ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

2021-2022

Διάλεξη 4

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Μιχάλης Ταρουδάκης

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Θεωρούμε φορτίο q_0 σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$

Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι $\vec{F}$

Εάν το φορτίο μετακινηθεί κατά ds θα παραχθεί έργο

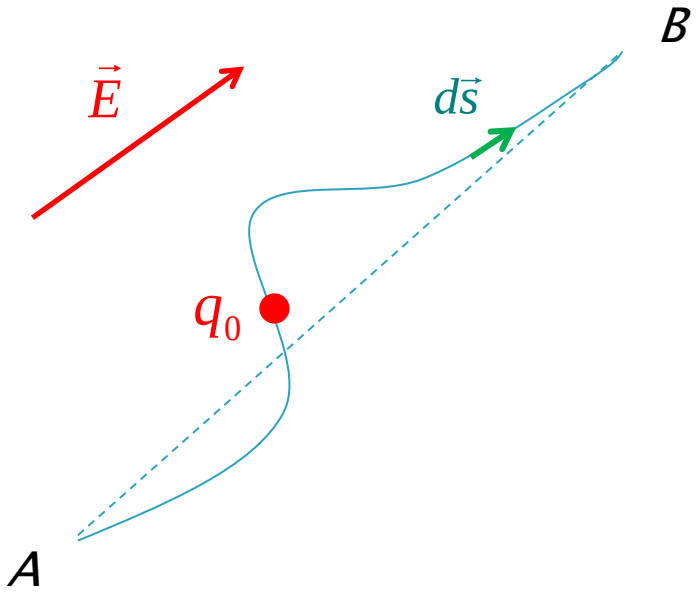
$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι σταθερό. Επομένως θα έχομε μείωση της δυναμικής ενέργειας ισόποσα.

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Εάν έχομε μετακίνηση θετικού φορτίου από το Α στο Β



$$W+U=ct$$

$$\Delta W=-\Delta U \qquad dW=-dU$$

$$dW = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$dU = -q_0\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Η διαφορά δυναμικού δεν εξαρτάται από τη διαδρομή του φορτίου αφού η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική.

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Επομένως ανάμεσα σε δύο σημεία Α και Β η διαφορά δυναμικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta U = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Διαφορά Δυναμικού : $\Delta V = \dfrac{\Delta U}{q_0}$ $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$

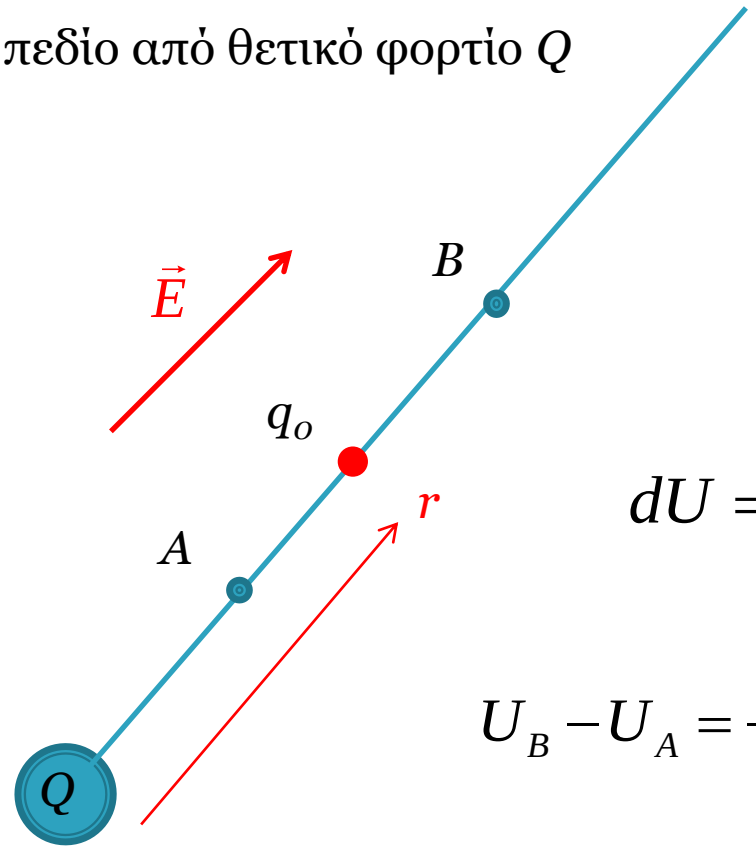
Ηλεκτρικό Δυναμικό (Δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου) :

$$V = \frac{U}{q_0}$$

Μονάδα $1V = \dfrac{J}{C}$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Ηλεκτρικό πεδίο από θετικό φορτίο Q



$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$F(r) = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

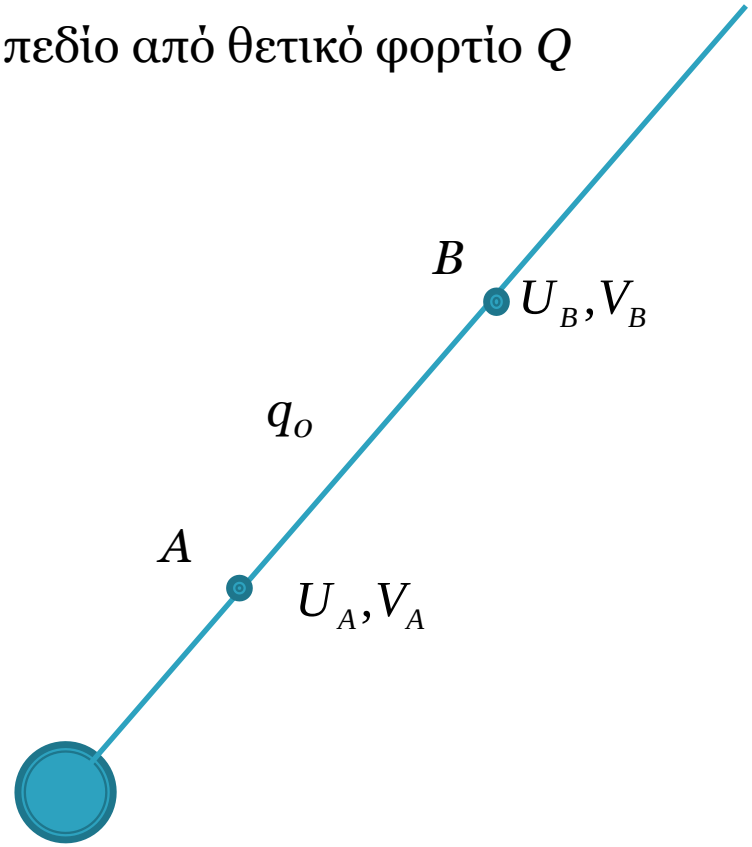
$$dU = -q_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{Qq_0 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_B - U_A = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Qq_0 dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$U_B - U_A = -\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} = -\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Ηλεκτρικό πεδίο από θετικό φορτίο Q



$$U_B - U_A = -\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$U_B - U_A = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

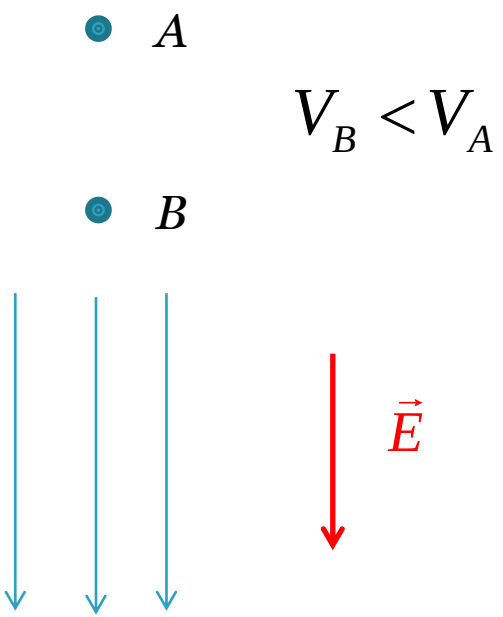
$$V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}, \quad V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

$$r_B > r_A \qquad V_B < V_A$$

Δυναμική Ηλεκτρικού Πεδίου

Οι δυναμικές γραμμές οδεύουν προς την κατεύθυνση της μειούμενης δυναμικής ενέργειας, επομένως μειούμενου δυναμικού



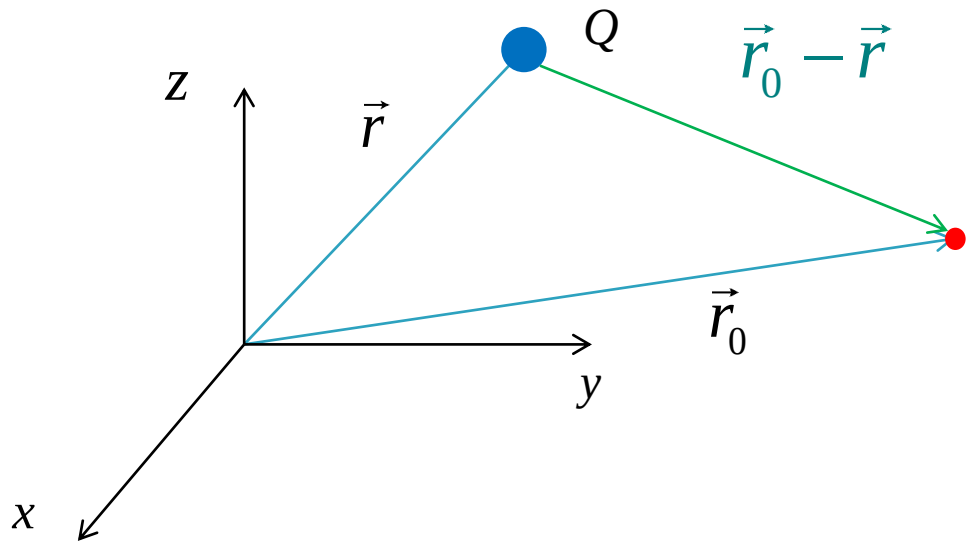
$$V_B < V_A$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Για φορτίο Q στη θέση r το δυναμικό στη θέση r_o

$$V(\Delta r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \Delta r}$$

$$V(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}\|}$$



Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Για φορτίο Q στη θέση r το δυναμικό στη θέση r_o

$$V(\Delta r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \Delta r}$$

$$V(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\left\|\vec{r}_0 - \vec{r}\right\|}$$

Για πεδίο προερχόμενο από περισσότερα φορτία N στις θέσεις r_i

$$V_{tot}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{\left\|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right\|}$$

Για συνεχή κατανομή φορτίου

$$V_{tot}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_Q \frac{dQ}{\left\|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right\|}$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0$ θα το συμβολίσουμε με $\vec{x}$

Στη γενική περίπτωση $E(\vec{x})$, $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad d\vec{s} = \left(dx, dy, dz\right)$$

$$dV = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

$$dV = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου V

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

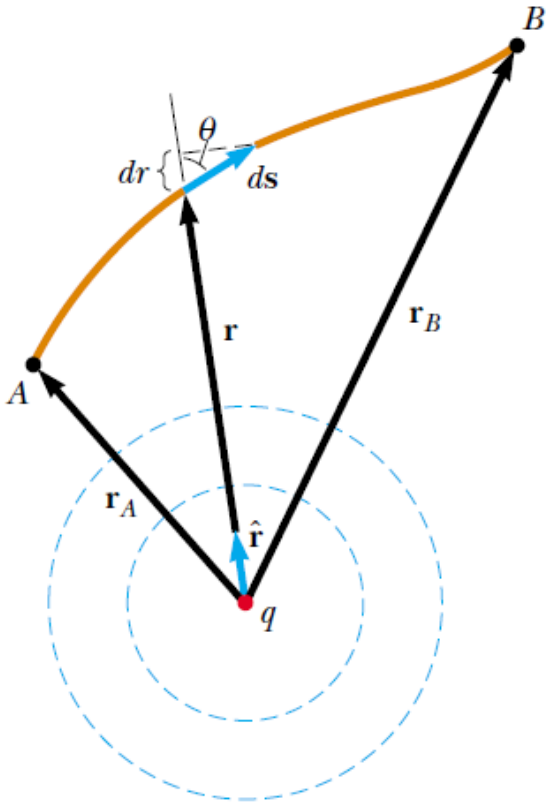
Σημειακό Φορτίο

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = k_e q \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} \qquad \hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cos\theta = dr$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} dr$$



Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

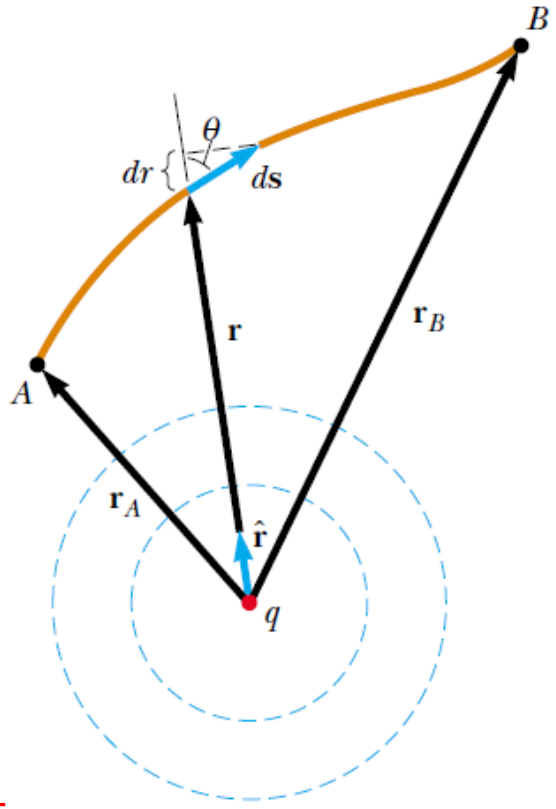
Σημειακό Φορτίο

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} dr$$

$$V_B - V_A = -k_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = \left. \frac{k_e q}{r} \right|_{r_A}^{r_B} = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$



$$V(r) = k_e \frac{q}{r}$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

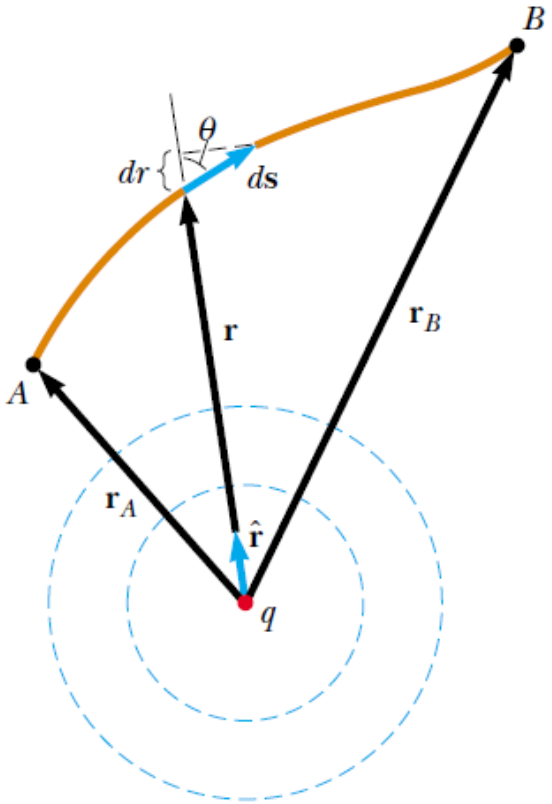
Πολικές συντεταγμένες

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) V$$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \right) V$$



Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

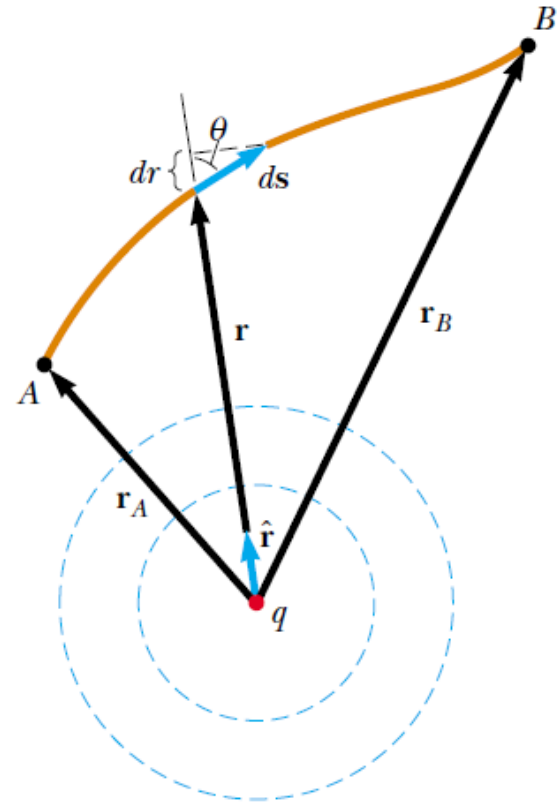
Πολικές συντεταγμένες

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad \vec{E} = -\nabla V$$

Σφαιρική συμμετρία $\quad V = V(r)$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \frac{dV}{dr}\hat{r} = -k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

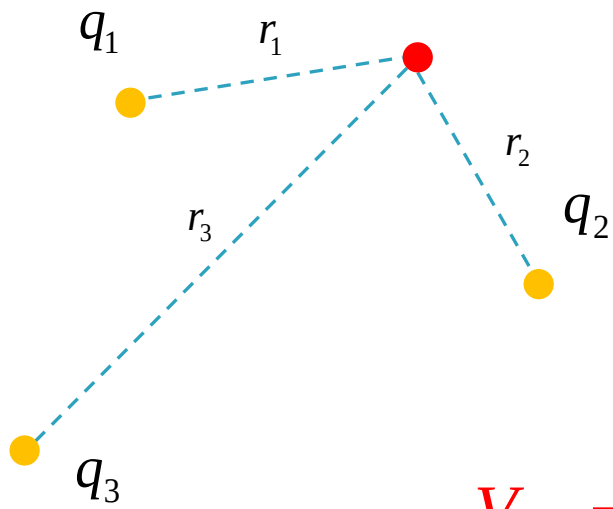


Δυναμικό Ηλεκτρικού Πεδίου

$$V = k_e \frac{q}{r}$$

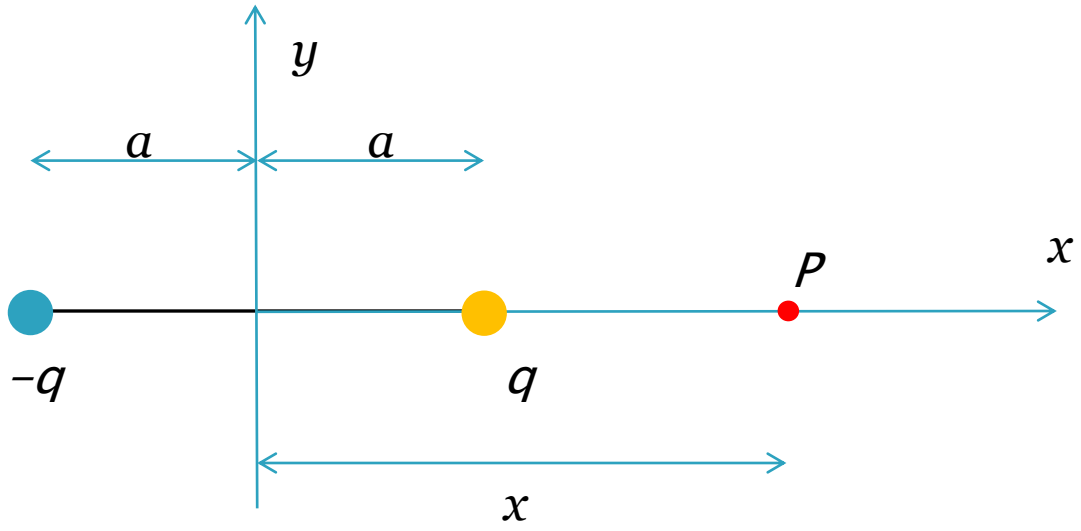
$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$



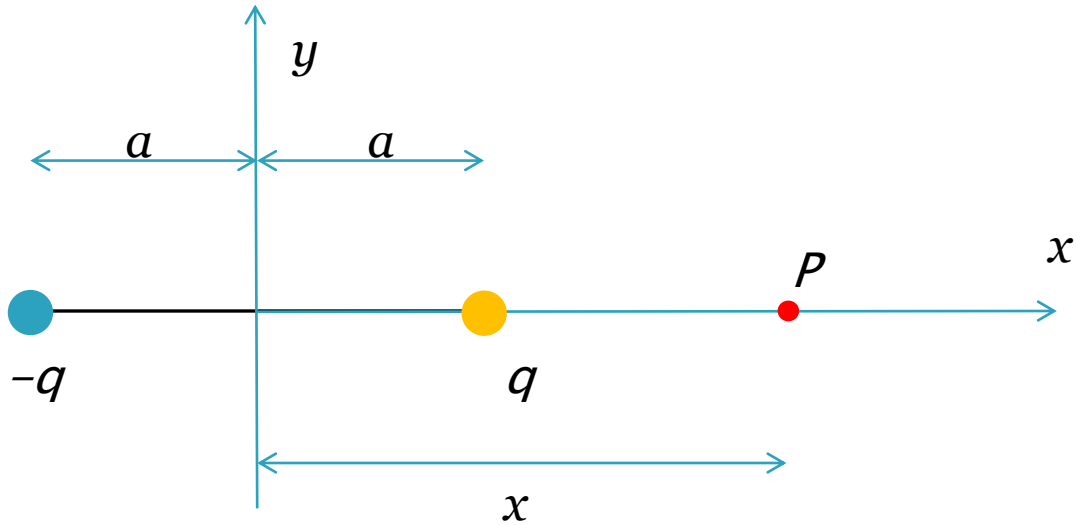
$$V_{123} = k_e \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right)$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Διπόλου



Να υπολογιστεί το δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου στο σημείο P στην προέκταση του φορέα του διπόλου σε απόσταση x από το κέντρο του

Δυναμικό Ηλεκτρικού Διπόλου

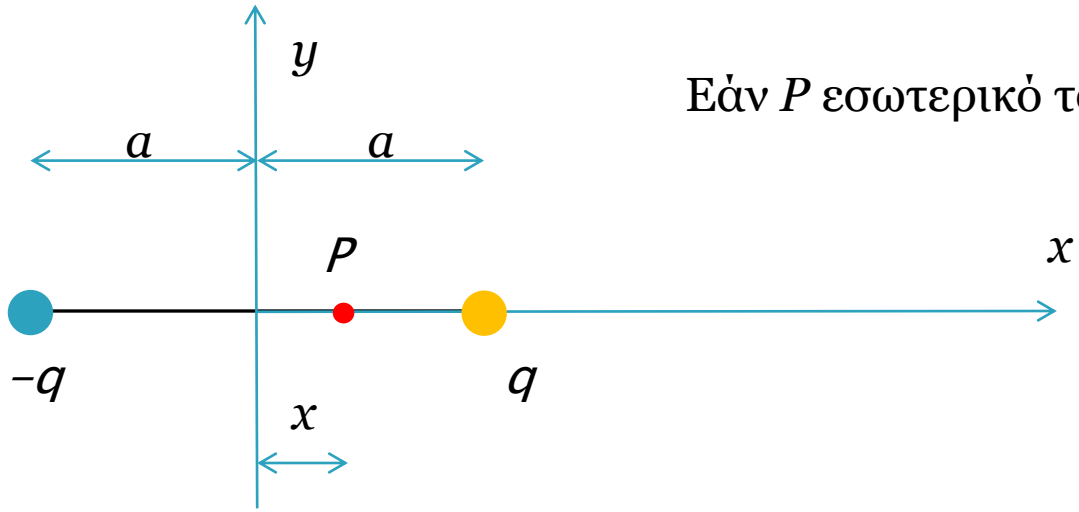


$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

$$x \gg a \qquad V \approx \frac{2k_e qa}{x^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3}$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Διπόλου

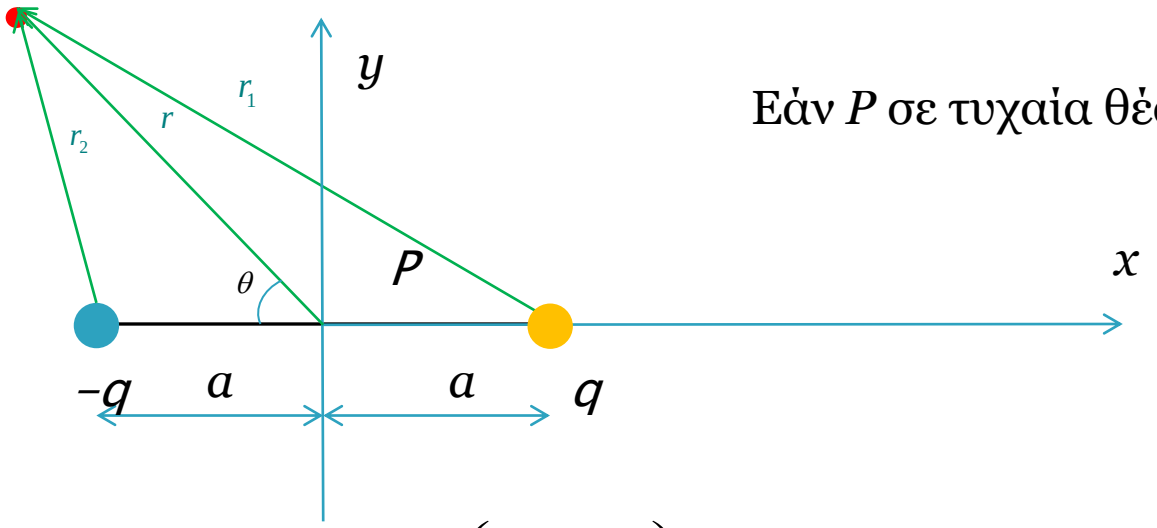


Εάν P εσωτερικό του διπόλου

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qa}{a^2 - x^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{2k_e qa}{a^2 - x^2} \right) = -2k_e q \left(\frac{a^2 + x^2}{\left(a^2 - x^2\right)^2} \right)$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Διπόλου



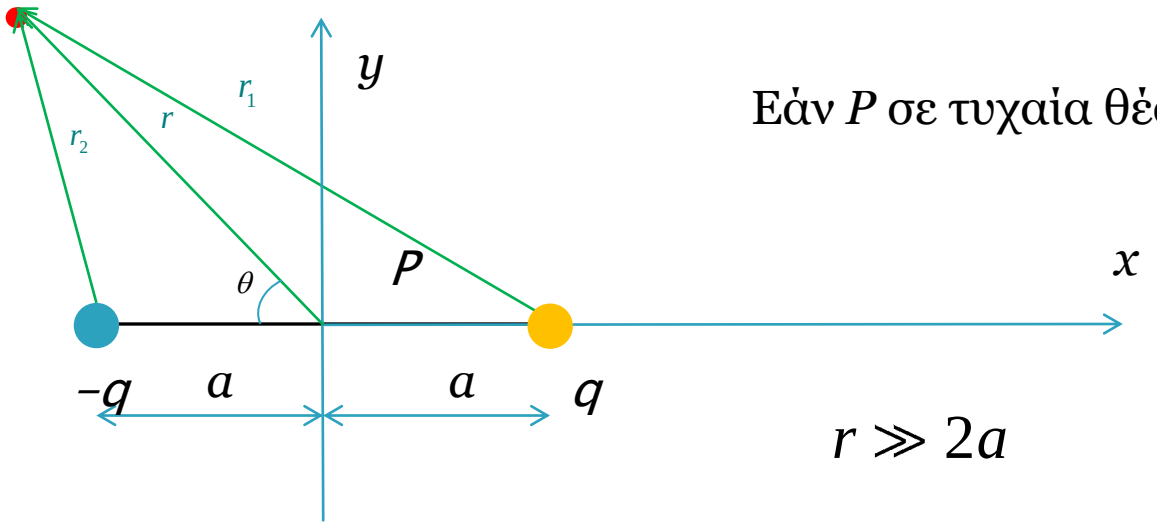
Εάν P σε τυχαία θέση

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = k_e \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r \gg 2a \qquad r_2 - r_1 \simeq -2a\cos\theta \qquad r_1 r_2 \simeq r^2$$

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) \simeq -k_e q \frac{2a\cos\theta}{r^2}$$

Δυναμικό Ηλεκτρικού Διπόλου



Εάν P σε τυχαία θέση

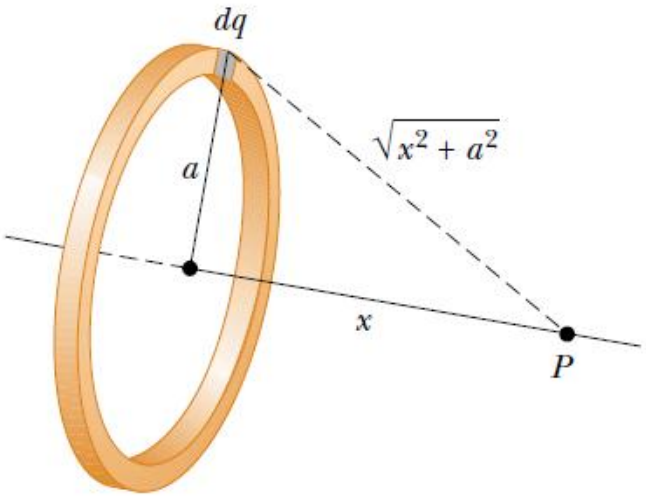
$$r \gg 2a$$

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) \simeq -k_e q \frac{2a\cos\theta}{r^2}$$

Το δυναμικό μεταβάλλεται από τη μέγιστη θετική τιμή για θ=180° στη μέγιστη αρνητική για θ=0° ενώ για θ=90° το δυναμικό είναι 0

$p = 2qa$ Μέτρο διπολικής ροπής

Δυναμικό δακτυλιδιού



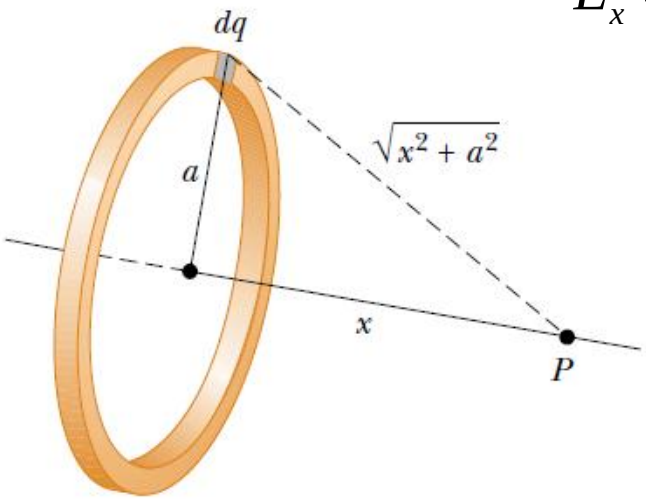
$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \frac{k_e Q x}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = 0$$

Δυναμικό δακτυλιδιού



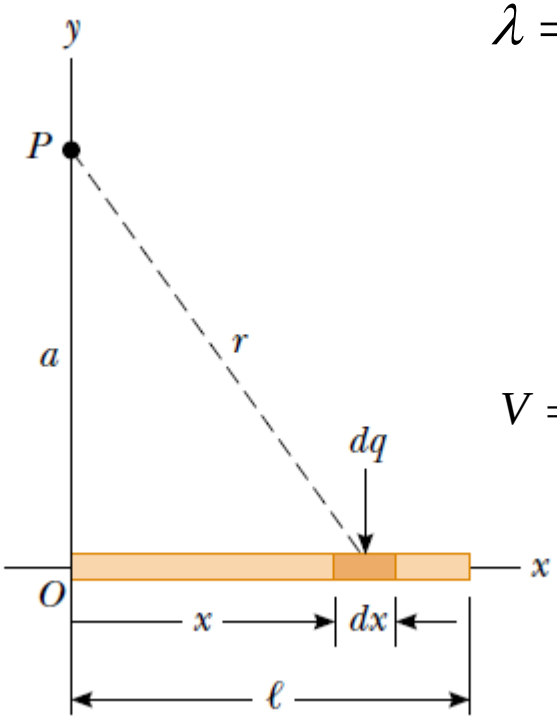
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \frac{k_e Q x}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

Το είχαμε δεί στο προηγούμενο μάθημα σε ενδιάμεσο αποτέλεσμα υπολογισμού ηλεκτρικού πεδίου από δίσκο. Η ακτίνα α είχε συμβολιστεί με *r*

$$dE_{xr} = k_e \frac{x}{\left(x^2 + r^2\right)^{3/2}} 2\pi r \sigma dr$$

$$Q = 2\pi r \sigma dr$$

Δυναμικό πεπερασμένης γραμμικής κατανομής φορτίου



$$\lambda = \frac{Q}{l} \qquad dq = \lambda dx \qquad V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Ζητάμε το δυναμικό στη θέση *P*

$$V = k_e \lambda \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e Q}{l} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e Q}{l} \ln\left(\frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{a} \right)$$

Αγωγοί

Αγωγοί είναι υλικά στο εσωτερικό των οποίων υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια.

Για αγωγούς σε ηλεκτροστατικό πεδίο σε ισορροπία :

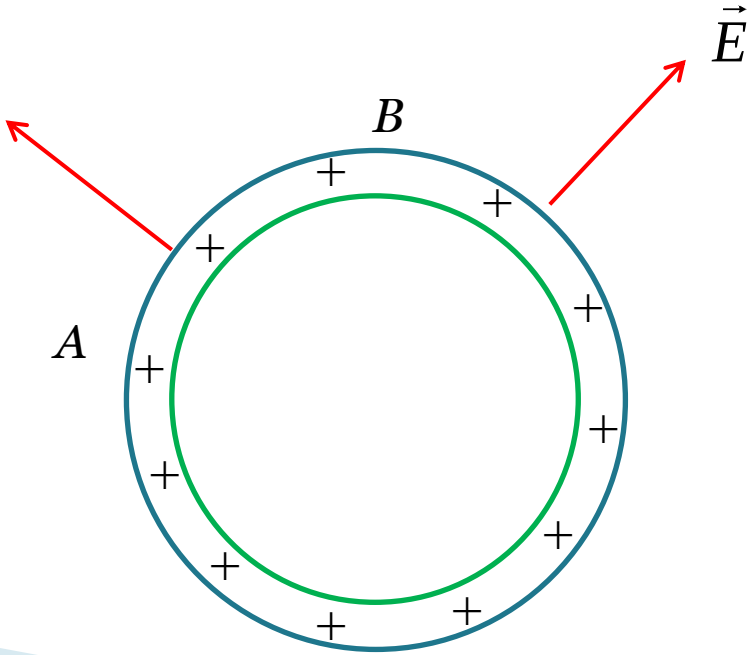
•Τα φορτία συγκεντρώνονται στην επιφάνεια του αγωγού.

• Οι δυναμικές γραμμές του συνολικού πεδίου είναι κάθετες σε κάθε σημείο της επιφάνειας του αγωγού.

•Στο εσωτερικό του αγωγού το δυναμικό είναι σταθερό.

Αγωγοί

Τα φορτία συγκεντρώνονται στην επιφάνεια του αγωγού.



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

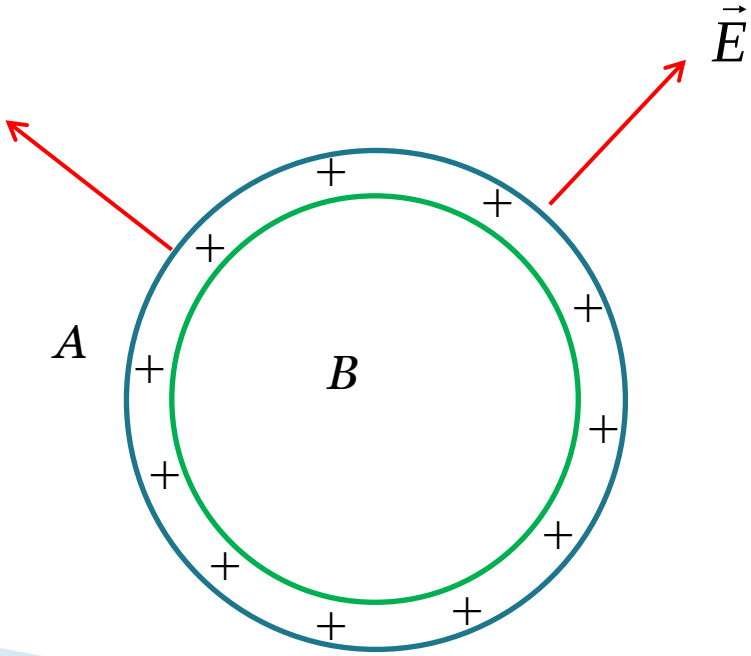
$$\vec{E} \perp d\vec{s}$$

$$V_B = V_A$$

Η επιφάνεια του αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια

Αγωγοί

Στο εσωτερικό του αγωγού, το δυναμικό είναι σταθερό



$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E}_B = 0$$

$$V_B = V_A$$