Βιολογικά Μοντέλα

Μοντέλα αλληλεπιδρώντων πληθυσμών

Μέρος 2ο

Μαθηματική Μοντελοποίηση

ΓΕΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Λογιστική αύξηση πληθυσμού θηράματος

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - bPN$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cN - d)$$

Γενικά μοντέλα

$$\frac{dN}{dt} = NF(N, P)$$

$$\frac{dP}{dt} = PG(N, P)$$

ΓΕΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Γενικά μοντέλα

$$\frac{dN}{dt} = NF(N,P) \qquad \frac{dP}{dt} = PG(N,P)$$

$$F(N,P) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right) - PR(N)$$

Θήραμα απουσία θηρευτή – Λογιστική εξίσωση

R(N) - Αύξηση πληθυσμού θηρευτή σε σχέση με τις μεταβολές του πληθυσμού του θηράματος

ΓΕΝΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ ΘΗΡΕΥΤΗ

Γενικά μοντέλα

$$\frac{dN}{dt} = NF(N,P) \qquad \frac{dP}{dt} = PG(N,P)$$

$$F(N,P) = rN(1-\frac{N}{K}) - PR(N)$$

$R(N) = BN \longrightarrow$ Μοντέλο Lotka-Volterra

$$R(N) = \frac{A}{N+B} \qquad G(N,P) = k(1-\frac{hP}{N})$$

$$R(N) = \frac{AN}{N^2+B^2} \qquad G(N,P) = -d + eR(N)$$

$$R(N) = \frac{A(1+e^{-aN})}{N}$$

Όλες οι σταθερές >0

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Έστω δύο είδη με πληθυσμούς *N1(t)* και *N2(t)* σε χρόνο *t*, τα οποία ανταγωνίζονται για την ίδια πηγή τροφής.

Υποθέσεις :

- Ο πληθυσμός κάθε είδους, απουσία του άλλου, ακολουθεί λογιστική μορφή.
- Η αλληλεπίδραση (ανταγωνισμός) οδηγεί σε μείωση και των δύο πληθυσμών.

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1})$$

Όλες οι σταθερές >0

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 (1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2})$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1})$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 (1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2})$$

Αδιαστατοποίηση του μοντέλου

$$u_1(\tau) = \frac{N_1(t)}{K_1}, \quad u_2(\tau) = \frac{N_2(t)}{K_2}, \quad \tau = r_1 t$$

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}, \quad a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - a_{12}u_2) = f_1(u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2(1 - u_2 - a_{21}u_1) = f_2(u_1, u_2)$$

Σημεία ισορροπίας

$$(u_1^*, u_2^*) = (0,0).$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (0,1).$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (1,0)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}}\right)$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΜΒΙΩΣΗΣ

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (1 - \frac{N_1}{K_1} + b_{12} \frac{N_2}{K_1})$$

Όλες οι σταθερές >ο

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 (1 - \frac{N_2}{K_2} + b_{21} \frac{N_1}{K_2})$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 (1 - u_1 + a_{12} u_2) = f_1(u_1, u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho u_2 (1 - u_2 + a_{21} u_1) = f_2(u_1, u_2)$$

Σημεία ισορροπίας

$$(u_1^*, u_2^*) = (0,0)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (1,0)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (0,1)$$

$$(u_1^*, u_2^*) = (\frac{1 + a_{12}}{1 - a_{12} a_{21}}, \frac{1 + a_{21}}{1 - a_{12} a_{21}})$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ-ΘΗΡΕΥΤΗ

$$\Delta P = P_{t+1} - P_t$$
$$\Delta Q = Q_{t+1} - Q_t$$

$$\Delta P = F(P,Q)$$
$$\Delta Q = G(P,Q)$$

Λογιστικό Μοντέλο για τον πληθυσμό του θηράματος απουσία θηρευτή

$$\Delta P = rP(1 - \frac{P}{K}) - sPQ$$
$$\Delta Q = -uQ + vPQ$$

Όλες οι σταθερές >0

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ-ΘΗΡΕΥΤΗ

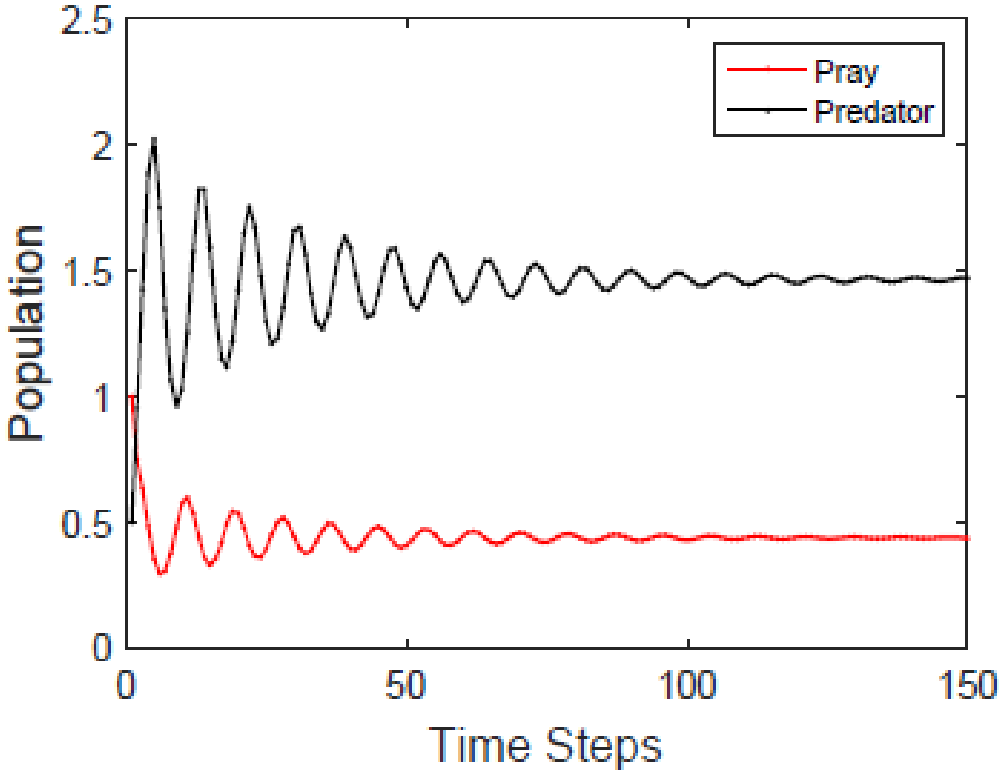
Διακριτό Μοντέλο Lotka-Volterra με λογιστικό όρο

$$P_{t+1} = P_t\left[1 + r(1 - \frac{P_t}{K})\right] - sP_tQ_t$$

$$Q_{t+1} = (1-u)Q_t + vP_tQ_t$$

Οι συντελεστές *s* και *υ* καθορίζουν το βαθμό αλληλεπίδρασης των πληθυσμών. Όσο αυτοί είναι μεγαλύτεροι, τόσο η αλληλεπίδραση είναι μεγαλύτερη

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ-ΘΗΡΕΥΤΗ

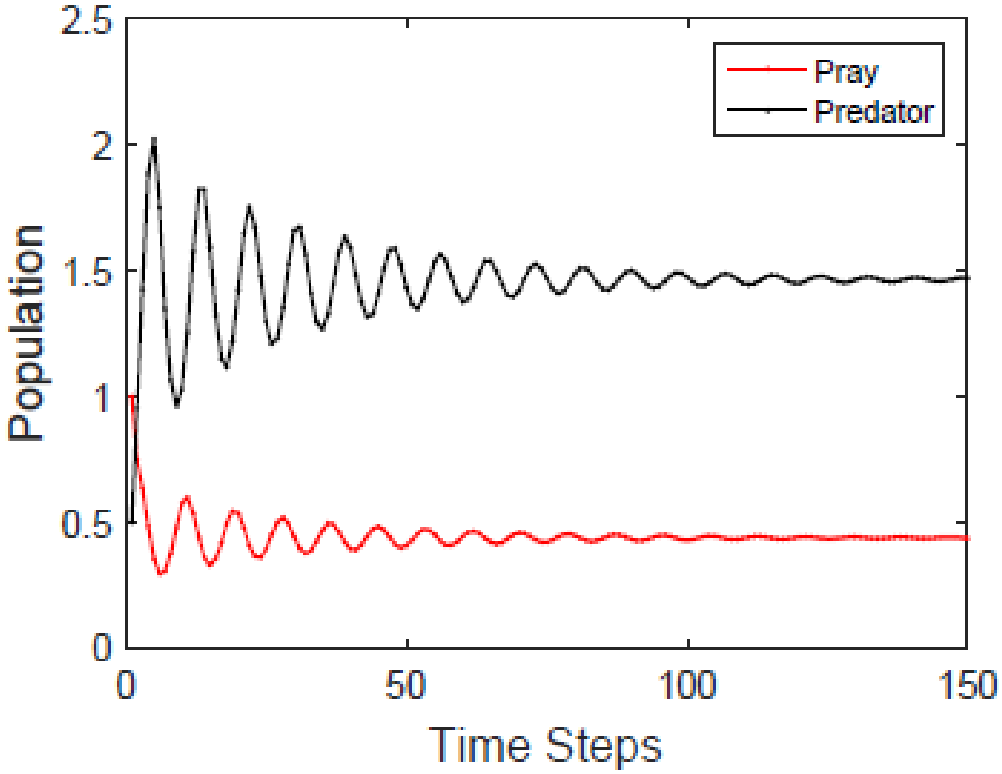


Pray : Θήραμα
Predator : Θηρευτής

$$K = 1,\ P_0 = 1.0,\ Q_0 = 0.5$$

$$r = 1.3, \quad s = 0.5, \quad u = 0.7, \quad v = 1.6$$

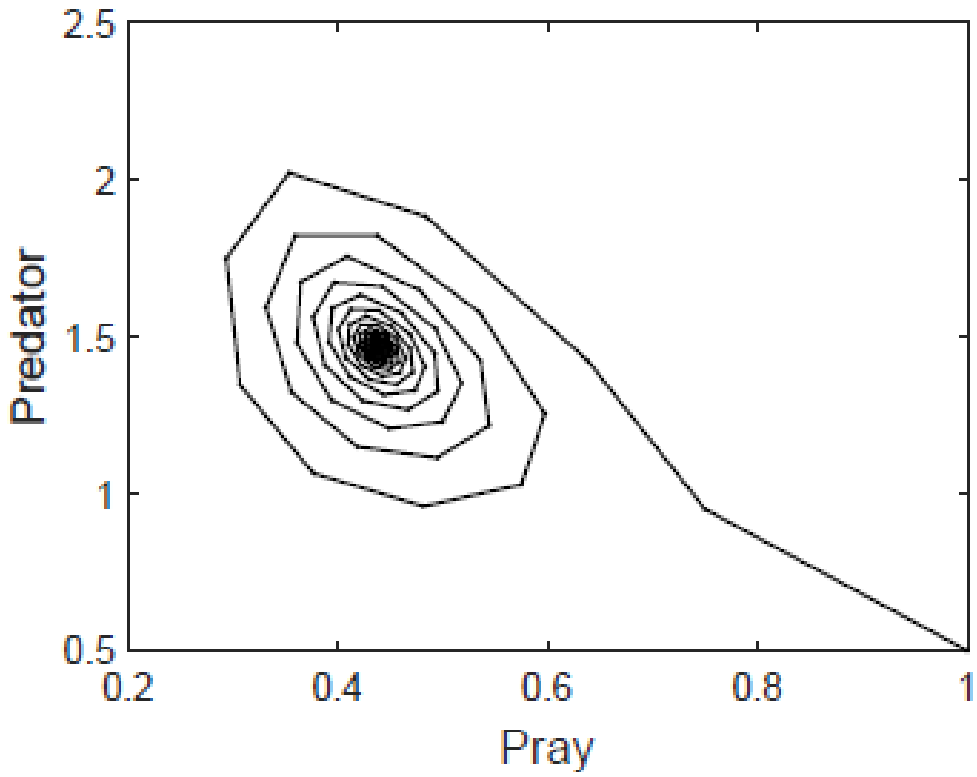
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ-ΘΗΡΕΥΤΗ



Pray : Θήραμα
Predator : Θηρευτής

Μικρές τιμές s και υ : Μικρή αλληλεπίδραση και οι πληθυσμού τείνουν σε σταθερές τιμές

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ-ΘΗΡΕΥΤΗ

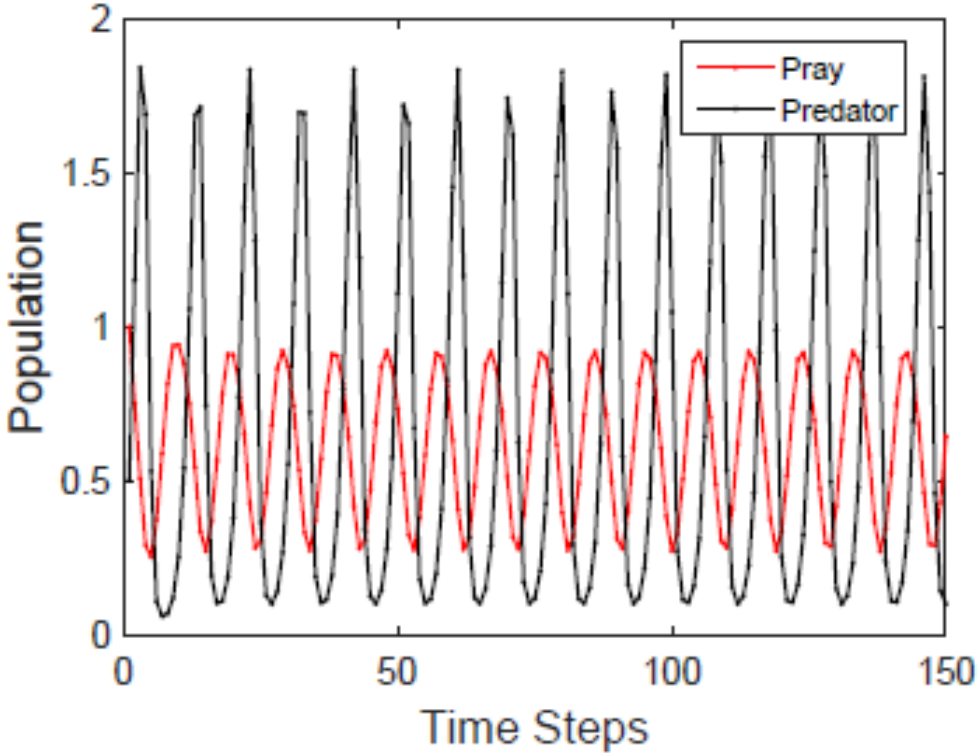


Pray : Θήραμα
Predator : Θηρευτής

$$K = 1,\ P_0 = 1.0,\ Q_0 = 0.5$$

$$r = 1.3, \quad s = 0.5, \quad u = 0.7, \quad v = 1.6$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΗΡΑΜΑΤΟΣ-ΘΗΡΕΥΤΗ



Μεγάλη ταλάντωση του πληθυσμού του θηρευτή !

$$K = 1,\ P_0 = 1.0,\ Q_0 = 0.5$$

$$r = 1.0, \quad s = 0.5, \quad u = 0.7, \quad v = 2.8$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

$$\Delta P = P_{t+1} - P_t$$
$$\Delta Q = Q_{t+1} - Q_t$$

Απλό μοντέλο

$$\Delta P = rP(1 - \frac{P+Q}{K})$$
$$\Delta Q = uQ(1 - \frac{P+Q}{K})$$

Το ένα είδος εξαφανίζει το άλλο ! Επικρατεί εκείνο με το μεγαλύτερο r ή u

Σύνθετο μοντέλο

$$\Delta P = rP(1 - \frac{P+Q}{K}) - sPQ$$
$$\Delta Q = uQ(1 - \frac{P+Q}{K}) - vPQ$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΜΒΙΩΣΗΣ

Απλό μοντέλο

$$\Delta P = rP + sPQ$$
$$\Delta Q = uQ + vPQ$$

Μη ρεαλιστικό !

Σύνθετο μοντέλο

$$\Delta P = rP(1 - \frac{P}{K}) + sPQ$$
$$\Delta Q = -uQ + vPQ$$