



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022–2023

Διάλεξη 12

Ορθογώνιοι υπόχωροι, Άθροισμα και Τομή
υπόχωρων

Μιχάλης Ταρουδάκης

Ορθογώνιοι υπόχωροι

Με δεδομένο ένα υπόχωρο $V \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε ως **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V το χώρο

$$V^\perp = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in V \}$$

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$V^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

Ορθογώνιοι υπόχωροι

- ▶ Εάν $A \in \text{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ τότε

$$N(A) = R(A^T)^\perp \quad \mathbb{R}^n$$

$$N(A^T) = R(A)^\perp \quad \mathbb{R}^m$$

$$N(A)^\perp = R(A^T) \quad \mathbb{R}^n$$

$$N(A^T)^\perp = R(A) \quad \mathbb{R}^m$$

Θεμελιώδεις υπόχωροι

- ▶ Εάν $A \in \text{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ τότε

$$\dim R(A) = r$$

$$\dim N(A) = n - r$$

$$\dim R(A^T) = r$$

$$\dim N(A^T) = m - r$$

Τομή Υπόχωρων

- ▶ Εάν V και W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την τομή των υπόχωρων ως

$$V \cap W = \{\mathbf{x} \in V \text{ \& } \mathbf{x} \in W\}$$

Η τομή των δύο υποχώρων είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Εάν V μηδενόχωρος ενός πίνακα A και W μηδενόχωρος ενός πίνακα B , $V \cap W$ είναι ο μικρότερος μηδενόχωρος του πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Τομή Υπόχωρων

- ▶ Εάν V και W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την τομή των υπόχωρων ως

$$V \cap W = \{\mathbf{x} \in V \text{ \& } \mathbf{x} \in W\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Η τομή δύο ορθογώνιων υπόχωρων V και W είναι ο υπόχωρος ενός σημείου $\{0\}$
- Εάν V και W είναι τα σύνολα των άνω και κάτω τριγωνικών πινάκων $n \times n$ αντίστοιχα, η τομή τους είναι το σύνολο των διαγωνίων πινάκων $n \times n$:

Άθροισμα Υπόχωρων

- ▶ Εάν V και W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το άθροισμα των υπόχωρων ως

$$V + W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ για } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \}$$

Το άθροισμα των δύο υποχώρων $V + W$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

V χώρος στηλών ενός πίνακα A και W χώρος στηλών ενός πίνακα B
, $V + W$ είναι ο χώρος στηλών του πίνακα $D = [A \ B]$

Άθροισμα Υπόχωρων

- ▶ Εάν V και W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το άθροισμα των υπόχωρων ως

$$V + W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ για } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

V και W ορθογώνια συμπληρώματα ο ένας του άλλου στον $\mathbb{R}^n$.
Τότε $V + W = \mathbb{R}^n$

- ▶ Εάν V και W είναι τα σύνολα των άνω και κάτω τριγωνικών πινάκων $n \times n$ αντίστοιχα, το άθροισμά τους είναι το σύνολο των πινάκων $n \times n$:

Άθροισμα Υπόχωρων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

V χώρος στηλών ενός πίνακα A και W χώρος στηλών ενός πίνακα B
, $V + W$ είναι ο χώρος στηλών του πίνακα $D = [A \ B]$

Ο A έχει k στήλες και ο B έχει l στήλες - διανύσματα βάσης

$$\dim(V + W) = \dim R(D)$$

$$\dim(V \cap W) = \dim N(D)$$

Τάξη αθροίσματος και τομής

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim R(D) + \dim N(D)$$

$$\dim R(A) = r$$

$$\dim N(A) = n - r$$

$$\dim R(A^T) = r$$

$$\dim N(A^T) = m - r$$

$$\dim R(D) = r$$

$$\dim N(D) = k + l - r$$

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = k + l$$

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

Ευθύ άθροισμα

$$\varepsilon \acute{\alpha} \nu (V \cap W) = \{0\}$$

$$V + W \equiv V \oplus W$$

Ευθύ άθροισμα

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$