ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

2021-2022

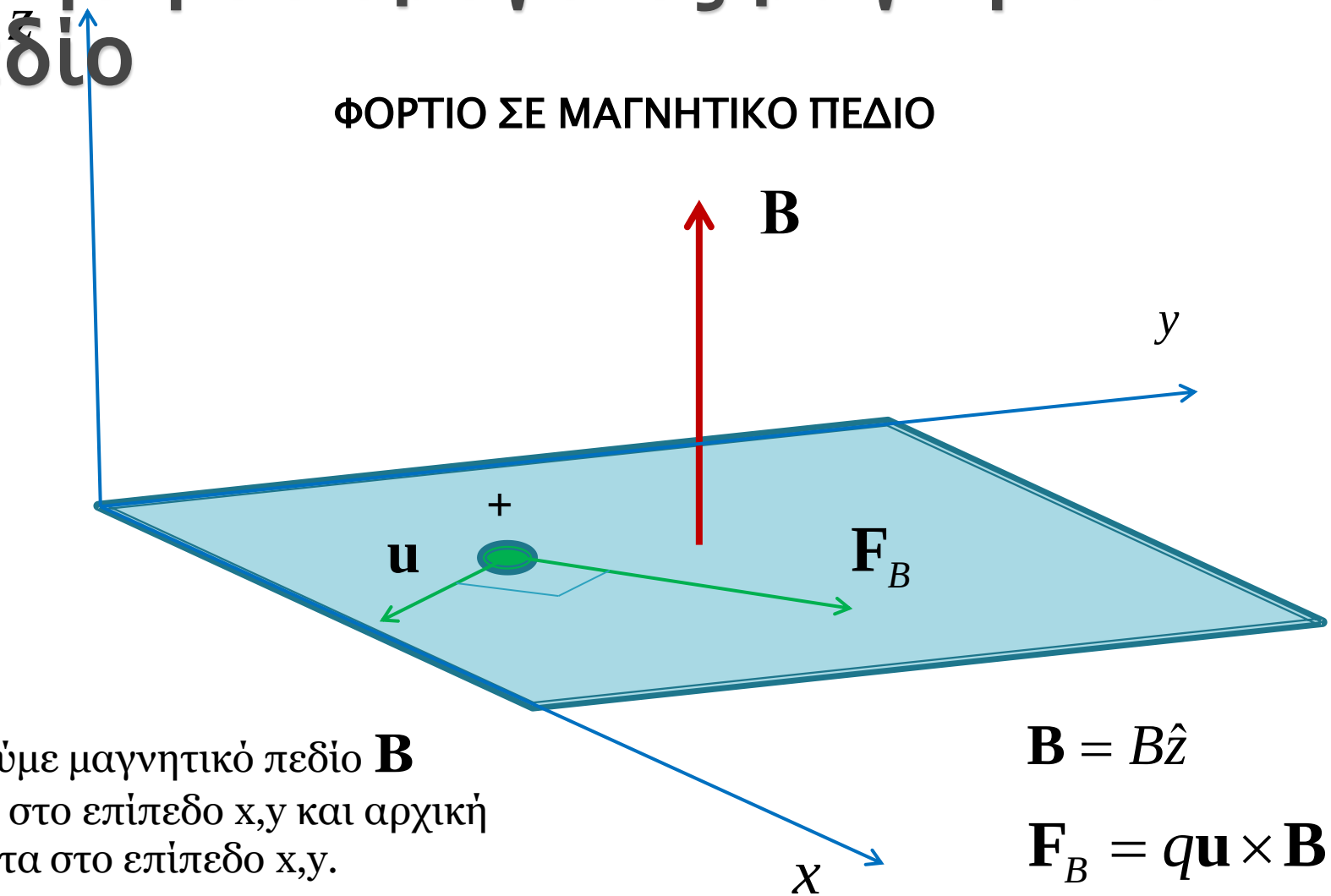
Διάλεξη 8

Κίνηση φορτίου σε μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Μιχάλης Ταρουδάκης

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Θεωρούμε μαγνητικό πεδίο **B** κάθετο στο επίπεδο x,y και αρχική ταχύτητα στο επίπεδο x,y.

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Το διάνυσμα της δύναμης είναι κάθετο τόσο στο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου όσο και στο διάνυσμα της ταχύτητας

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

Δύναμη που ασκείται στο φορτίο λόγω του μαγνητικού πεδίου

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Νόμος Νεύτωνα

$$\mathbf{F}_{\mathrm{B}} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{qB}{m}\mathbf{u} \times \hat{z} = \omega_c \mathbf{u} \times \hat{z}$$

$$\omega_c \equiv \frac{qB}{m}$$ Κυκλική Συχνότητα

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y) = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$$

$$\mathbf{a} = \omega_c \mathbf{u} \times \hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_x & u_y & 0 \\ 0 & 0 & \omega_c \end{vmatrix}$$

$$\dot{u}_x = \omega_c u_y$$

$$\dot{u}_y = -\omega_c u_x$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

$$\mathbf{a} = (\dot{u}_x, \dot{u}_y) = \dot{u}_x \hat{x} + \dot{u}_y \hat{y}$$

$$\dot{u}_x = \omega_c u_y$$
$$\dot{u}_y = -\omega_c u_x$$

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y) = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$$

Υπολογισμός των ταχυτήτων επιλύοντας το σύστημα

Το μέτρο της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται κατά την κίνηση του φορτίου

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \omega_c \mathbf{u} \times \hat{z}$$

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{dt} = 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 2\mathbf{u} \cdot \omega_c (\mathbf{u} \times \hat{z}) = 0$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \omega_c (u_y \hat{x} - u_x \hat{y})$$

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{dt} = \frac{2qB}{m}\left[\left(u_x \hat{x} + u_y \hat{y}\right) \cdot \left(u_y \hat{x} - u_x \hat{y}\right)\right] = 0$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$\dot{u}_x = \omega_c u_y$$

$$\dot{u}_y = -\omega_c u_x$$

Θεωρούμε

$$\tilde{u} = u_x + i u_y$$

$$\dot{\tilde{u}} = \dot{u}_x + i\dot{u}_y = \omega_c u_y - i\omega_c u_x = -i\omega_c (u_x + i u_y) =$$

$$= -i\omega_c \tilde{u} \Rightarrow \dot{\tilde{u}} + i\omega_c \tilde{u} = 0$$

$$\boxed{\dot{\tilde{u}} + i\omega_c \tilde{u} = 0}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$\dot{\tilde{u}} + i\omega_c \tilde{u} = 0$$

Η λύση είναι $\tilde{u}(t) = Ce^{-i\omega_c t}, C \in \mathbb{C}$

$$\tilde{u}(t) = Ce^{-i\omega_c t} = u_0 e^{-i\delta} e^{-i\omega_c t} = u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)}$$

$$u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)} = u_0 \{\cos(\omega_c t + \delta) - i\sin(\omega_c t + \delta)\} = u_x(t) + iu_y(t)$$

$$u_x(t) = u_0 \cos(\omega_c t + \delta)$$
$$u_y(t) = -u_0 \sin(\omega_c t + \delta)$$

$$\omega_c, \delta \in \mathbb{R}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$u_x(t) = u_0 \cos(\omega_c t + \delta)$$
$$u_y(t) = -u_0 \sin(\omega_c t + \delta)$$

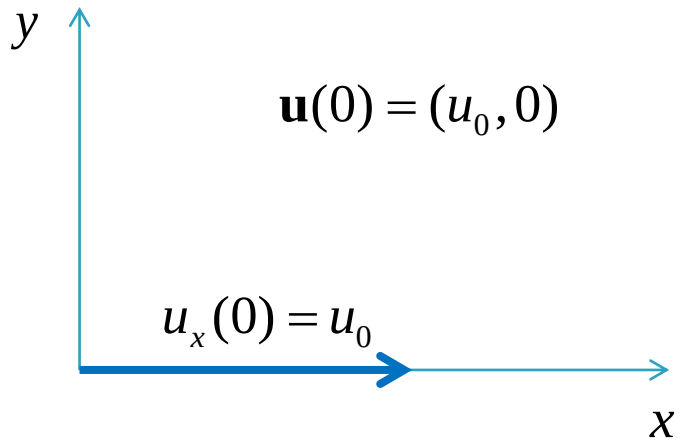
$$\omega_c, \delta \in \mathbb{R}$$

δ καθορίζει την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας

$$\tan\delta = -\frac{u_y(0)}{u_x(0)}$$

για $\delta = 0$

$$u_x(0) = u_0 \cos(0) = u_0$$
$$u_y(0) = -u_0 \sin(0) = 0$$



Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$u_x(t) = u_0 \cos(\omega_c t + \delta)$$
$$u_y(t) = -u_0 \sin(\omega_c t + \delta)$$

$$\omega_c, \delta \in \mathbb{R}$$

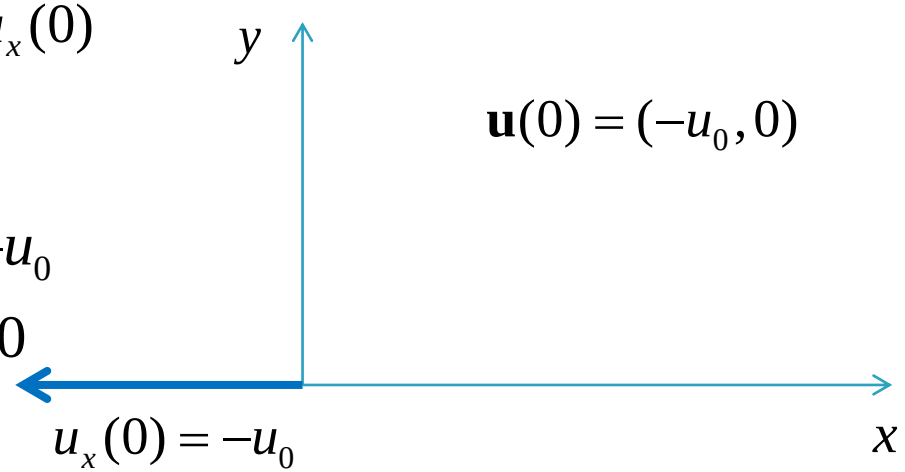
δ καθορίζει την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας

$$\tan\delta = -\frac{u_y(0)}{u_x(0)}$$

για $\delta = \pi$

$$\mathbf{u}(0) = (-u_0, 0)$$

$$u_x(0) = u_0 \cos(\pi) = -u_0$$
$$u_y(0) = -u_0 \sin(\pi) = 0$$



Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$u_x(t) = u_0 \cos(\omega_c t + \delta)$$
$$u_y(t) = -u_0 \sin(\omega_c t + \delta)$$

$$\omega_c, \delta \in \mathbb{R}$$

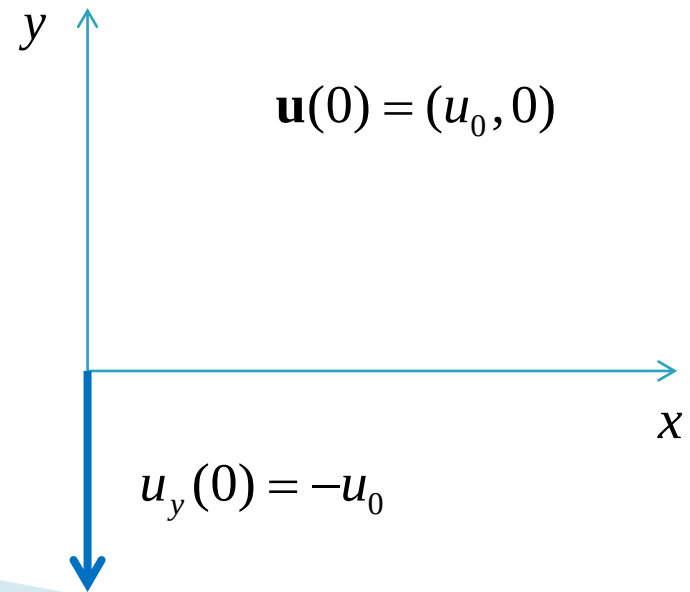
δ καθορίζει την κατεύθυνση της αρχικής ταχύτητας

$$\tan\delta = -\frac{u_y(0)}{u_x(0)}$$

για $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$u_x(0) = u_0 \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$u_y(0) = -u_0 \sin(\frac{\pi}{2}) = -u_0$$



Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \cos(\omega_c t + \delta)$$

$$\frac{dy}{dt} = -u_0 \sin(\omega_c t + \delta)$$

Ολοκληρώνοντας

$$x(t) = \frac{u_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \delta) + x_0$$

$$y(t) = \frac{u_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \delta) + y_0$$

Κυκλική κίνηση γύρω από το x_0, y_0 με κυκλική συχνότητα ω_c και ακτίνα $R = \frac{u_0}{\omega_c}$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

Υπολογισμός των τροχιών κίνησης

$$u_0 = 2, \quad \omega_c = 3$$

$$x_0, y_0 = 1, 2$$

$$\delta = 2 \quad (114.6^o)$$

$$R = \frac{u_0}{\omega_c} = \frac{2}{3}$$

$$x(t) = R\sin(\omega_c t + \delta) + x_0$$

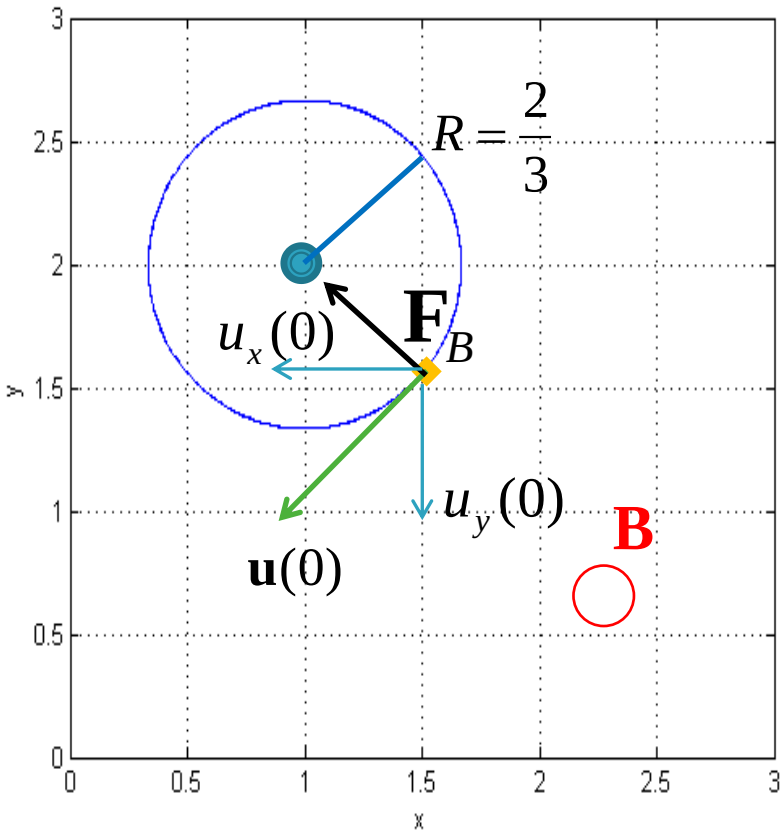
$$y(t) = R\cos(\omega_c t + \delta) + y_o$$

$$\longrightarrow$$

$$x(t) = \frac{2}{3}\sin(\omega_c t + 2) + 1$$

$$y(t) = \frac{2}{3}\cos(\omega_c t + 2) + 2$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο



$$x(t) = \frac{2}{3}\sin(\omega_c t + 2) + 1$$

$$y(t) = \frac{2}{3}\cos(\omega_c t + 2) + 2$$

$$x(0) = \frac{2}{3}\sin(2) + 1 = 1.606$$

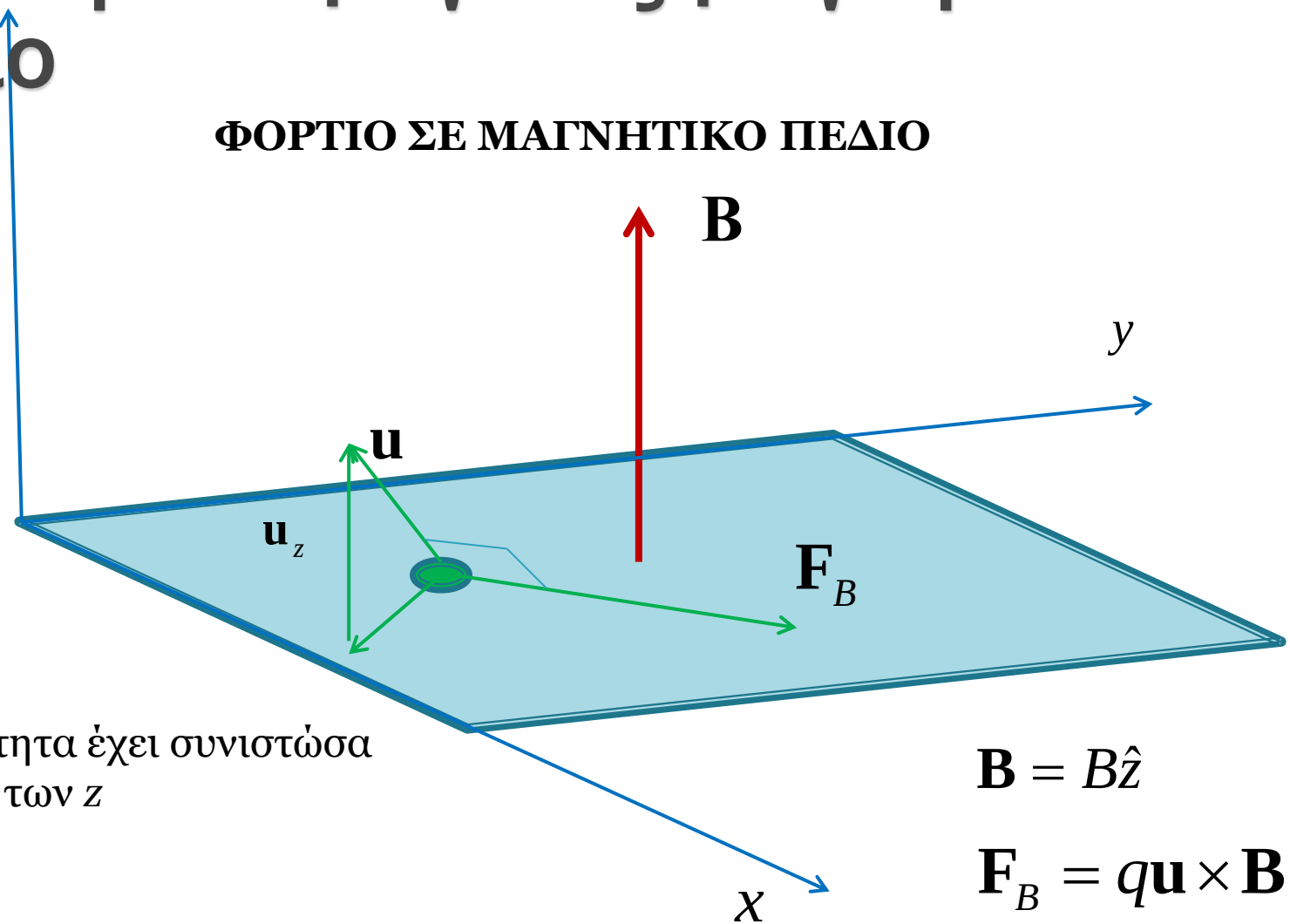
$$y(0) = \frac{2}{3}\cos(2) + 2 = 1.722$$

$$u_x(0) = 2\cos(2) = -0.8323$$

$$u_y(0) = -2\sin(2) = -1.8186$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

ΦΟΡΤΙΟ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Εάν η ταχύτητα έχει συνιστώσα στον άξονα των z

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Το διάνυσμα της δύναμης παραμένει κάθετο τόσο στο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου όσο και στο διάνυσμα της ταχύτητας

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο

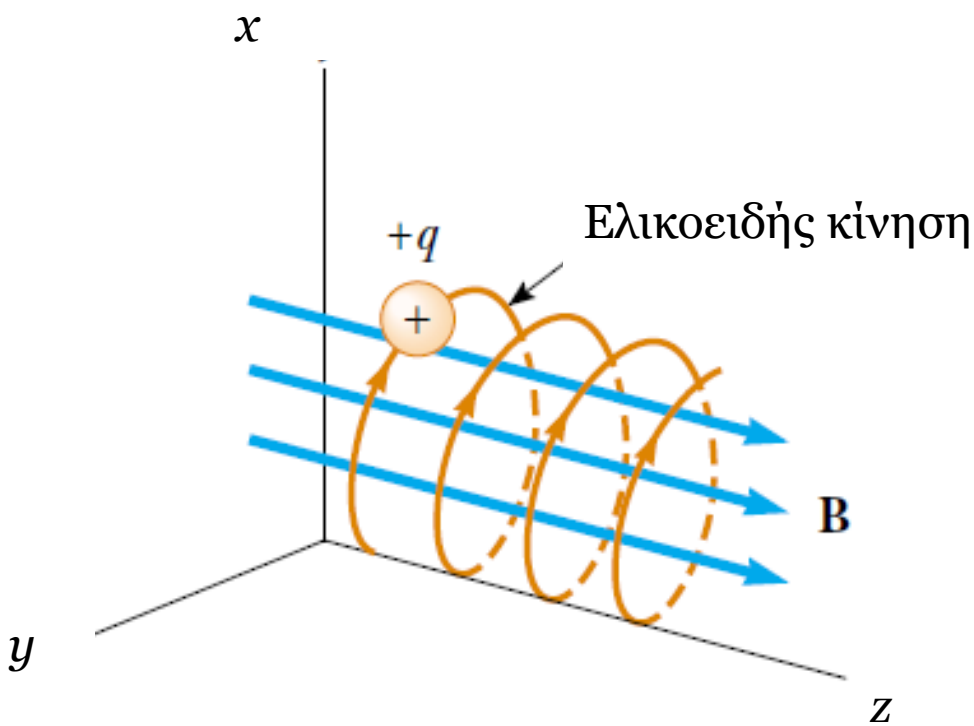
$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{u}\times\mathbf{B} = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qu_yB\hat{x} - qu_xB\hat{y}$$

$$F_{Bz} = 0$$

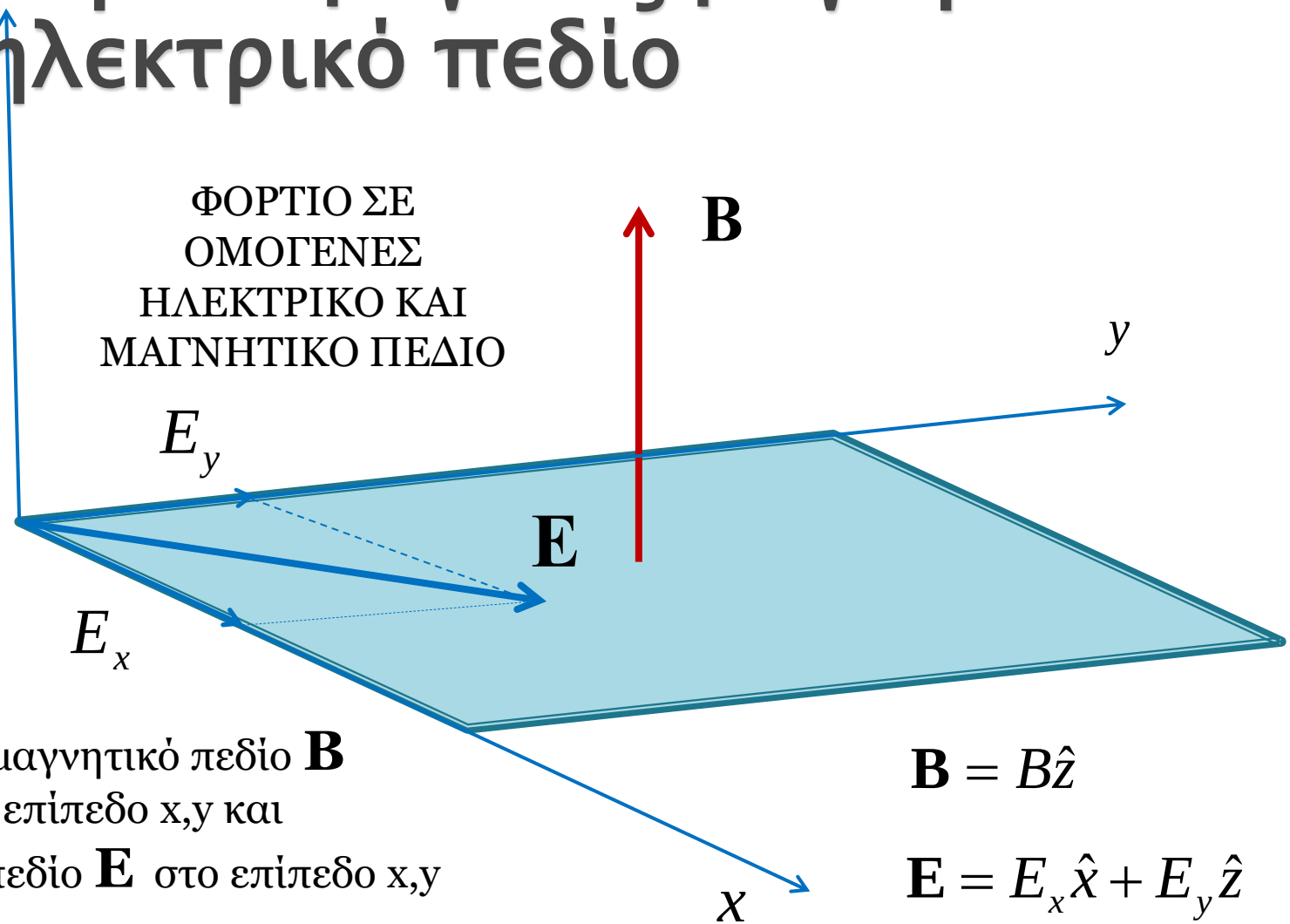
$$\mathbf{F}_{\mathrm{B}} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Rightarrow F_{Bz} = m\frac{du_z}{dt} = 0 \Rightarrow u_z = ct$$

Ελικοειδής κίνηση

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό Πεδίο



Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό καί ηλεκτρικό πεδίο



Θεωρούμε μαγνητικό πεδίο **B** κάθετο στο επίπεδο x,y και ηλεκτρικό πεδίο **E** στο επίπεδο x,y

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

$$\mathbf{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{z}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{B} = B\hat{z}, \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$$

$\mathbf{E}$ κάθετο στο $\mathbf{B}$

$$\mathbf{F}_E = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{E}$$

Δύναμη που ασκείται από το ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{F}_B = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B}$$

Δύναμη που ασκείται από το μαγνητικό πεδίο

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

Συνολική δύναμη (Δύναμη Lorenz)

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$ κάθετο στο $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = B\hat{z}, \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$$

Υπενθυμίζουμε

$$\mathbf{u}\times\hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_x & u_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u_y\hat{x} - u_x\hat{y}$$

$$m\frac{du_x}{dt} = qBu_y + qE_x \qquad m\frac{du_y}{dt} = -qBu_x + qE_y$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

$$m\frac{du_x}{dt} = qBu_y + qE_x \Rightarrow \frac{du_x}{dt} = \omega_c u_y + \omega_c \frac{E_x}{B}$$

$$\omega_c \equiv \frac{qB}{m}$$

$$m\frac{du_y}{dt} = -qBu_x + qE_y \Rightarrow \frac{du_y}{dt} = -\omega_c u_x + \omega_c \frac{E_y}{B}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Αναλυτική Επίλυση

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο **σε μία διάσταση**

$$\mathbf{E} = E\hat{x}$$

$$\frac{du_x}{dt} = \omega_c u_y + \omega_c \frac{E}{B} \qquad \frac{du_y}{dt} = -\omega_c u_x$$

Υιοθετούμε μιγαδικό συμβολισμό $\tilde{u} = u_x + iu_y$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \frac{du_x}{dt} + i\frac{du_y}{dt} = \omega_c u_y + \omega_c \frac{E}{B} - i\omega_c u_x$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} - \omega_c u_y + i\omega_c u_x = \omega_c \frac{E}{B}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} - \omega_c u_y + i\omega_c u_x = \omega_c \frac{E}{B}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + i\omega_c (u_x + iu_y) = \omega_c \frac{E}{B}$$

Με βάση το συμβολισμό $\tilde{u} = u_x + iu_y$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + i\omega_c \tilde{u} = \omega_c \frac{E}{B}$$

$$\tilde{u}(t) = Ce^{-i\omega_c t} + C_2 = u_0 e^{-i\delta} e^{-i\omega_c t} + C_2 = u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)} + C_2$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$\tilde{u}(t) = Ce^{-i\omega_c t} + C_2 = u_0 e^{-i\delta} e^{-i\omega_c t} + C_2 = u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)} + C_2$$

Αντικατάσταση στη Δ.Ε.

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + i\omega_c \tilde{u} = \omega_c \frac{E}{B}$$

$$C_2 = -i\frac{E}{B}$$

$$\tilde{u}(t) = u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)} - i\frac{E}{B}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$\tilde{u}(t) = u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)} - i\frac{E}{B}$$

$$\tilde{u}(t) = u_0\left[\cos(\omega_c t + \delta) - i\sin(\omega_c t + \delta)\right] - i\frac{E}{B}$$

$$u_x(t) = u_0\cos\left(\omega_c t + \delta\right) \quad u_y(t) = -u_0\sin\left(\omega_c t + \delta\right) - \frac{E}{B}$$

$$t = 0$$

$$u_x(0) = u_0\cos\left(\delta\right) \quad u_y(0) = -u_0\sin\left(\delta\right) - \frac{E}{B}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$\tilde{u}(t) = u_0 e^{-i(\omega_c t + \delta)} - i\frac{E}{B}$$

Θα θεωρήσομε $\delta = -\frac{\pi}{2}$

$$\tilde{u}(t) = u_0\left[\cos(\omega_c t - \frac{\pi}{2}) - i\sin(\omega_c t - \frac{\pi}{2})\right] - i\frac{E}{B}$$

$$\tilde{u}(t) = u_0\left[\sin\omega_c t + i\left(u_0\cos\omega_c t - \frac{E}{B}\right)\right]$$

$$u_x(t) = u_0\sin\omega_c t \quad u_y(t) = u_0\cos\omega_c t - \frac{E}{B}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$u_x(t) = u_0 \sin \omega_c t$$

$$u_y(t) = u_0 \cos \omega_c t - \frac{E}{B}$$

Αρχικές συνθήκες

$$u_x(0) = 0$$

$$u_y(0) = u_0 - \frac{E}{B}$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$u_x(t) = u_0 \sin \omega_c t$$

$$u_y(t) = u_0 \cos \omega_c t - \frac{E}{B}$$

Ολοκληρώνοντας

$$x(t) = -\frac{u_0}{\omega_c} \cos \omega_c t + C_3$$

$$y(t) = \frac{u_0}{\omega_c} \sin \omega_c t - \frac{E}{B} t + C_4$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$u_x(t) = u_0 \sin \omega_c t \qquad x(t) = -\frac{u_0}{\omega_c} \cos \omega_c t + C_3$$

$$u_y(t) = u_0 \cos \omega_c t - \frac{E}{B} \qquad y(t) = \frac{u_0}{\omega_c} \sin \omega_c t - \frac{E}{B} t + C_4$$

$$x(0) = -\frac{u_0}{\omega_c} + C_3 = x_0 \Rightarrow C_3 = x_0 + \frac{u_0}{\omega_c} = x_0 + R \qquad R = \frac{u_0}{\omega_c}$$

$$y(0) = C_4 = y_0$$

$$x(t) = x_0 + R(1 - \cos \omega_c t), \quad y(t) = y_0 + R \sin \omega_c t - \frac{E}{B} t$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E\hat{x}$

$$x(t) = x_0 + R(1 - \cos\omega_c t), \quad y(t) = y_0 + R\sin\omega_c t - \frac{E}{B}t$$

Τριχοειδές

$$u_x(0) = 0$$

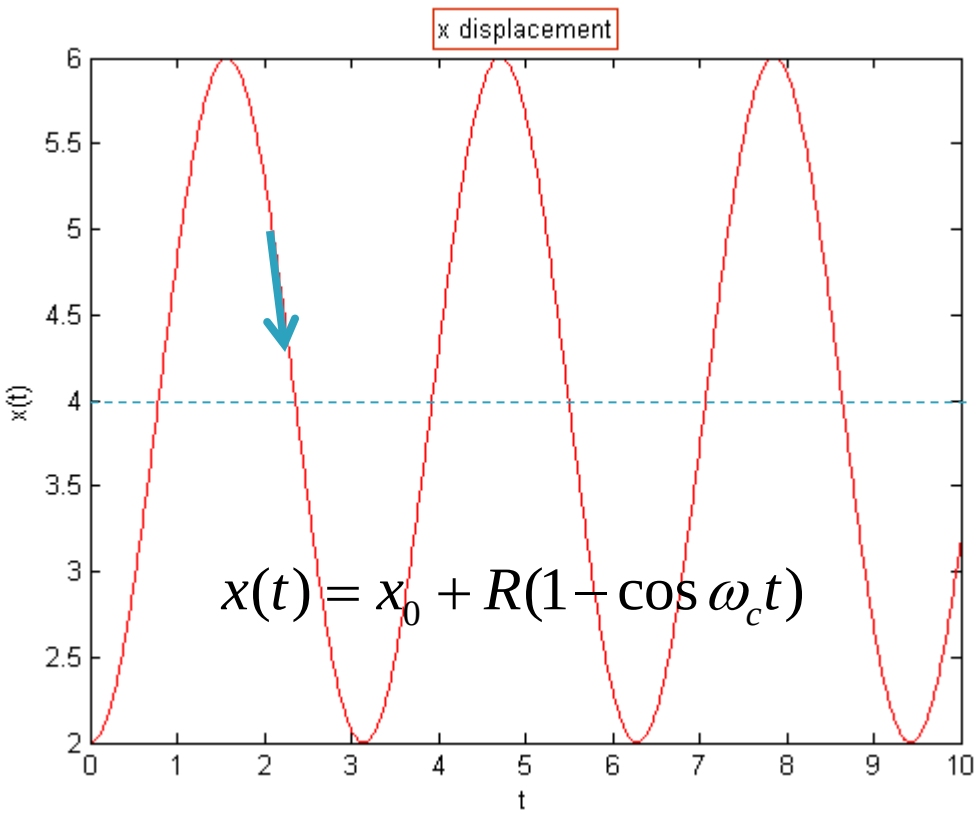
$$u_y(0) = u_0 - \frac{E}{B}$$

Εάν $u_0 = \dfrac{E}{B}$ $\quad u_x(0) = 0, \quad u_y(0) = 0$

ενθυμούμενοι $R = \dfrac{u_0}{\omega_c}$

$$x(t) = x_0 + R(1 - \cos\omega_c t), \quad y(t) = y_0 + R(\sin\omega_c t - \omega_c t)$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο



Περιοδική κίνηση με κέντρο το

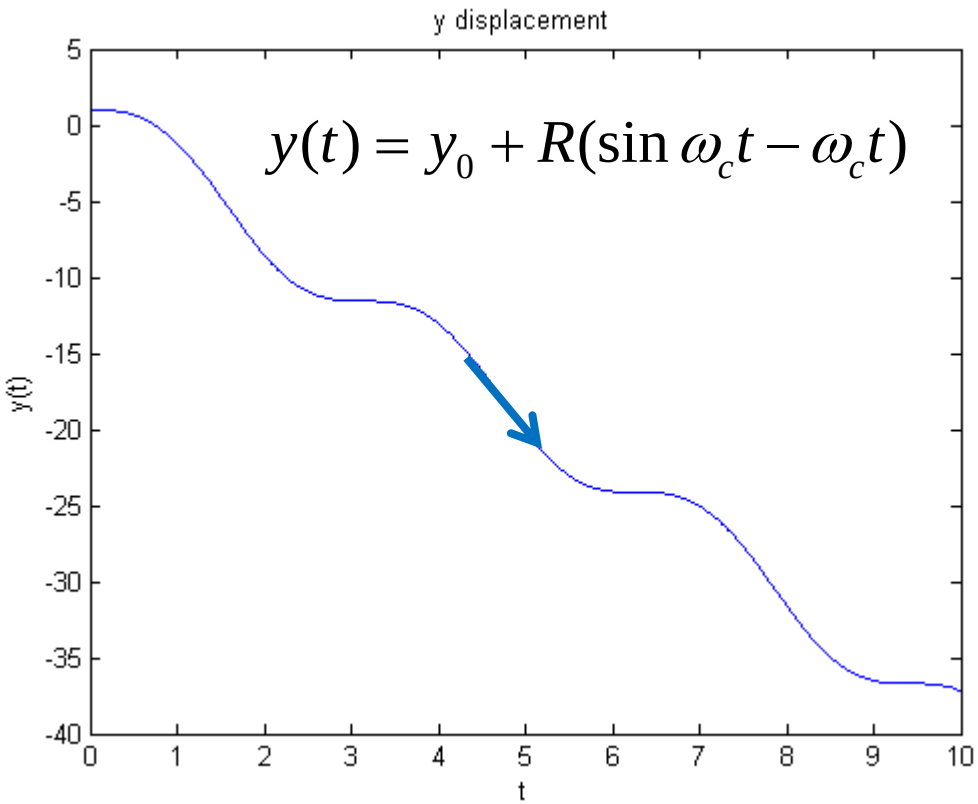
$$x = x_0 + R$$

Μέγιστη απομάκρυνση

$$R$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 1, \quad R = 2, \quad \omega_c = 1, \quad u_0 = \frac{E}{B} = R\omega_c = 2$$

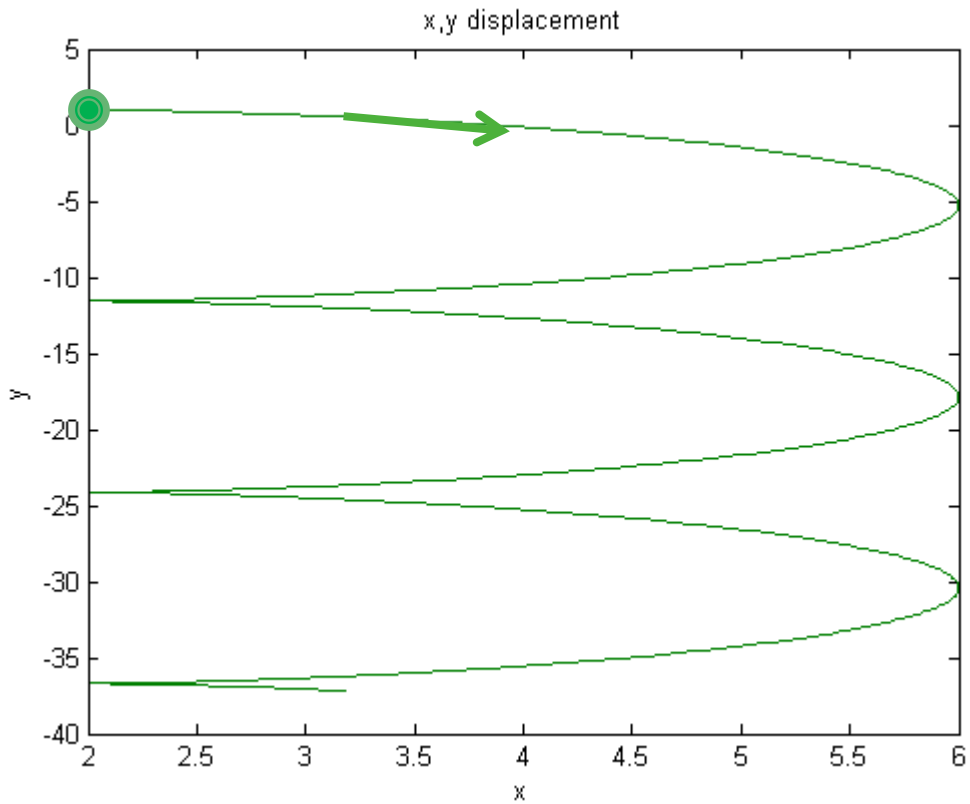
Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο



$$y(t) = y_0 + R(\sin \omega_c t - \omega_c t)$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 1, \quad R = 2, \quad \omega_c = 1 \quad u_0 = \frac{E}{B} = R\omega_c = 2$$

Κίνηση σε ομογενές μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο



Κυκλοειδής κίνηση

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 1, \quad R = 2, \quad \omega_c = 1 \quad u_0 = \frac{E}{B} = R\omega_c = 2$$