



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022–2023

Διάλεξη 10

Θεμελιώδεις υπόχωροι (συνέχεια)

Μιχάλης Ταρουδάκης

Θεμελιώδεις υπόχωροι

Ο χώρος των στηλών $R(A) \subseteq \mathbb{R}^m$

Ο μηδενόχωρος $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

Ο χώρος των γραμμών $R(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$

Ο αριστερός μηδενόχωρος $N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$

περιέχει όλα τα διανύσματα $\mathbf{y}$ για τα οποία $A^T \mathbf{y} = 0$

Έστω $A \in \text{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ $A^T \in \text{Mat}_{nm}(\mathbb{R})$

Χώρος των γραμμών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος των γραμμών του A έχει την ίδια διάσταση r με τον χώρο των γραμμών του U .

Οι δύο χώροι ταυτίζονται.

Χώρος των γραμμών

$$R(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\dim R(A^T) = r$$

Ως βάση μπορούμε να θεωρήσουμε τις μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου πίνακα U

Μηδενόχωρος

Ο μηδενόχωρος του A είναι ίσος με το μηδενόχωρο του U .

Τα διανύσματα που υπολογίζονται βάζοντας την τιμή 1 σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή και 0 στις υπόλοιπες.

Επομένως είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού κανένα δεν μπορεί να προέλθει από γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων.

Μηδενόχωρος

Τα διανύσματα αυτά αποτελούν τη βάση του μηδενόχωρου.

Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι $k = n - r$

$$\dim N(A) = n - r$$

Μηδενόχωρος

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{array}{c} x_2 \quad x_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ελεύθερες μεταβλητές στις στήλες 2 και 4 x_2, x_4

$$x_2 = 1, x_4 = 0, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = 0, x_4 = 1, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Βάση του μηδενόχωρου $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$

Χώρος στηλών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{matrix} & x_2 & & x_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(Πεδίο τιμών)

Είναι οι χώροι των στηλών των A και U ίδιοι ;

Όχι αλλά έχουν την ίδια διάσταση !

Χώρος στηλών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 3\alpha_1, \quad \alpha_4 = \frac{1}{3}\alpha_3 + \alpha_1$$

$$\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1$$

Χώρος στηλών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η διάσταση του χώρου των στηλών $R(A)$ ισούται με την τάξη r που είναι και η διάσταση του χώρου των γραμμών. Ο αριθμός των ανεξάρτητων στηλών ισούται με τον αριθμό των ανεξάρτητων γραμμών. Μια βάση του $R(A)$ αποτελείται από τις r στήλες του A , αντίστοιχες με εκείνες του U που περιέχουν οδηγούς.

Χώρος στηλών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_4 = \frac{1}{3}\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1$$

ΛΗΜΜΑ

Ένα σύνολο στηλών του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνο εάν το αντίστοιχο σύνολο στηλών του U είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Χώρος στηλών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \longleftarrow A' = P^{-1}LU' \longleftarrow U' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εδώ $P = I_3$

$$A' \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow U' \mathbf{x} = 0$$

Γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του U' λύση $U' \mathbf{x} = 0$ μόνο η μηδενική
 Για μηδενική λύση του $A' \mathbf{x} = 0$, οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Χώρος στηλών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \longleftarrow A' = P^{-1}LU' \longleftarrow U' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εδώ $P = I_3$

$$A' \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow U' \mathbf{x} = 0$$

Γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του U' λύση $U' \mathbf{x} = 0$ μόνο η μηδενική
 Για μηδενική λύση του $A' \mathbf{x} = 0$, οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Αριστερός Μηδενόχωρος

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Αριστερός μηδενόχωρος

Λύση του $A^T y = 0 = y^T A$

Ελεύθερες μεταβλητές $m-r$ - Εδώ $3-2=1$

$$\dim N(A^T) = m - r$$

Αριστερός Μηδενόχωρος

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

L αντιστρέψιμος

$$L^{-1}PA = U$$

Τα $m-r$ τελευταία διανύσματα του U είναι μηδενικά.

Επομένως οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι διανύσματα του αριστερού μηδενόχωρου του A .

Αριστερός Μηδενόχωρος

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

L αντιστρέψιμος

$L^{-1}PA = U$ $L^{-1}P$ αντιστρέψιμος

Αφού ο $L^{-1}P$ είναι αντιστρέψιμος, οι $m-r$ τελευταίες του γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του αριστερού μηδενόχωρου που έχει διάσταση $m-r$ επομένως αποτελούν μια βάση του χώρου

Αριστερός Μηδενόχωρος

Ο αριστερός μηδενόχωρος ενός $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ και έχει διάσταση $m-r$

$$N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Μια βάση του $N(A^T)$ αποτελείται από τις $m-r$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss

Μερικές παρατηρήσεις

- ▶ Ένα σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση όταν $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ με στήλες γραμμικά ανεξάρτητες.
- ▶ Όταν οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε και οι γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- ▶ Οι στήλες του A είναι βάση του χώρου των στηλών $\subset \mathbb{R}^n$

Μερικές παρατηρήσεις

- ▶ Οι στήλες ενός κλιμακωτού πίνακα U παράγουν το χώρο των στηλών του πίνακα αλλά δεν είναι εν γένει γραμμικά ανεξάρτητες.
- ▶ Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς αποτελούν βάση του χώρου των στηλών του πίνακα.