



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ 2022-2023

Διάλεξη 14

Σύνθεση Απεικονίσεων. Εικόνα και Πυρήνας
Γραμμικής Απεικόνισης. Αντίστροφη
Απεικόνιση

Μιχάλης Ταρουδάκης

Ορισμός Γραμμικής Απεικόνισης (Γραμμικού Μετασχηματισμού)

Η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι **γραμμική απεικόνιση** εάν

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ και } \forall c \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

Εάν V και W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, η απεικόνιση $f: V \rightarrow W$ είναι γραμμική εάν πληρούνται οι ως άνω όροι.

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ απεικονίζεται μέσω ενός πίνακα $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$
σε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$

Η απεικόνιση L_A μας μεταφέρει από τον χώρο $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Πρόταση

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και

$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Εάν A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα

$$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } f = L_A$$

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Γενίκευση

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$

Βάση του V

Έστω $\mathbf{u} \in V$

Τότε $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_k$

$$f(\mathbf{u}) = f(c_1 \mathbf{x}_1) + f(c_2 \mathbf{x}_2) + \dots + f(c_n \mathbf{x}_k) = c_1 f(\mathbf{x}_1) + c_2 f(\mathbf{x}_2) + \dots + c_n f(\mathbf{x}_k)$$

Σύνθεση απεικονίσεων

$$f: V \rightarrow W$$

$$g: W \rightarrow Z$$

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \in W$$

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{w}) \in Z$$

$$\mathbf{z} = g(f(\mathbf{v})) \in Z$$

$$g \circ f: V \rightarrow Z$$

Η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση

Σύνθεση απεικονίσεων

$$f : \text{Mat}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, b+c) \quad g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g \circ f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = g(a+d, b+c) = (a+d)^2 + (b+c)^2$$

Η σύνθεση $f \circ g$ δεν ορίζεται.

Σύνθεση απεικονίσεων

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x^2 + 1, x + y)$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x, y) &= f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(x^2 + 1, x + y) = \\ &= \left((x^2 + 1)^2 + 1, x^2 + 1 + x + y \right) \end{aligned}$$

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

Πρόταση :

Εάν A, B πίνακες $m \times n$ και $n \times r$ αντίστοιχα ώστε να ορίζεται το γινόμενο $C=AB$

$$L_A \circ L_B = L_C$$

Απόδειξη :

$$L_C(u) = Cu = (AB)u = A(Bu) = L_A(L_B(u)) = L_A \circ L_B$$

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

▶ Παραδείγματα

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

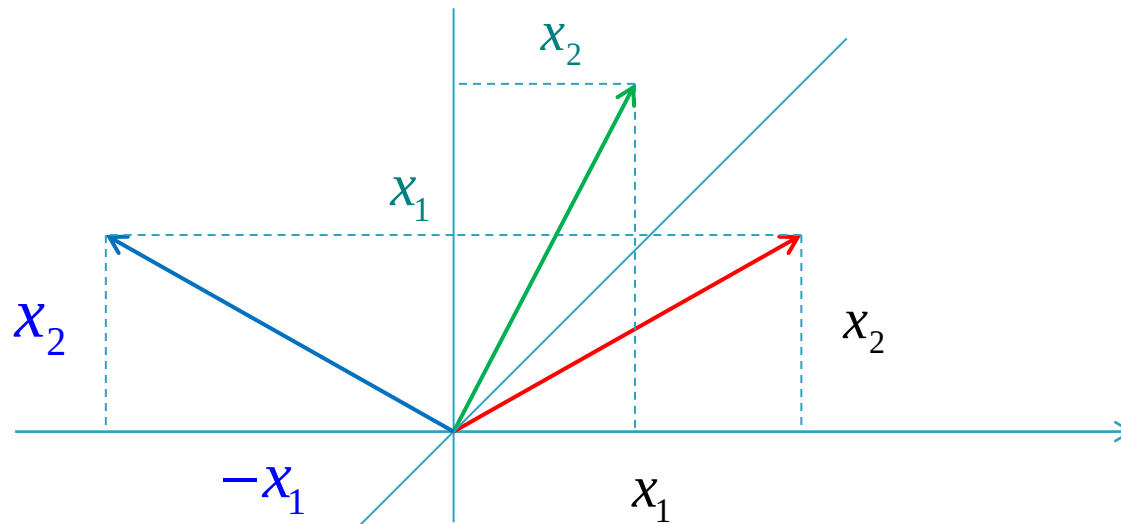
$$AB\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ανάκλαση διανύσματος ως προς την ευθεία $x_1 = x_2$ και στη συνέχεια περιστροφή κατά 90°

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

► Παραδείγματα

$$AB\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

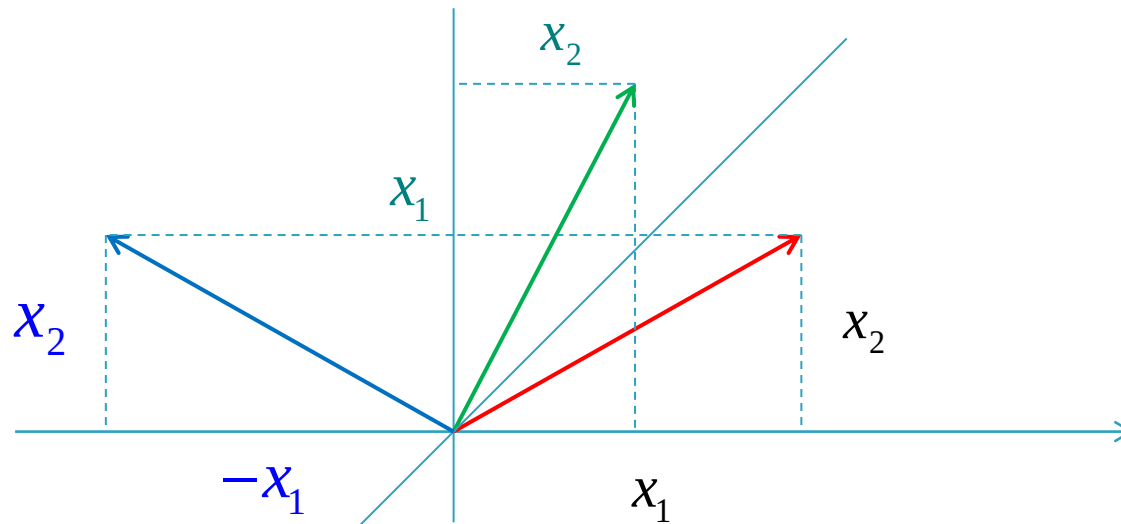


Ανάκλαση διανύσματος ως προς την $x_1 = 0$

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

► Παραδείγματα

$$L_A \circ L_B = L_C$$



Ανάκλαση διανύσματος ως προς την $x_1 = 0$

Εικόνα γραμμικής απεικόνισης

$$f:V \rightarrow W$$

$$\text{Im } f = \{w \in W, \exists v \in V, w = f(v)\} \subseteq W$$

Πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

$$f:V \rightarrow W$$

$$\text{Ker } f = \{v \in V, f(v) = 0\} \subseteq V$$

Εικόνα και πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 3x - 2y$$

Πυρήνας: $3x - 2y = 0 \quad y = \frac{3}{2}x$

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = \frac{3}{2}x \right\} = \left\{ \left(x, \frac{3}{2}x \right), x \in \mathbb{R}, \right\} = \left\{ x \left(1, \frac{3}{2} \right), x \in \mathbb{R}, \right\}$$

Διάσταση υπόχωρου (πυρήνα) = 1

Εικόνα και πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 3x - 2y$$

Εικόνα: $\text{Im } f = \{z : z = 3x - 2y, x, y \in \mathbb{R}\}$

Γράφουμε: $x = \left(\frac{2z}{3}\right), \quad y = \left(\frac{z}{2}\right) \quad \text{Im } f = \{z \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Διάσταση υπόχωρου (εικόνας)} = 1$$

Εικόνα και πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα $A \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Συναρτήσεις που έχουν παραγώγους κάθε τάξης

Ορίζουμε $D: A \rightarrow A \quad D(f) = f'$

$$\text{Ker } D = \{ f \in A, D(f) = 0 \} = \{ f \in A, f' = 0 \} = \{ c : c \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = \{ D(f), f \in A \} = \{ f', f \in A \}$$

Εικόνα και πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

Παραδείγματα

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ y \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πυρήνας και η εικόνα της απεικόνισης

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Αμφιμονοσήμαντη (έναν προς έναν – one to one)

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow f(\mathbf{v}_1) \neq f(\mathbf{v}_2)$$

$$f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$$

Είδη απεικονίσεων

$$f: V \rightarrow W$$

Αμφιμονοσήμαντη (έναν προς έναν – one to one)

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow f(\mathbf{v}_1) \neq f(\mathbf{v}_2)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \quad \text{OXI}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x+1, y+2) \quad \text{NAI}$$

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Αμφιμονοσήμαντη (έναν προς έναν – one to one)

Γραμμικές απεικονίσεις

$$\text{Ker } f = \mathbf{0}$$

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Επί (onto -surjective)

$$\forall \mathbf{w} \in W, \exists \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

$$\text{Im } f = W$$

Είδη απεικονίσεων

Παραδείγματα $A \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Συναρτήσεις που έχουν παραγώγους κάθε τάξης

$$\text{Im } f = \{D(f), f \in A\} = \{f', f \in A\}$$

Κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγουσα

Επομένως η απεικόνιση είναι επί του A

Είδη απεικονίσεων

$$f : V \rightarrow W$$

Ισομορφισμός (**ένα προς ένα και επί**)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x + 1$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 1, y + 2)$$

Είδη απεικονίσεων

$$f: V \rightarrow V$$

Ταυτοτική απεικόνιση (identity mapping) I_V

$$\mathbf{v} \in V : I_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

$$\text{Im } I_V = V$$

Θεώρημα Διάστασης

$$\dim V = \dim (\text{Ker } f) + \dim (\text{Im } f)$$

Αντίστροφη Απεικόνιση και Ισομορφισμός

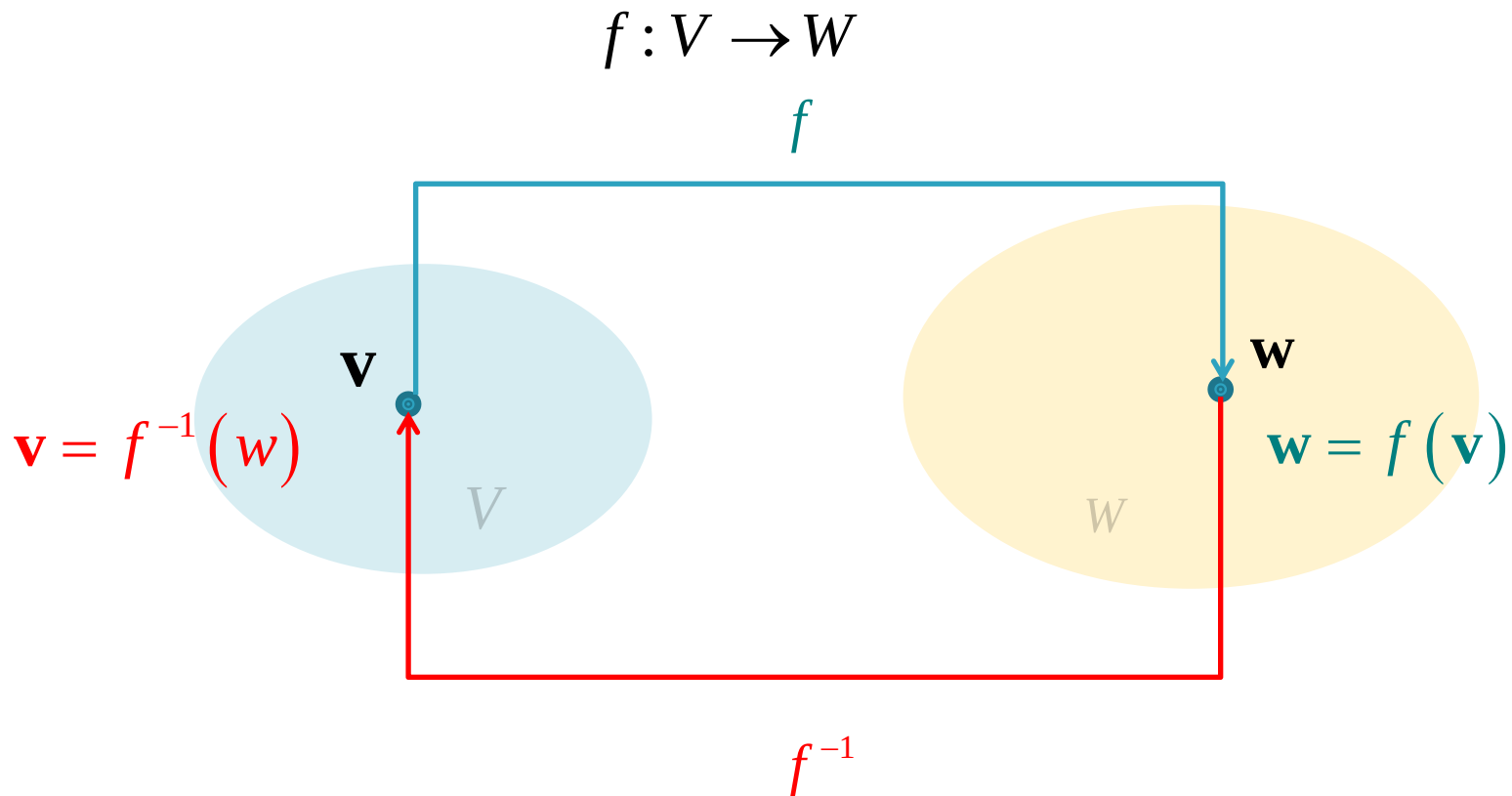
$$f: V \rightarrow W$$

Η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός εάν και μόνο εάν υπάρχει μία απεικόνιση $f^{-1}: W \rightarrow V$ (αντίστροφη απεικόνιση) που ικανοποιεί $(f^{-1} \circ f) = I_V$, $(f^{-1} \circ f)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ και

$$(f \circ f^{-1}) = I_W, \quad (f \circ f^{-1})(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$$

Η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης γραμμική

Αντίστροφη Απεικόνιση και Ισομορφισμός



$$(f^{-1} \circ f) = I_V, \quad (f^{-1} \circ f)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

$$(f \circ f^{-1}) = I_W, \quad (f \circ f^{-1})(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$$