



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022–2023

Διάλεξη 13

Πίνακες και Γραμμικές Απεικονίσεις

Μιχάλης Ταρουδάκης

Γραμμικές Απεικονίσεις

► Η έννοια της απεικόνισης

Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ απεικονίζεται μέσω ενός Πίνακα $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ σε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$

Η απεικόνιση L_A μας μεταφέρει από τον χώρο $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$

$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$



Γραμμικές Απεικονίσεις

▶ Παραδείγματα

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}$$

Διαστολή ή συστολή του διανύσματος $\mathbf{x}$
Για $c < 0$, το διάνυσμα αλλάζει φορά

Γραμμικές Απεικονίσεις

▶ Παραδείγματα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

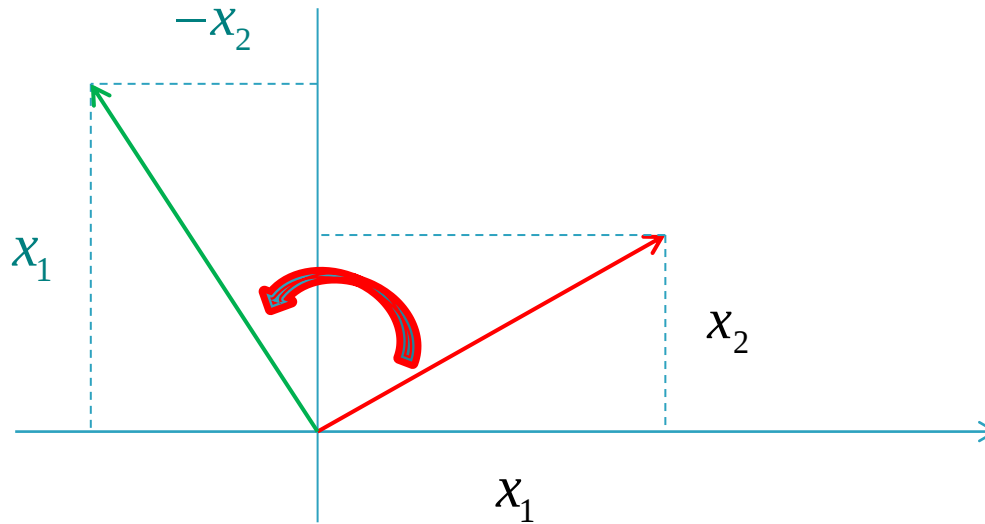
$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Στροφή των διανυσμάτων κατά 90°

Γραμμικές Απεικονίσεις

► Παραδείγματα

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$



Γραμμικές Απεικονίσεις

▶ Παραδείγματα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

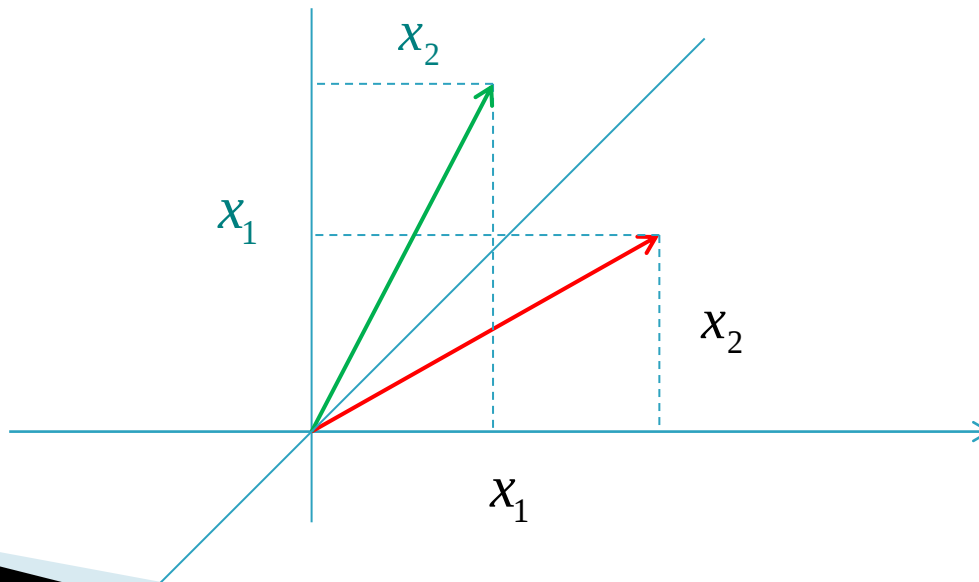
$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Κατοπτρισμός (ανάκλαση) διανύσματος ως προς την ευθεία $x_1 = x_2$

Γραμμικές Απεικονίσεις

► Παραδείγματα

$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$



Γραμμικές Απεικονίσεις

▶ Παραδείγματα

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

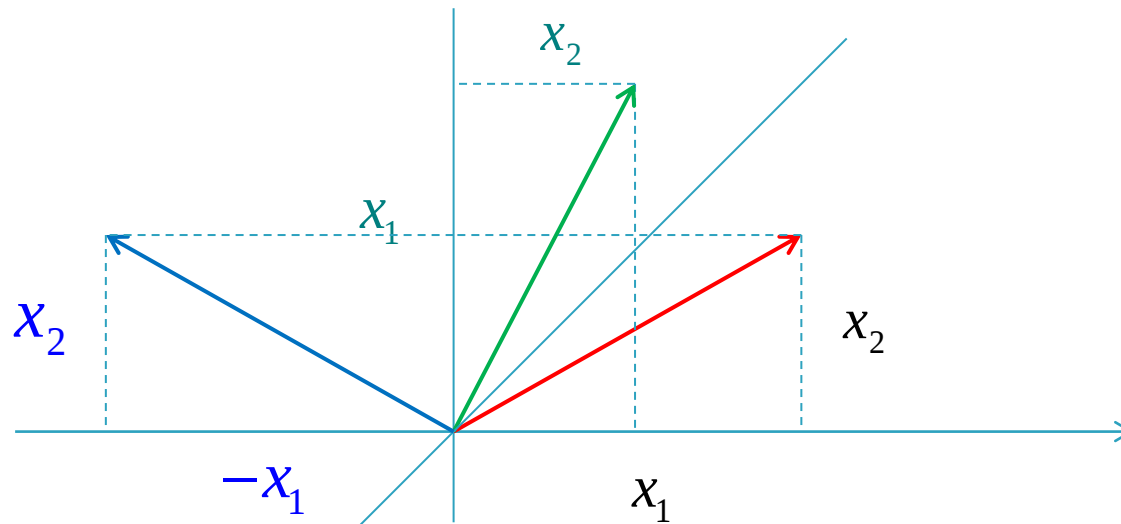
$$AB\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ανάκλαση διανύσματος ως προς την ευθεία $x_1 = x_2$ και στη συνέχεια περιστροφή κατά 90°

Γραμμικές Απεικονίσεις

► Παραδείγματα

$$AB\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Ανάκλαση διανύσματος ως προς την $x_1 = 0$

Ιδιότητες Γραμμικής Απεικόνισης με Πίνακα

$$L_A(0) = 0, \quad A0 = 0$$

$$L_A(c\mathbf{x}) = cL_A(\mathbf{x}), \quad A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x})$$

$$L_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L_A(\mathbf{x}) + L_A(\mathbf{y}), \quad A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$

Ορισμός Γραμμικής Απεικόνισης (Γραμμικού Μετασχηματισμού)

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι **γραμμική απεικόνιση** εάν

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ και } \forall c \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

Εάν V και W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, η απεικόνιση $f: V \rightarrow W$ είναι γραμμική εάν πληρούνται οι ως άνω όροι.

Παραδείγματα απεικονίσεων

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Είναι γραμμική ;

ΝΑΙ

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Είναι γραμμική ;

ΟΧΙ

Παραδείγματα απεικονίσεων

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Είναι γραμμική ;

ΝΑΙ

Η απεικόνιση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = 2x + 1$$

Είναι γραμμική ;

ΟΧΙ

Παραδείγματα απεικονίσεων

Έστω ο χώρος P_k των πολυωνύμων βαθμού το πολύ k

$$p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, k, a_k \neq 0$$

Η παραγώγιση είναι γραμμική ;

Ναι και στέλνει τον P_k στον P_{k-1}

Η ολοκλήρωση από το 0 στο t είναι γραμμική ;

Ναι και στέλνει τον P_k στον P_{k+1}

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Έστω $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ τα διανύσματα της βάσης ενός διανυσματικού χώρου.

Τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ του χώρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης.

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_n \mathbf{X}_n$$

Από γραμμικότητα

$$A\mathbf{x} = c_1 (A\mathbf{X}_1) + c_2 (A\mathbf{X}_2) + \dots + c_n (A\mathbf{X}_n)$$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και

$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Εάν A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα

$$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } f = L_A$$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Απόδειξη

$$\text{Έστω } \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\text{Τότε } \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$$

$$f(\mathbf{u}) = f(u_1 \mathbf{e}_1) + f(u_2 \mathbf{e}_2) + \dots + f(u_n \mathbf{e}_n) = u_1 f(\mathbf{e}_1) + u_2 f(\mathbf{e}_2) + \dots + u_n f(\mathbf{e}_n)$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = A\mathbf{u}$$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Γενίκευση

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$

Βάση του V

Έστω $\mathbf{u} \in V$

Τότε $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k$

$$f(\mathbf{u}) = f(c_1 \mathbf{x}_1) + f(c_2 \mathbf{x}_2) + \dots + f(c_k \mathbf{x}_k) = c_1 f(\mathbf{x}_1) + c_2 f(\mathbf{x}_2) + \dots + c_k f(\mathbf{x}_k)$$

Πίνακες γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Πίνακες γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακες γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{aligned} f(1,2) &= (1,1,2) \\ f(0,1) &= (0,1,1) \end{aligned}$$

Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακες γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα :

P_3 είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3

Μία βάση : $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2, p_4 = t^3$

Παραγωγή : Γραμμική Απεικόνιση A

$$Ap_1 = 0, Ap_2 = 1 = p_1, Ap_3 = 2t = 2p_2, Ap_4 = 3t^2 = 3p_3$$

Αντιστοιχούμε :

$$p_1 = (1, 0, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0, 0), p_3 = (0, 0, 1, 0), p_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Πίνακες γραμμικής απεικόνισης

$$p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2, p_4 = t^3$$

$$Ap_1 = 0, Ap_2 = 1 = p_1, Ap_3 = 2t = 2p_2, Ap_4 = 3t^2 = 3p_3$$

Αντιστοιχούμε :

$$p_1 = (1, 0, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0, 0), p_3 = (0, 0, 1, 0), p_4 = (0, 0, 0, 1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακες γραμμικής απεικόνισης

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = 2 + t - t^2 - t^3$$

$$\frac{dp}{dt} = Ap = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - 2t - 3t^2$$