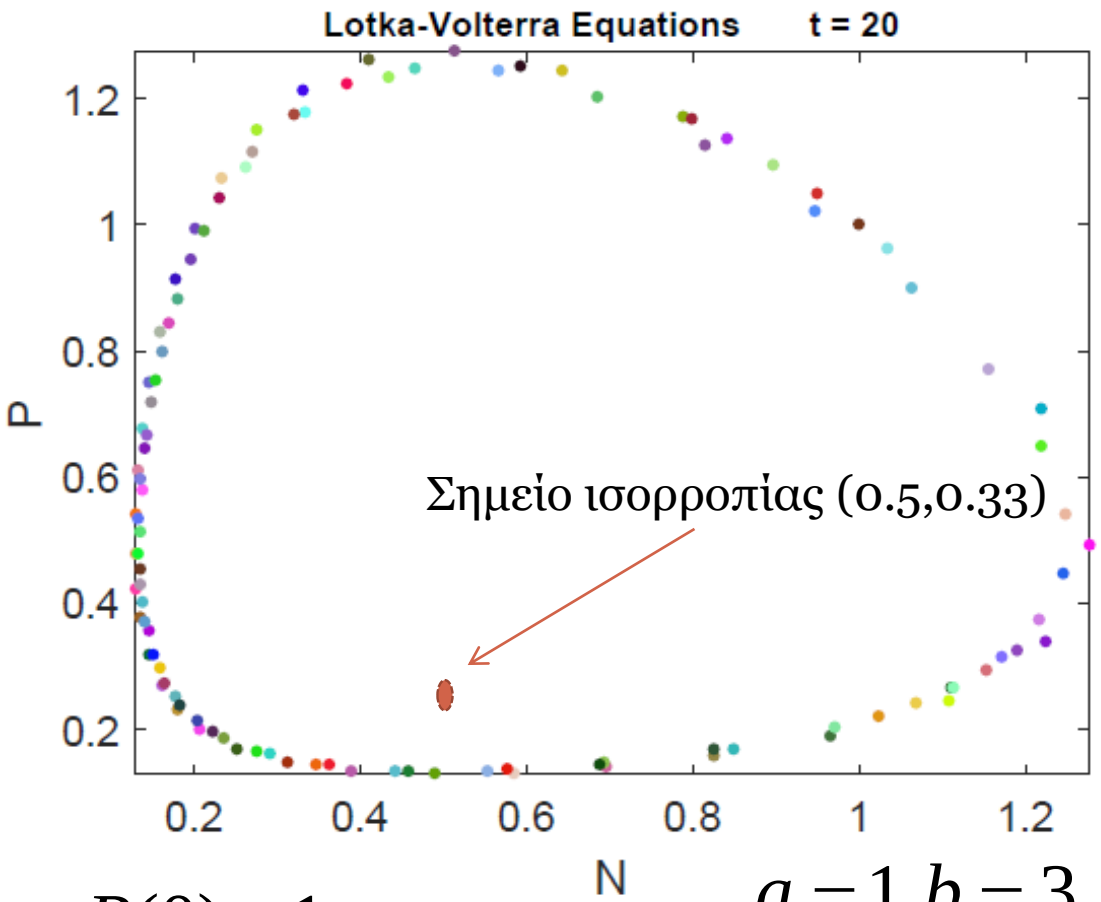
ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ



$$N(0) = P(0) = 1$$

$$a = 1, b = 4, c = 1, d = 1$$

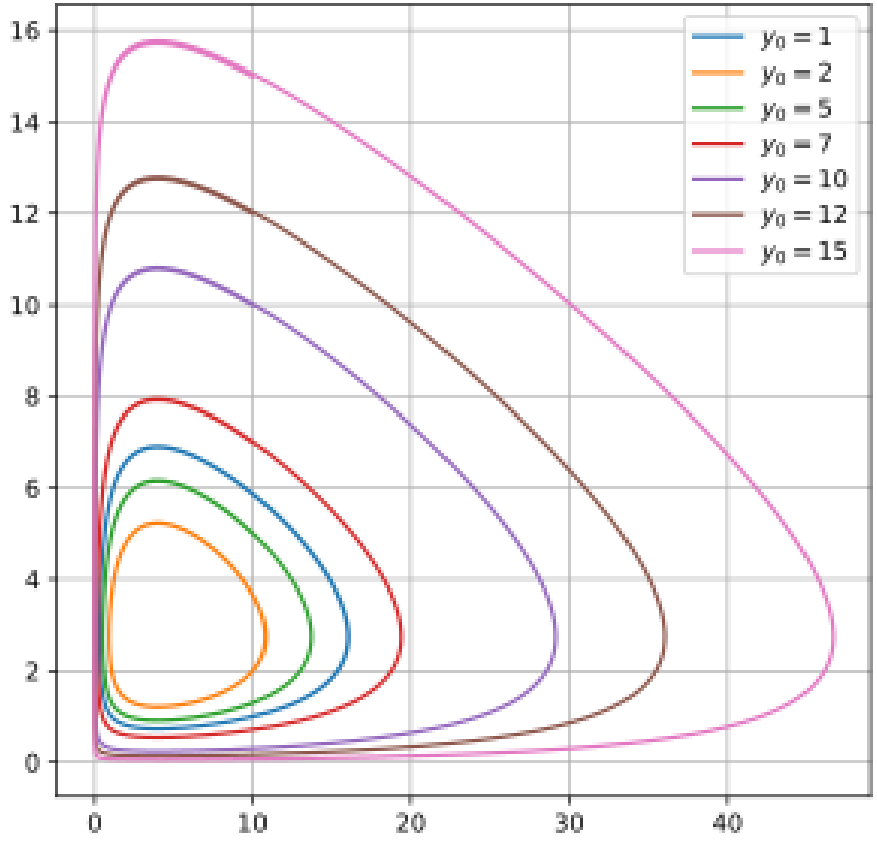
ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ



$$N(0) = P(0) = 1$$

$$a = 1, b = 3, c = 2, d = 1$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ



Αρχικές Συνθήκες Θηρευτή