ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022-2023

Διάλεξη 1

Εισαγωγή

Πίνακες – Διανύσματα –Κατηγορίες Πινάκων

Μιχάλης Ταρουδάκης

Περιεχόμενα

- Γραμμικά συστήματα και πίνακες.
- Πράξεις πινάκων, αντίστροφοι και ανάστροφοι πίνακες.
- Επίλυση γραμμικών συστημάτων.
- Μέθοδος απαλοιφής Gauss.
- Ορίζουσες, ιδιότητες και υπολογισμός οριζουσών.
- Χρήση οριζουσών σε επίλυση γραμμικών συστημάτων.
- Διανυσματικοί χώροι, υπόχωροι, άθροισμα και τομή υποχώρων.

Περιεχόμενα

- Γραμμική εξάρτηση/ανεξαρτησία.
- Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου.
- Υπόχωροι ενός πίνακα.
- Γραμμικές απεικονίσεις.
- Σύνθεση απεικονίσεων , ισομορφισμοί.
- Πίνακας γραμμικής απεικόνισης ως προς μία βάση, αλλαγή βάσης.
- Πυρήνας και εικόνα γραμμικής απεικόνισης.

Βιβλιογραφία

- ***Μια εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα***, Βάρσος, Δεριζιώτης, Εμμανουήλ, Μαλιάκας, Μελάς, Ταλλέλη.
- ***Μια εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα για τις Θετικές επιστήμες***, Χαραλάμπους, Φωτιάδης.
- ***Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές***, G. Strang.
- ***Μια εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα***, A. Morris.
- ***Γραμμική Άλγεβρα***, Θεοχάρη-Αποστολίδη, Βαβατσούλας, Χαραλάμπους.
- ***Γραμμική Άλγεβρα***, Γεωργίου, Κούγια, Μεγαρίτη.
- ***Σημειώσεις*** Χ. Κουρουνιώτη.

Τρόπος Διδασκαλίας

- Διαλέξεις
  - Δευτέρα και Παρασκευή 11:15-13:00
- Εργαστήριο
  - Ε212/Ε214 13:15-15:00, 15:15-17:00

Οι διαλέξεις και τα φυλλάδια των ασκήσεων θα ανεβαίνουν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Εξεταστικό Σύστημα

- Πρόοδος
- Τελικό Διαγώνισμα

Η Πρόοδος θα μετρήσει στον τελικό βαθμό, μόνο θετικά. Εάν δηλαδή κάποιος γράψει στο τελικό διαγώνισμα βαθμό μεγαλύτερο από αυτόν της προόδου θα πάρει το βαθμό του τελικού διαγωνίσματος. Η συμμετοχή του βαθμού της προόδου στο τελικό βαθμό θα σας γνωστοποιηθεί έγκαιρα.

Ιστοσελίδα

- http://users.math.uoc.gr/~taroud/LinAlg22.htm

Εφαρμογές Γραμμικής Αλγεβρας

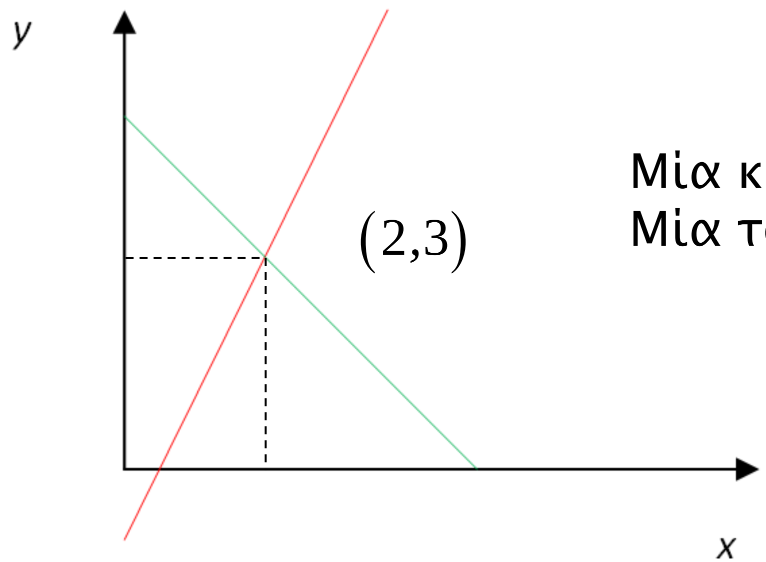
- Αριθμητική Ανάλυση
- Διαφορικές Εξισώσεις και αριθμητική τους λύση
- Δίκτυα
- Γραφήματα
- Γραμμικός Προγραμματισμός
- Θεωρία Παιγνίων
- Επεξεργασία σήματος (Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier)

Συστήματα Εξισώσεων

$$2x - y = 1$$

$$x + y = 5$$

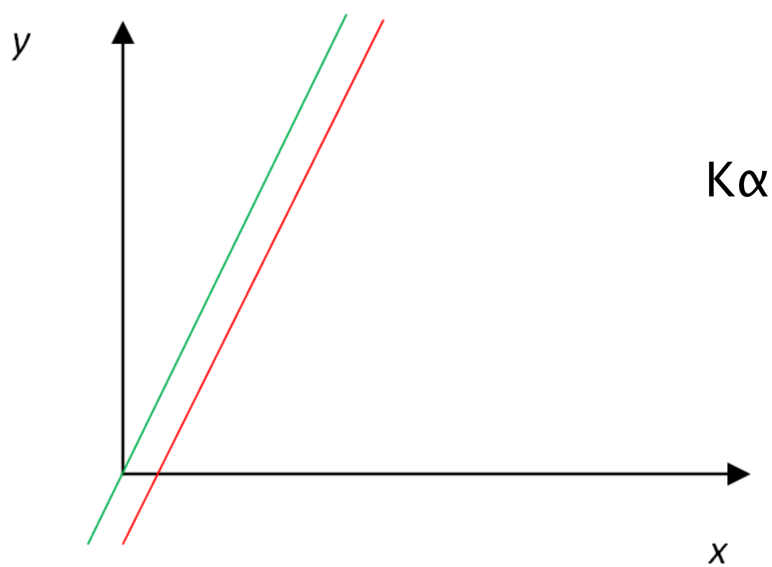
Οι εξισώσεις αναπαριστούν ευθείες στο επίπεδο



Μία και μοναδική λύση
Μία τομή των δύο ευθειών

Συστήματα Εξισώσεων

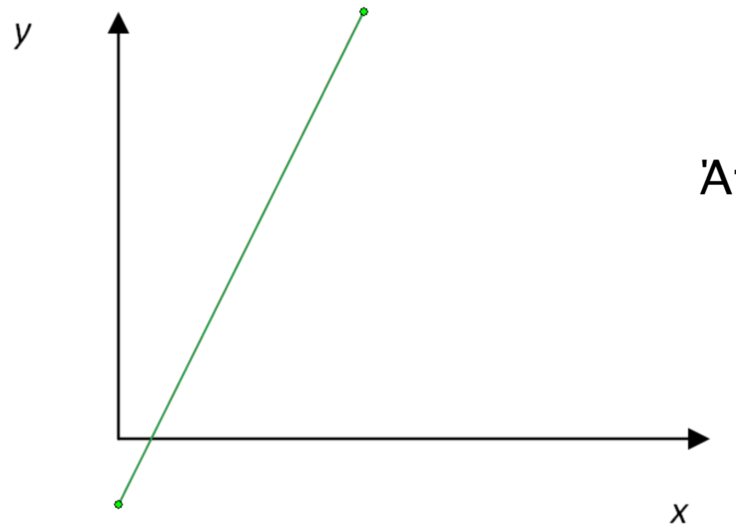
$$2x - y = 1$$
$$-4x + 2y = 0$$



Καμία λύση

Συστήματα Εξισώσεων

$$2x - y = 1$$
$$-4x + 2y = -2$$



Άπειρες λύσεις

Συστήματα Εξισώσεων

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \qquad x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -4x + 2y &= 0 \end{aligned} \qquad x\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -4x + 2y &= -2 \end{aligned} \qquad x\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

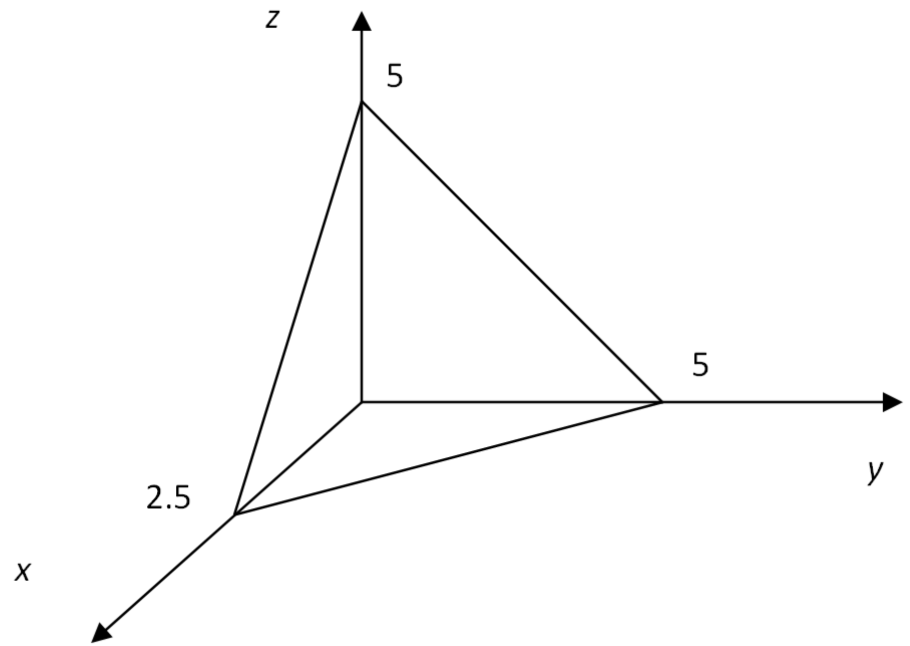
Συστήματα Εξισώσεων

$$2x + y + z = 5$$

$$4x - 6y = -2$$

$$-2x + 7y + 2z = 9$$

Τρία επίπεδα στο χώρο



1η εξίσωση 1ο επίπεδο

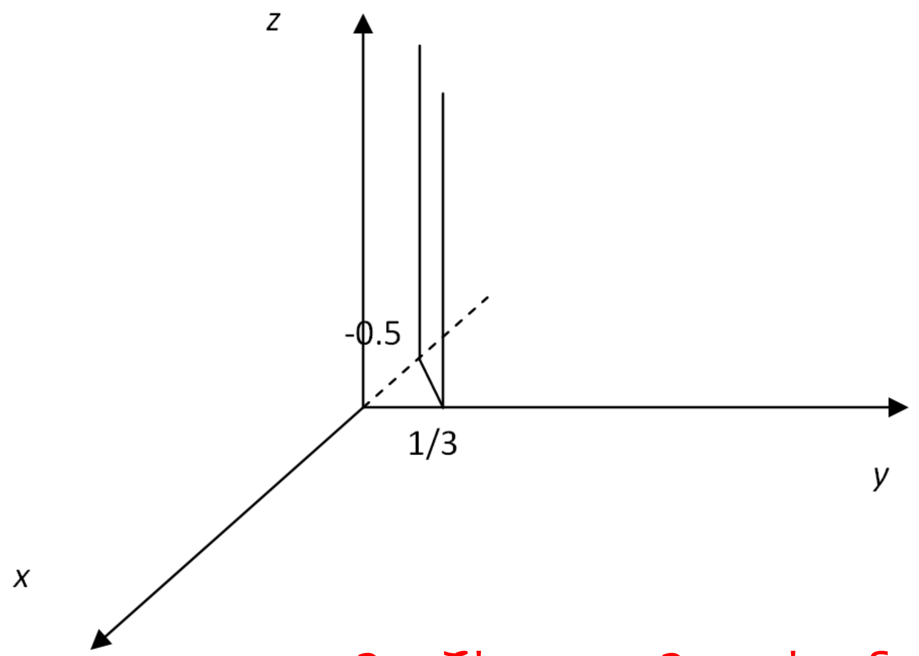
Συστήματα Εξισώσεων

$$2x + y + z = 5$$

$$4x - 6y = -2$$

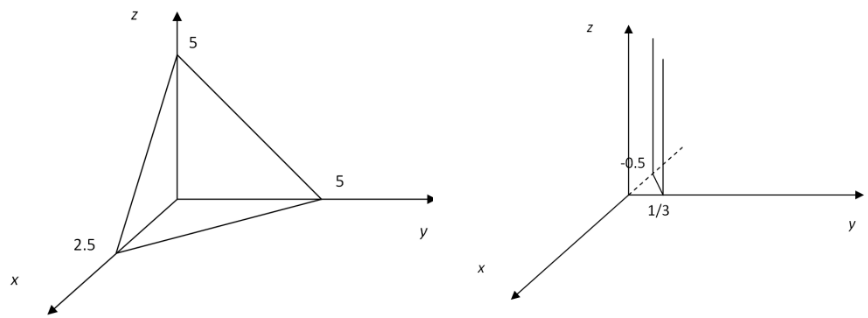
$$-2x + 7y + 2z =$$

Τρία επίπεδα στο χώρο



2η εξίσωση 2ο επίπεδο

Συστήματα Εξισώσεων



$$2x + y + z = 5$$

$$4x - 6y = -2$$

$$-2x + 7y + 2z = 9$$

Τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία

Το τρίτο επίπεδο τέμνει την ευθεία σε ένα σημείο.

Το σύστημα των εξισώσεων έχει μοναδική λύση (1,1,2)

Συστήματα Εξισώσεων

$$x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Ερωτήματα :

- Πότε υπάρχει μοναδική λύση ;
- Πότε υπάρχουν περισσότερες λύσεις ;
- Πότε δεν υπάρχει λύση ;

Συστήματα Εξισώσεων

Περιπτώσεις που τα τρία επίπεδα δεν τέμνονται σε ένα και μοναδικό σημείο.

Δεν υπάρχει λύση	•Τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα •Δύο επίπεδα είναι παράλληλα – το τρίτο τα τέμνει σε δύο παράλληλες ευθείες •Τα τρία επίπεδα τέμνονται ανά δύο σε τρείς παράλληλες ευθείες
Υπάρχουν άπειρες λύσεις	•Τα τρία επίπεδα τέμνονται σε μία κοινή ευθεία •Δύο από τα επίπεδα συμπίπτουν και το τρίτο τα τέμνει σε μία ευθεία •Τα τρία επίπεδα συμπίπτουν

Συστήματα Εξισώσεων

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει λύση αλλά η λύση δεν είναι μοναδική :

$$y=\frac{1}{3}-\frac{x}{3},\, z=\frac{5}{3}-\frac{2x}{3}$$

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$$

Το σύστημα δεν έχει λύση

Συστήματα Εξισώσεων

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Γραμμική εξίσωση *n* μεταβλητών

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Σύστημα *m* γραμμικών εξισώσεων *n* μεταβλητών

Διανύσματα

Θα εργαστούμε στο χώρο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$

Θα εργαστούμε σε σύνολα στον $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^0 = \{0\}, \quad \mathbb{R}^n = \left\{ \left(x_1, x_2, ..., x_i, ..x_n \right) \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,...n \right\}$$

Κάθε στοιχείο του συνόλου θα καλείται **διάνυσμα** και το σύνολο $\mathbb{R}^n$ αποκαλείται **Διανυσματικός Χώρος** (Γραμμικός Χώρος).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Κάθε στοιχείο : Συνιστώσα

Διανύσματα – Ιδιότητες

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$

$$a\mathbf{x}=a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Διανύσματα – Ιδιότητες

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y}=a\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax_1+by_1\\ax_2+by_2\\\vdots\\ax_n+by_n\end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+.....x_ny_n$$

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+.......+a_{in}x_n=b_i$$

$$\boxed{\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{x}=b_i}$$

Πίνακες

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = b_1$$
$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = b_2$$
$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = b_i$$
$$\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{x} = b_m$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1j} \ldots . \; a_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1} \; a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots . a_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix}$$

Πίνακας $m \times n$ $\quad A = \left[a_{ij} \right]$

Πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\right)$$

$$\mathbf{A}_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right)$$

Διανύσματα – γραμμές

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Διανύσματα – στήλες

Πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1j} \ldots .\ a_{1n} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots . a_{in} \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix}$$

Τετραγωνικός πίνακας $m = n$

Παραλληλόγραμμος πίνακας $m \neq n$

Τετραγωνικός Πίνακας :

α_{jj} Διαγώνια στοιχεία

$\alpha_{ij} = 0, \quad i \neq j$ Διαγώνιος πίνακας

$\alpha_{ij} = 0, \quad i > j$ Άνω τριγωνικός πίνακας

$\alpha_{ij} = 0, \quad i < j$ Κάτω τριγωνικός πίνακας