ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

2021-2022

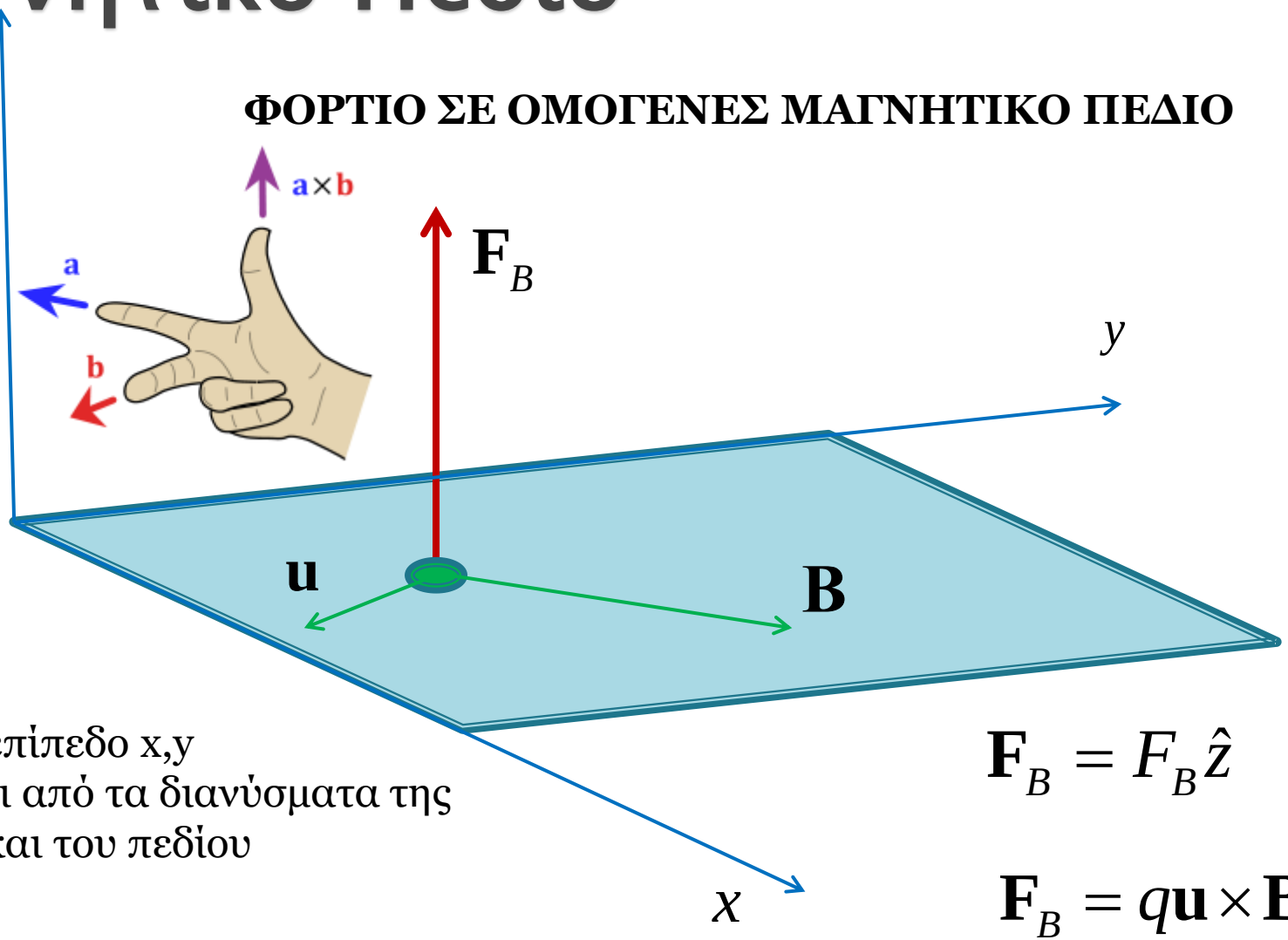
Διάλεξη 7

Πηγές Μαγνητικού πεδίου -Μαγνητική Ροή
Νόμος Gauss

Μιχάλης Ταρουδάκης

Μαγνητικό Πεδίο

ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Θεωρούμε επίπεδο x,y
που ορίζεται από τα διανύσματα της
ταχύτητας και του πεδίου

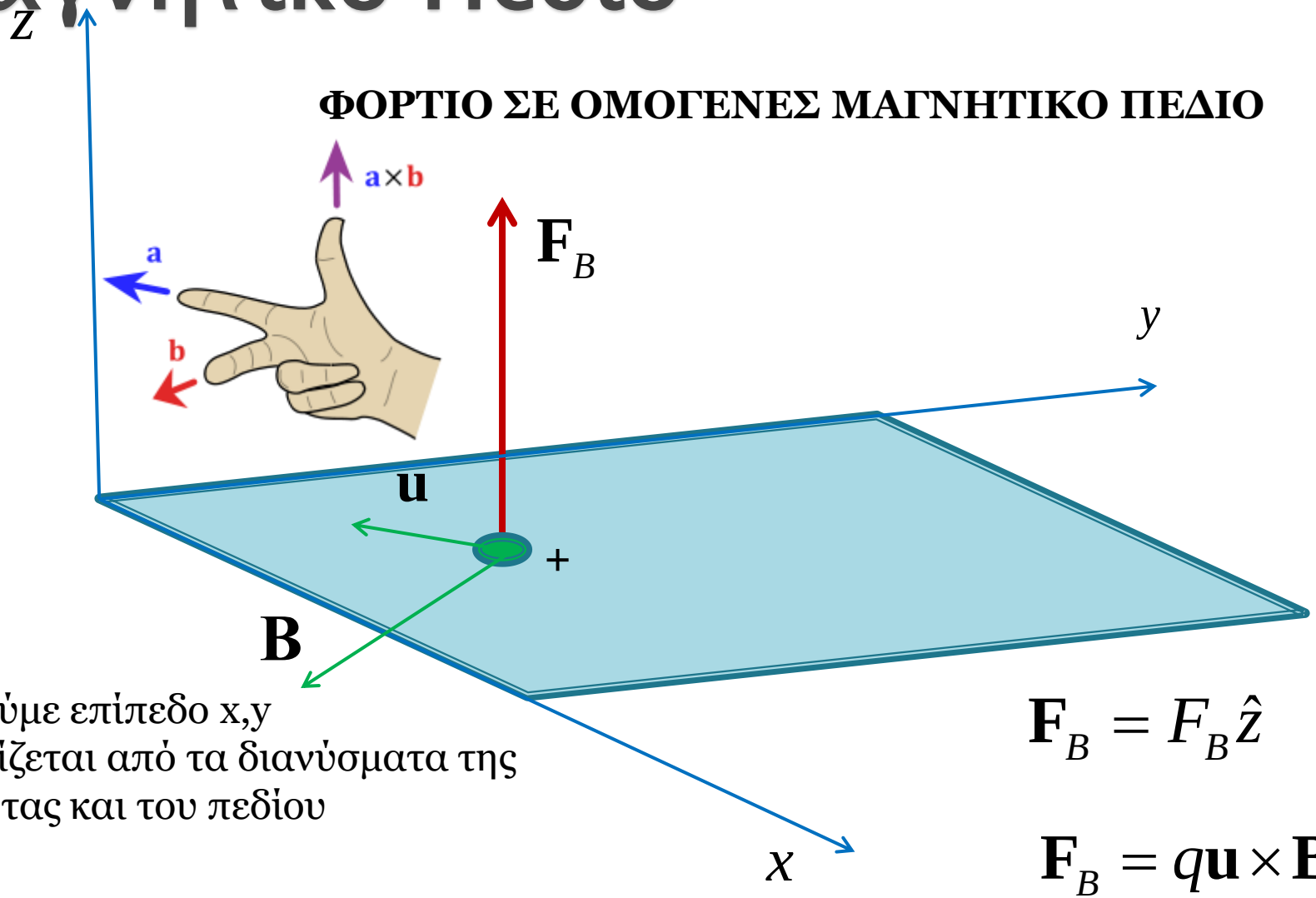
$$\mathbf{F}_B = F_B \hat{z}$$

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Μονάδες B Tesla (T) $Nt/\left(C \cdot \left(m/sec\right)\right)$

Μαγνητικό Πεδίο

ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Θεωρούμε επίπεδο x,y
που ορίζεται από τα διανύσματα της
ταχύτητας και του πεδίου

$$\mathbf{F}_B = F_B \hat{z}$$

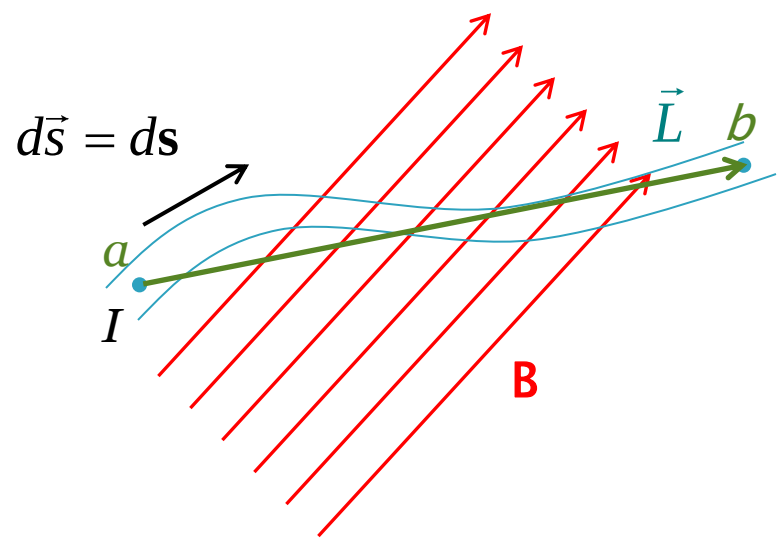
$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Μονάδες B Tesla (T) $Nt/\left(C \cdot \left(m/sec\right)\right)$

Μαγνητικό πεδίο που επενεργεί σε αγωγό

$$\mathbf{F}_B = IL\hat{n}\times\mathbf{B} \qquad d\mathbf{F}_B = Id\mathbf{s}\times\mathbf{B}$$

Αγωγός γενικής μορφής



$$\mathbf{F}_B = \int_a^b Id\mathbf{s}\times\mathbf{B}$$

$\mathbf{B}$ ομογενές

$$\mathbf{F}_B = I\left(\int_a^b d\mathbf{s}\right)\times\mathbf{B}$$

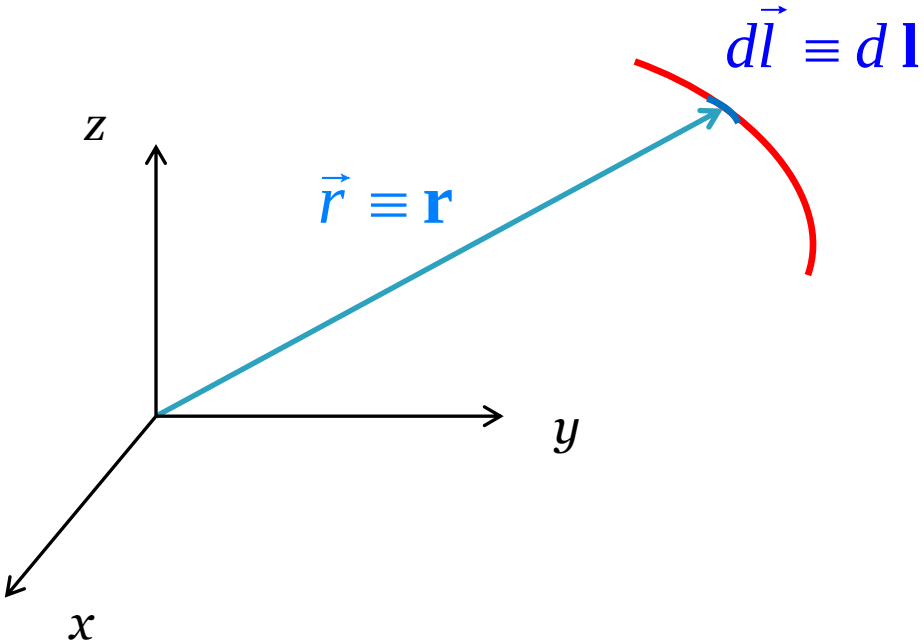
$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L}\times\mathbf{B}$$

Μαγνητική Δύναμη σε κλειστό αγωγό για ομογενές πεδίο :

$$\mathbf{F}_B = I\left(\oint d\mathbf{s}\right)\times\mathbf{B} = 0$$

Μαγνητική ροπή

Για ένα γενικό αγωγό η σχέση που δίνει τη διπολική ροπή είναι :



$$\boldsymbol{\mu} = I\frac{1}{2}\oint \mathbf{r}\times d\mathbf{l}$$

Για ένα κλειστό αγωγό γενικού σχήματος

$$\frac{1}{2}\oint \mathbf{r}\times d\mathbf{l} = S\hat{n} = \mathbf{S}$$

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S}$$

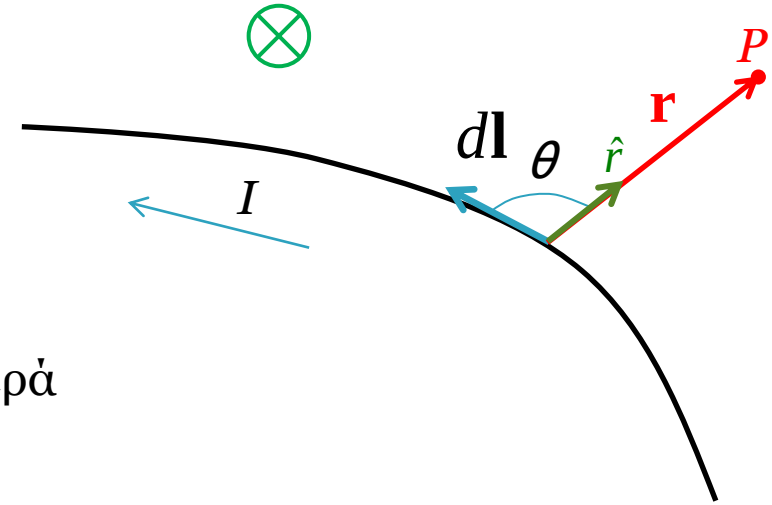
Μαγνητικό πεδίο από αγωγό

Jean-Baptiste Biot
(1774–1862)

Νόμος Biot Savart

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\mathbf{l}\times\hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}d\mathbf{l}\times\mathbf{r}$$

Félix Savart
(1791–1841)



$$\mathbf{r} = r\hat{r}$$

μ_0 Μαγνητική σταθερά

$=4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A

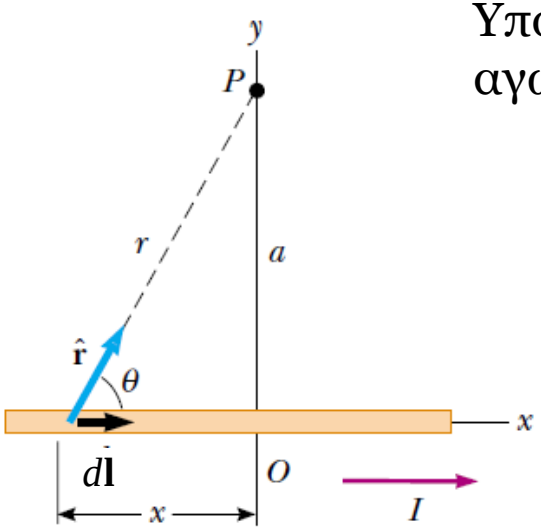
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I}{r^2}d\mathbf{l}\times\hat{r}$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό

Σύγκριση μαγνητικού πεδίου που παράγεται από ρευματοφόρο αγωγό και ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από σημειακό φορτίο.

Μαγνητικό Πεδίο	Ηλεκτρικό πεδίο
Το μέτρο μεταβάλλεται με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή	Το μέτρο μεταβάλλεται με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή
Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το διάνυσμα θέσης και το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού.	Το ηλεκτρικό πεδίο έχει διεύθυνση ακτινική της πηγής.
Το πεδίο δημιουργείται από κινούμενα φορτία που αποτελούν στοιχεία μιας ροής (απαιτείται ολοκλήρωση).	Το πεδίο μπορεί να δημιουργείται από μεμονωμένα φορτία

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό



(a)

Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο από ρευματοφόρο αγωγό μήκους l στη θέση P

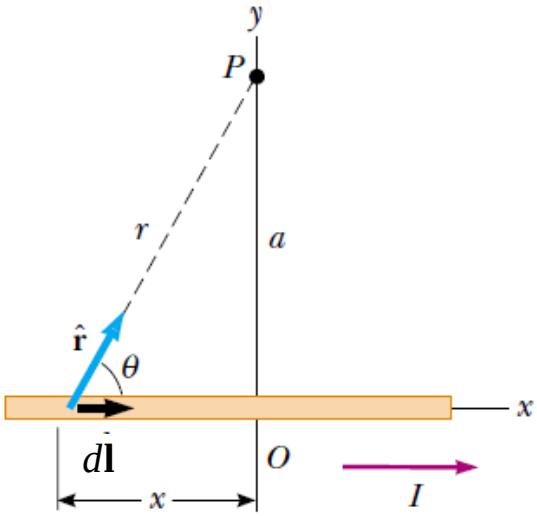
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\mathbf{l}\times\hat{r}$$

$$d\mathbf{l}\times\hat{r} = \left|d\mathbf{l}\times\hat{r}\right|\hat{z} = \left(dx\sin\theta\right)\hat{z}$$

$$d\mathbf{l}\times\hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(dx\sin\theta\right)\hat{z}$$

$$d\mathbf{B} = dB\hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\left(dx\sin\theta\right)\hat{z}$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό



(a)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\mathbf{l}\times\hat{r}$$

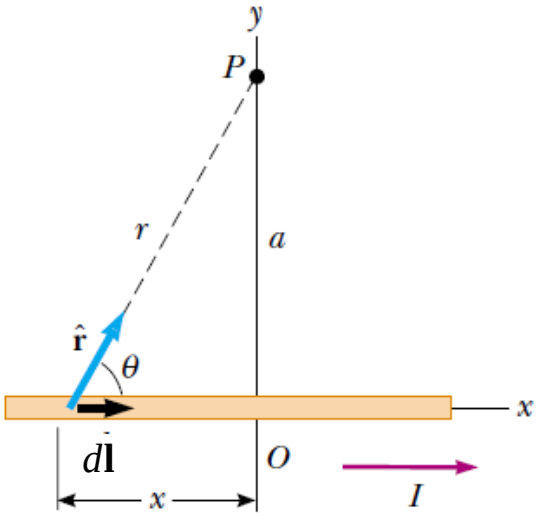
$$d\mathbf{B} = dB\hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\left(dx\sin\theta\right)\hat{z}$$

$$x = -r\cos\theta = -a\csc\theta\cos\theta = -a\cot\theta$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad dx = a\csc^2\theta d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\csc^2\theta\sin\theta d\theta}{\alpha^2\csc^2\theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\alpha}$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό

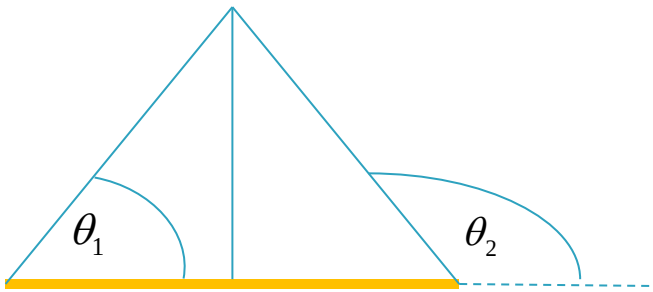


(a)

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\csc^2\theta\sin\theta d\theta}{\alpha^2\csc^2\theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\alpha}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\alpha}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi\alpha}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

Διεύθυνση πεδίου :

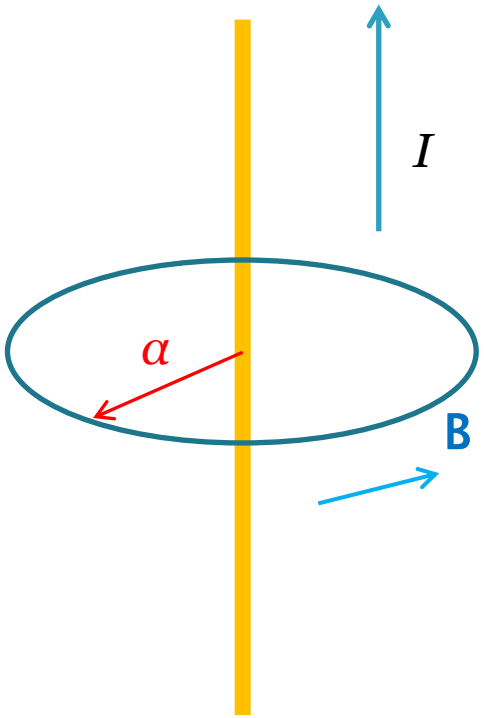


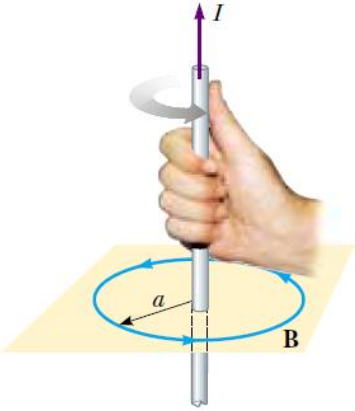
Για αγωγό απείρου μήκους

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό

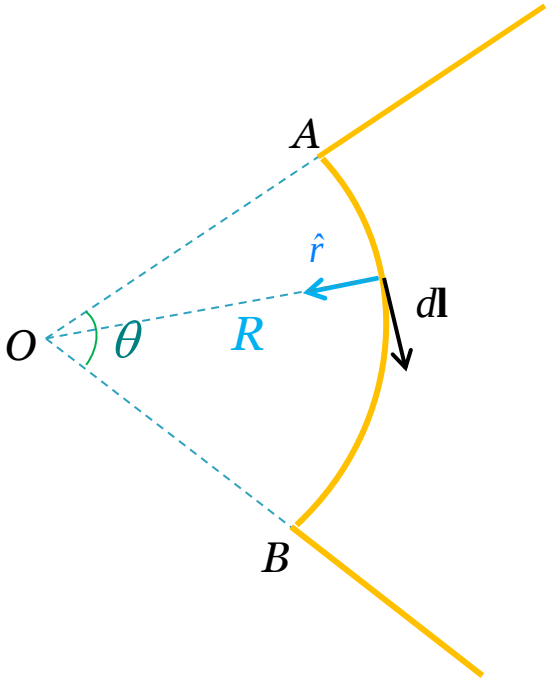




$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό

Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο από το ρευματοφόρο αγωγό στη θέση *O*



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\mathbf{l}\times\hat{r}$$

Τα ακτινικά τμήματα δεν συνεισφέρουν στη δημιουργία μαγνητικού πεδίου

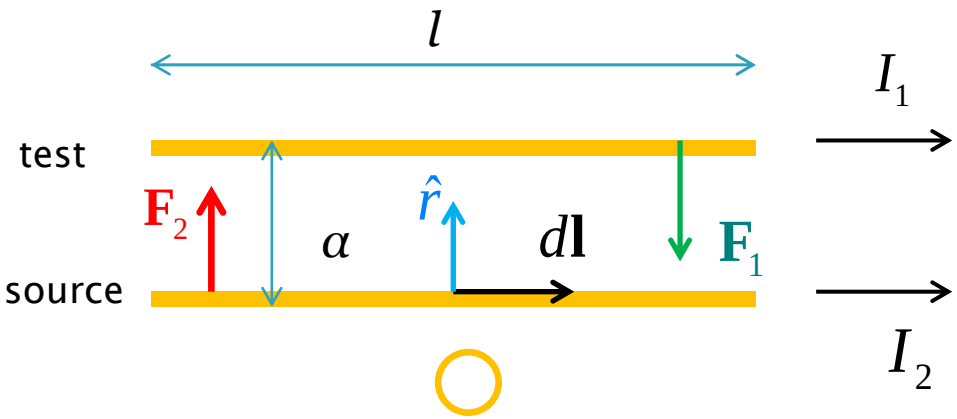
$$d\mathbf{l}\times\hat{r} = dl$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}dl$$

Διεύθυνση πεδίου : $\otimes$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_A^B dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int_A^B R d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\theta$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό



Δύο παράλληλοι αγωγοί απείρου μήκους

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{a}$$

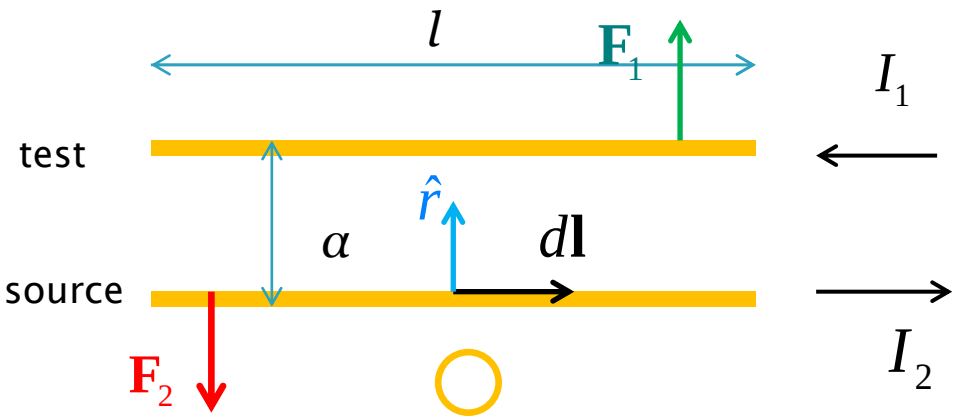
$$\mathbf{F}_1 = I_1 l \times \mathbf{B}_2$$

$$F_1 = I_1 l B_2 = I_1 l \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{a} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi\alpha}$$

Εάν αντιστρέφαμε source και test θα παίρναμε το ίδιο αποτέλεσμα με αντίθετη φορά της $\mathbf{F}_2$

$$F_2 = I_2 l B_1 = I_2 l \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{a} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi\alpha} = F_1$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό



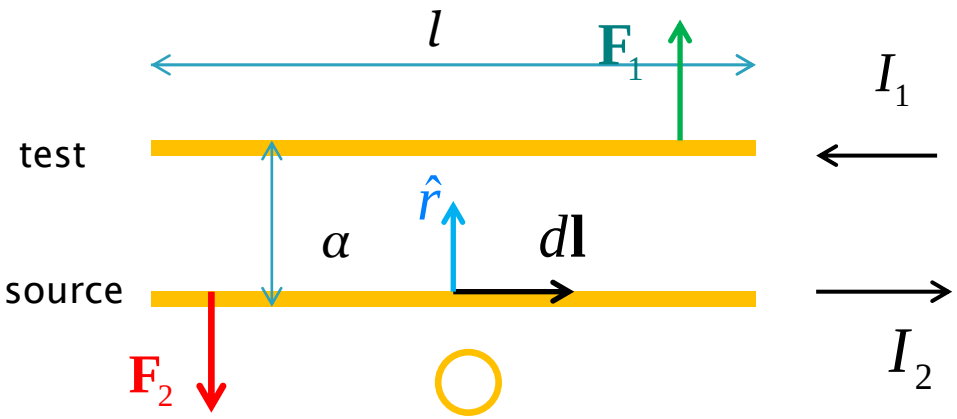
Δύο παράλληλοι αγωγοί απείρου μήκους

Εάν αντιστρέφαμε τη φορά του ρεύματος στο 1 (ή στο 2) , θα είχαμε τις φορές της $\mathbf{F}_2$ και $\mathbf{F}_1$ να είναι αντίθετες με εκείνες της προηγούμενης περίπτωσης

Δύο παράλληλοι αγωγοί που φέρουν ρεύματα ίδιας διεύθυνσης έλκονται ενώ στην περίπτωση της αντίθετης διεύθυνσης απωθούνται

$$\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\alpha}$$

Μαγνητικό πεδίο από αγωγό



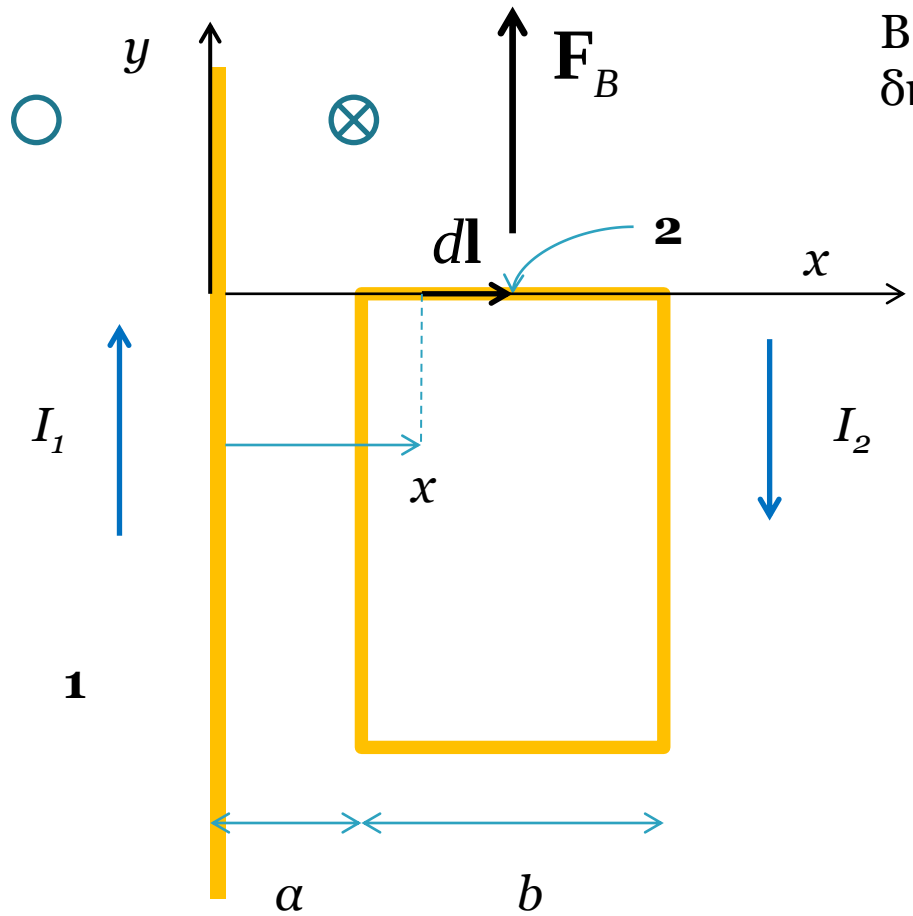
Δύο παράλληλοι αγωγοί απείρου μήκους

$$\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\alpha}$$

Ορισμός Ampère

$I_1 = I_2$ εάν $a = 1m$ και $\frac{F_B}{l} = 2\times10^7\ N/m$ $\Longrightarrow$ $I_1 = I_2 = 1A$

Άσκηση



Βρείτε τη μαγνητική δύναμη που δημιουργεί ο αγωγός 1 στον αγωγό 2.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x}$$

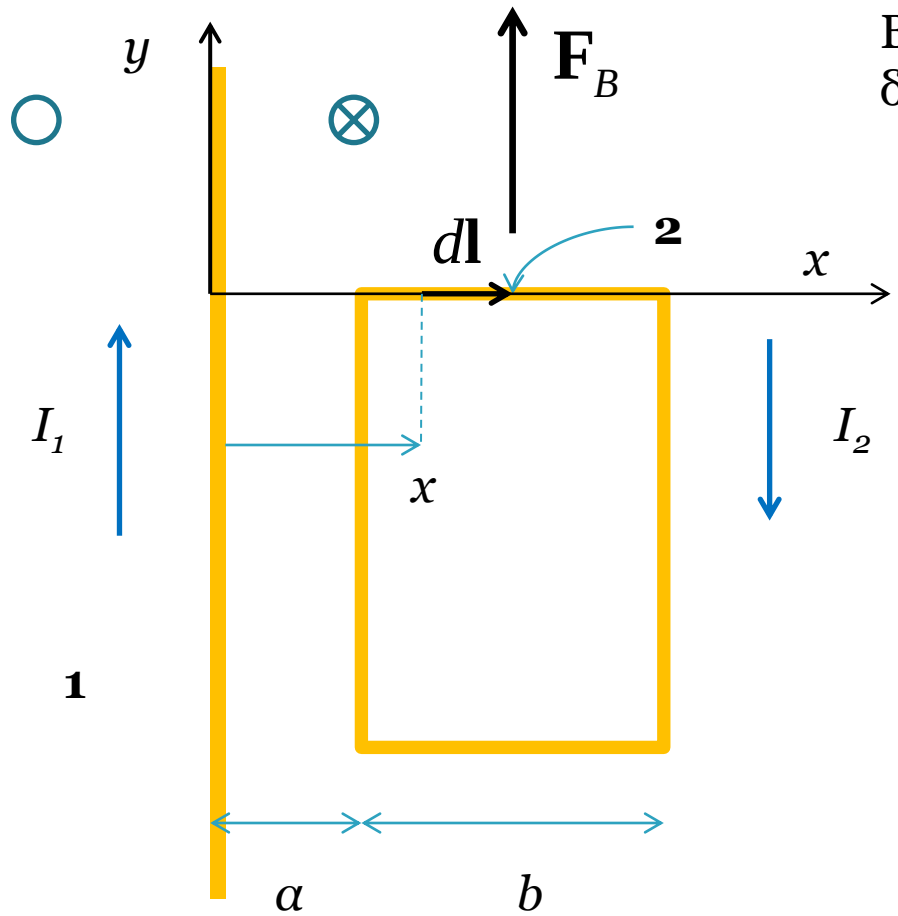
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x}\left(-\hat{z}\right)$$

$$d\mathbf{F}_B = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{l} = dx\hat{x}$$

$$d\mathbf{F}_B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{x}\left[\hat{x}\times\left(-\hat{z}\right)\right]dx$$

Άσκηση



Βρείτε τη μαγνητική δύναμη που δημιουργεί ο αγωγός 1 στον αγωγό 2.

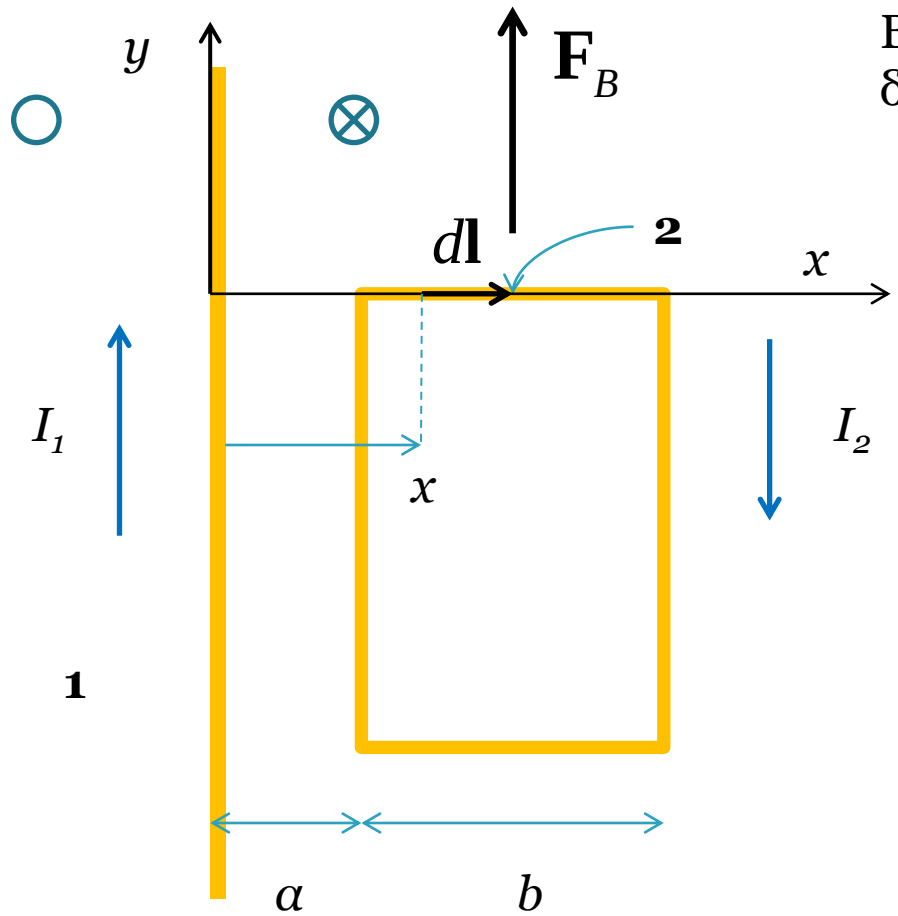
$$d\mathbf{F}_B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{x}\left[\hat{x}\times\left(-\hat{z}\right)\right]dx$$

$$d\mathbf{F}_B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{x}dx\hat{y}$$

$$\mathbf{F}_B = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{x}dx\hat{y}$$

$$\mathbf{F}_B = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{dx}{x}\right)\hat{y}$$

Άσκηση



Βρείτε τη μαγνητική δύναμη που δημιουργεί ο αγωγός 1 στον αγωγό 2.

$$\mathbf{F}_B = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} \right) \hat{y}$$

$$\mathbf{F}_B = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b} \right) \hat{y}$$

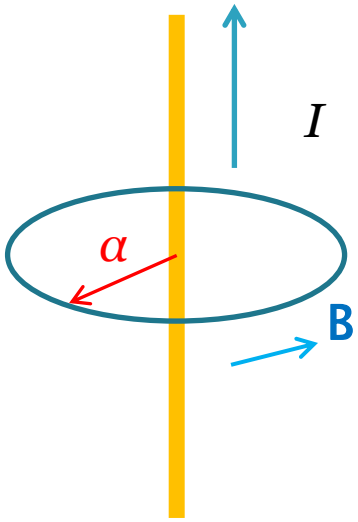
$$\mathbf{F}_B = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \right) \hat{y}$$

Νόμος Ampère

Παρατήρηση :

Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου σχηματίζουν ομόκεντρους κύκλους γύρω από ένα αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I

Λόγω συμμετρίας η ένταση του μαγνητικού πεδίου B είναι παντού η ίδια πάνω στους ομόκεντρους κύκλους.



$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}2\pi a = \mu_0 I$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του γινομένου $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη είναι ίσο με $\mu_o I$, όπου I είναι η συνολική ένταση του σταθερού ρεύματος που διαρρέει οποιαδήποτε επιφάνεια που ορίζει η κλειστή καμπύλη

Γενικευμένος Νόμος Ampère

Μαγνητικό πεδίο μπορεί να δημιουργηθεί και από μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Δημιουργείται έτσι ένα «ρεύμα» που οφείλεται στη μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου και συμβολίζεται με I_d

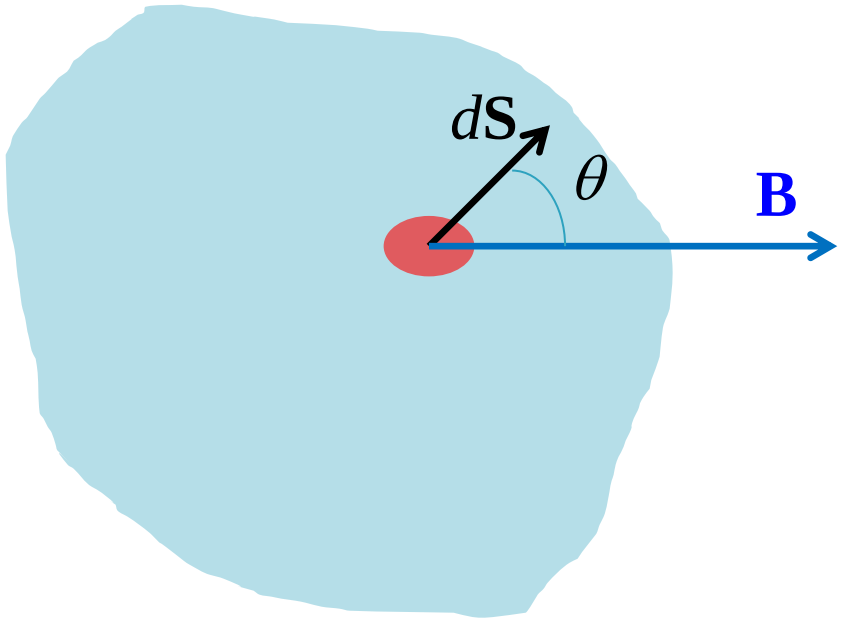
Το ρεύμα αυτό είναι : $I_d = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i$$

Τότε

$$\oint B dl = \mu_0 \left(I + I_d \right) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Μαγνητική Ροή

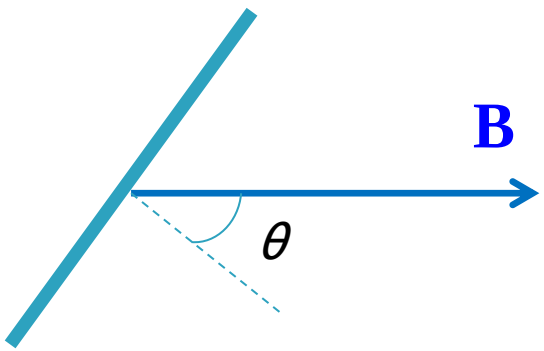


Συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από μία επιφάνεια

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Μαγνητική Ροή

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



Μαγνητικό πεδίο υπό γωνία θ ως προς επίπεδη επιφάνεια εμβαδού S

$$\Phi_B = BS\cos\theta$$

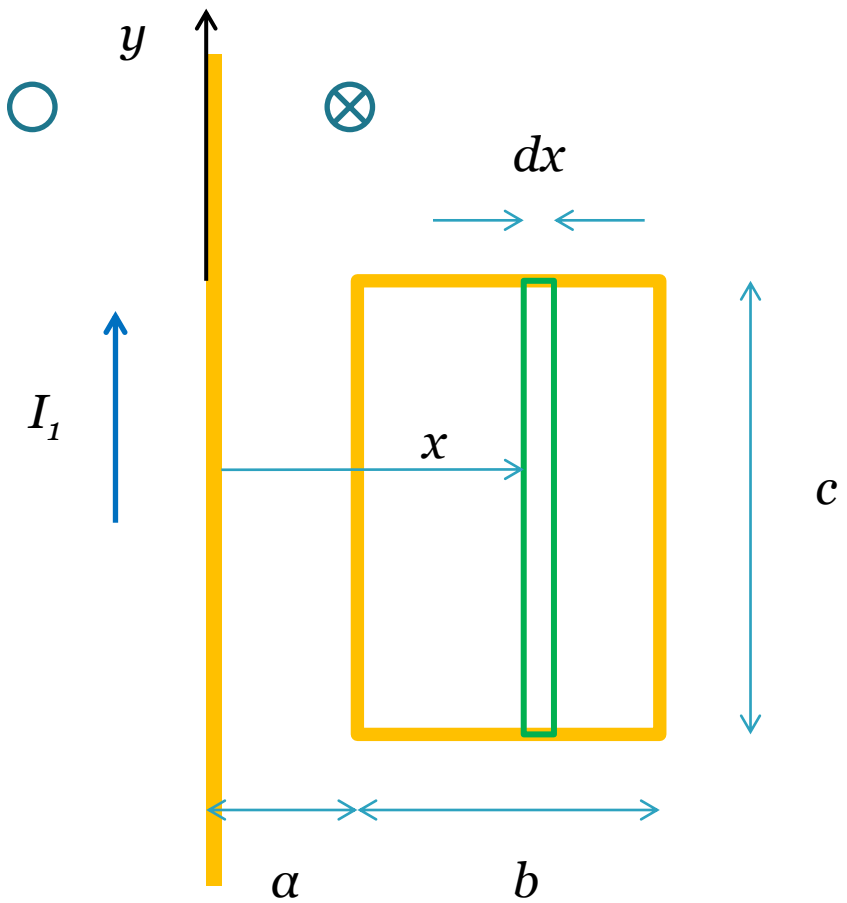
Μαγνητικό πεδίο παράλληλο σε επίπεδη επιφάνεια

$$\Phi_B = 0$$

Μαγνητικό πεδίο κάθετο σε επίπεδη επιφάνεια

$$\Phi_B = BS$$

Άσκηση 2



Βρείτε τη μαγνητική ροη στον παραλληλόγραμμο αγωγό (ορθογώνιο βρόχο)

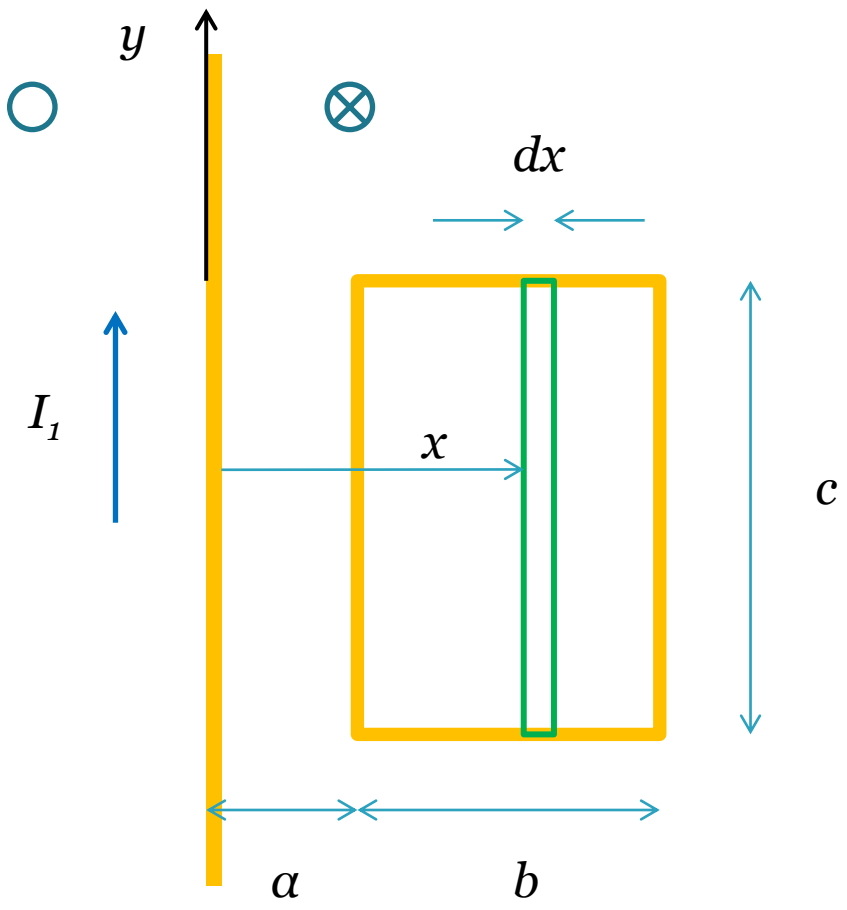
$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{x}$$

$$\Phi_B = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 c}{x} dx$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x}$$

Άσκηση 2



Βρείτε τη μαγνητική ροη στον παραλληλόγραμμο αγωγό

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x}$$

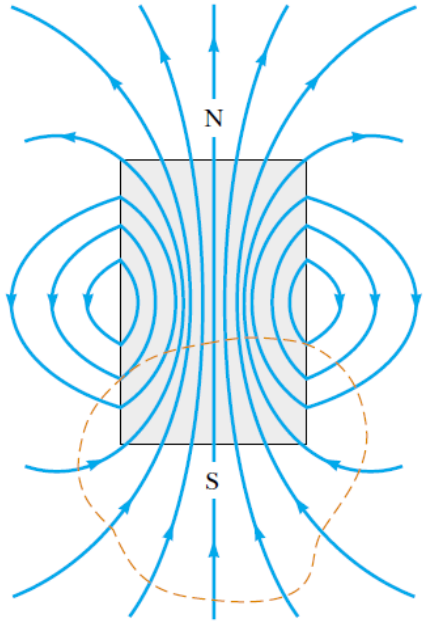
$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

Νόμος Gauss στο μαγνητισμό

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Η μαγνητική ροή δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι ο

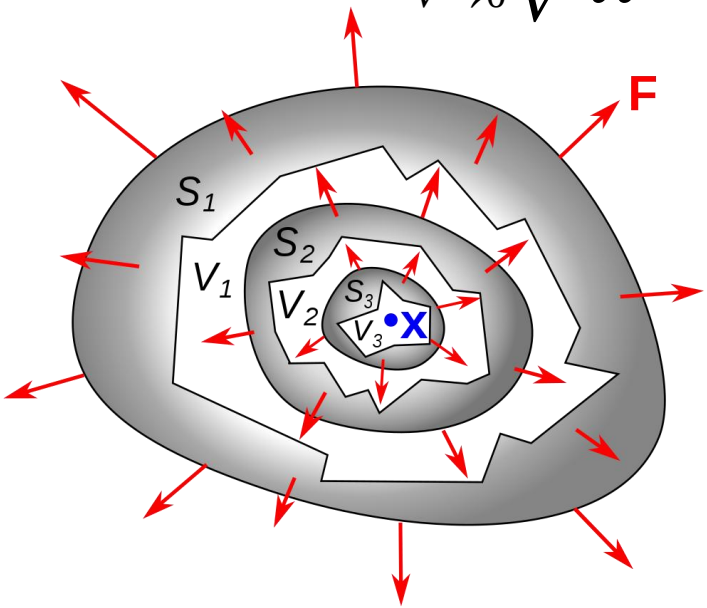


Serway

Λοιπές ιδιότητες B

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$div\mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$



By Chetvorno - Own work, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=83229941

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$ Διαφορική μορφή νόμου Gauss

Λοιπές ιδιότητες B

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

Διανυσματικό Δυναμικό

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Λοιπές ιδιότητες B

$$curl\mathbf{B}_n = \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) \cdot \hat{n} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{|S|} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

Νόμος Ampère $$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \to \oint Bdl = \mu_0 I = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$curl\mathbf{B} = \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Λοιπές ιδιότητες B

Κινούμενο φορτίο ταχύτητας **u** δημιουργεί μαγνητικό πεδίο

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\mathbf{l}\times\hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}d\mathbf{l}\times\mathbf{r}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I}{r^3}d\mathbf{l}\times\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{dq}{dt}\frac{1}{r^3}d\mathbf{l}\times\mathbf{r} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dq\frac{1}{r^3}\frac{d\mathbf{l}}{dt}\times\mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dq\frac{1}{r^3}\mathbf{u}\times\mathbf{r}$$

Λοιπές ιδιότητες B

Κινούμενο φορτίο
δημιουργεί μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{E} = k_e \int_Q \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{\left\|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right\|^3} dq$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dq \frac{1}{r^3} \mathbf{u} \times \mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi k_e} \mathbf{u} \times k_e \int dq \frac{\mathbf{r}}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi k_e} \left(\mathbf{u} \times \mathbf{E}\right)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\mathbf{u} \times \mathbf{E}\right) = \frac{1}{c_l^{\,2}} \left(\mathbf{u} \times \mathbf{E}\right)$$

$$c_l = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$ Ταχύτητα φωτός